Введение

Методические указания посвящены вопросам изучения и практического применения теории функции двух переменных. Каждый параграф соответствует одному практическому занятию по данной теме.

Цель указаний – облегчить самостоятельную работу студентов в аудитории и при выполнении домашних заданий.

§1 Область определения. Изображение функций двух переменных при помощи линий уровня

Областью определения (ОО) функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество таких точек координатной плоскости XY, для которых эта формула имеет смысл и результатом каждой операции, указанной в формуле является действительное число.

Будем называть e – *окрестностью* точки $Q_0(x_0, y_0)$ круг с центром в этой точке Q_0 и радиусом e.

Линии, образованные множеством таких точек, в любой e – окрестности которых присутствуют как точки принадлежащие области определения, так и не принадлежащие области определения, будем называть границей области определения.

При построении области определения функции двух переменных на координатной плоскости XY необходимо придерживаться следующих правил.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

- Область определения заштриховывается.
- Если требуется показать, что некоторая точка принадлежит области определения, то эта точка закрашивается.
- Если требуется показать, что некоторая точка не принадлежит области определения, то эта точка выкалывается (обводится окружностью).
- Если часть границы области определения принадлежит области определения, то она изображается сплошной линией.
- Если часть границы области определения не принадлежит области определения, то она изображается штриховой линией.

Линией уровня (с - уровнем) функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек координатной плоскости XY, удовлетворяющих условию $c = f(x, y)$.

Уровни функции трёх переменных называют *поверхностями уровня*.

Пример 1. Найти область определения и линии уровня функции, заданной формулой

$$z = \sqrt{\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}$$

Решение. Найдём ОО. Функция определена в тех и только тех точках (x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0 \text{ и } x^2 + y^2 - 1 \neq 0.$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Эти условия равносильны двум системам неравенств:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Первой системе неравенств удовлетворяют координаты всех точек, расположенных в полуплоскости $y \geq 0$ и вне окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Второй системе удовлетворяют все точки плоскости, лежащие в полуплоскости $y \leq 0$ и внутри окружности радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1).

Для нахождения линий уровня функции надо найти множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $\sqrt{2y \big/ \left(x^2 + y^2 - 1\right)} = c$.

Если $c < 0$, то линией уровня функции является пустое множество; если $c = 0$, то линией уровня функции будет, очевидно, множество всех точек прямой $y = 0$ за исключением двух точек $(\pm 1, 0)$, не входящих в область определения функции. В случае $(c > 0)$, преобразуя исходное уравнение, получаем

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = c^2, \; x^2 + y^2 - \frac{2}{c^2} y = 1, \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{c^2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{c^4}$$

Следовательно, линией уровня функции при $c > 0$ является окружность радиуса $\sqrt{1 + 1/c^4}$ с центром в точке $\left(0; 1/c^2\right)$ за исключением двух точек $(\pm 1; 0)$, не принадлежащих ОО.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

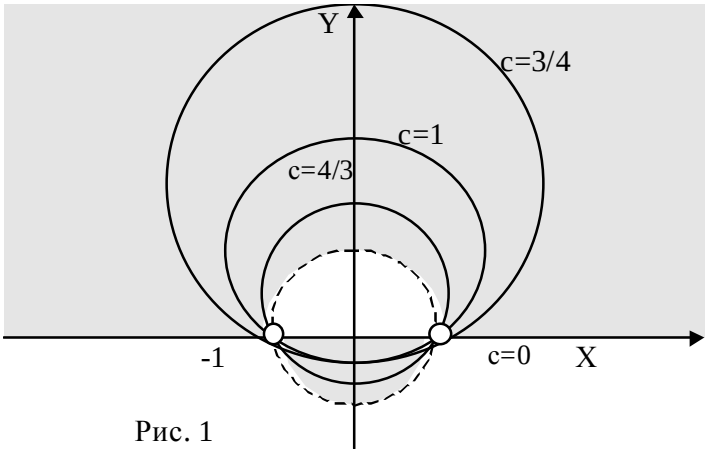

Рис. 1

1.1 Изобразить на координатной плоскости XY области определения функций двух переменных, заданных формулами:

1) $z = \sqrt{x-y} + 5\sqrt{x+y}$.

2) $z = \arcsin(x+y)$.

3) $z = \frac{1}{x+y}$.

4) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$.

5) $z = \frac{1}{1-y^2}$.

6) $z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

7) $z = \arcsin(x^2+y^2)$.

8) $z = 6arctg(x^2+y^2)$.

9) $z = \ln(x+y)$.

10) $z = \ln(x^2+y^2)$.

11) $z = \frac{1}{\ln(x^2+y^2)}$.

12) $z = \frac{1}{\ln(x)+7\ln(y)}$.

13) $z = \ln(4x^2-y^2)$.

14) $z = \ln(x^2+y^2-1)$.

15) $z = \sqrt{1-x}$.

16) $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$.

17) $z = \sqrt{1-|x|-|y|}$.

18) $z = \sqrt{1-|y|}$.

19) $z = \frac{x-y}{|x|-|y|}$.

20) $z = \ln(1-|x|+|y|)$.

1.2 Изобразить на координатной плоскости XY линии уровня следующих функций:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

2) $z = \dfrac{x}{y}$.

3) $z = x + y$.

4) $z = x - y$.

5) $z = x^2 + y^2$

6) $z = xy$

7) $z = \sin(x)$.

8) $z = \sqrt{y}$.

9) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

10) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}}$.

11) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

12) $z = |x| + |y|$.

13) $z = |x + y|$.

14) $z = |x - y|$.

15) $z = \dfrac{x}{x + y}$.

16) $z = \dfrac{x + y}{x}$.

17) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

18) $z = \ln(1 - |x| - |y|)$.

19) $z = \dfrac{1}{\arcsin(x^2 + y^2)}$.

20) $z = \dfrac{1}{arctg(x^2 + y^2)}$.

§2 Частные производные первого порядка, градиент, производная по направлению

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Для вычисления частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ обычно пользуются обычными формулами и правилами дифференцирования функции одной переменной, ***мысленно*** считая y постоянной, а для вычисления частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ — считая x постоянной. Для частных производных первого порядка также используются обозначения $f_x \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$. Этот вектор обозначается $grad\ f$.

Свойства градиента.

- Градиент направлен в сторону возрастания функции.
- Градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через точку, в которой этот градиент вычисляется.
- В точке экстремума (см. §9) градиент равен нулевому вектору, или не существует.
- В точке условного экстремума (см. §10) градиент перпендикулярен кривой, задаваемой уравнением связи.

Пусть задан вектор $\vec{l} = \{m, n\}$. Обозначим $\cos a, \cos b$ - косинусы углов, образованных вектором $\vec{l}$ с осями координат (*направляющие косинусы*). *Производная* функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) *по направлению* вектора $\vec{l}$ вычисляется по любой из формул:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = grad f \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos a + \frac{\partial f}{\partial y}\cos b$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Производную функции f по направлению вектора $\vec{l}$ обозначают $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

2.1 Вычислить частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ следующих функций:

1) $z = \sin(x + y)$.
2) $z = \ln(x^2 + y^2)$.
3) $z = \arcsin(xy)$.
4) $z = \sqrt{1 + xy}$.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

5) $z = 3tg\left(\frac{x}{y}\right) + x - y^2$.

6) $z = 8arctg\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) + \sqrt{x}$.

7) $z = 6\frac{x+y}{x-y} - y^5$.

8) $z = 9\arccos\left(1 - \frac{x}{y}\right) + yx^2$.

9) $z = \ln(x+y)\sqrt{x-y}$.

10) $z = \sin\left(xy^3\right) * tg(x+y)$.

11) $z = \frac{\sin\left(3x^2 + y\right)}{tg(xy)}$.

12) $z = \frac{e^{-x}}{\arcsin(x - xy)}$.

13) $z = \cos\left(\frac{x^2}{x-y}\right) + xy - y$.

14) $z = \frac{tg\left(x - y^5\right)}{ctg(xy - 1)} - e^{3x^2}$.

2.2 Вычислите градиент следующих функций:

1) $z = \frac{x-1}{y+x}$.

2) $z = \frac{xy-1}{x + \ln|ey|}$.

3) $z = \frac{x^3 - xy}{x+y}$.

4) $z = \frac{x + \sqrt{x+1}}{y-1}$.

5) $z = \frac{xy + \sqrt{1+xy}}{1 - x^2 + y}$.

6) $z = \frac{x^2 - 1}{xy + 1}$.

7) $z = \frac{e^{-x} + 3}{y - x}$.

8) $z = x^2\sqrt{x+y}$.

9) $z = (x-y)\sqrt{x+y}$.

10) $z = \left(x + y^2\right)\sin(px)$.

2.3 Вычислите градиент функций из упражнения 2.2 в указанных точках. Номера функций (из 2.2) соответствуют номерам точек (из 2.3).

1)(1,2); 2) (2,1); 3) (1,5); 4) (3,2); 5) (2,4); 6) (3,-1);

7) (0,-2); 8) (5,4); 9) (4,5); 10) (0.5,2).

2.4 Вычислите производные по направлению. Номера координат векторов $\vec{l}$ (из 2.4) соответствуют номерам точек (из 2.3) и номерам функций (из 2.1).

1) $\vec{l} = (1,5)$; 2) $\vec{l} = (-1,5)$; 3) $\vec{l} = (1,-5)$; 4) $\vec{l} = (2,3)$;

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

5) $\vec{l} = (1,-3)$; 6) $\vec{l} = (-2,-8)$; 7) $\vec{l} = (-2,1)$; 8) $\vec{l} = (1,6)$;

9) $\vec{l} = (1,0)$; 10) $\vec{l} = (0,1)$.

§3 Частные производные высших порядков. Смешанные частные производные. Оператор Лапласа. Уравнение Лапласа. Уравнение Пуассона

Частной производной порядка m, называют частную производную первого порядка, от любой частной производной порядка m-1.

Таким образом, по определению получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Частную производную по различным переменным называют *смешанной частной производной*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

Оператором Лапласа от некоторой функции f называется соотношение

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Оператор Лапласа от функции f обозначается $\nabla^2 f$.

Пусть задана некоторая функция $g(x,y)$. Тогда уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g \ (\text{или } \nabla^2 f = g),$$

относительно неизвестной функции $f(x,y)$ называется *уравнением Пуассона*. Для того чтобы решить уравнение Пуассона, недостаточно знать одну только функцию g

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

(нужны граничные условия, например Коши). Граничные условия Коши состоят в том, что задаётся значение функции на границе области, в которой требуется решить уравнение Пуассона.

Если $g(x,y)\equiv 0$, то в этом случае уравнение Пуассона называется *уравнением Лапласа*.

3.1 Найдите все производные второго порядка от следующих функций:

1) $z = x + y$.

2) $z = \frac{1}{x+y}$.

3) $z = \ln(x+y)$.

4) $z = e^{1+xy}$.

5) $z = \log_5\left(\frac{x}{x+y}\right)$.

6) $z = \frac{arctg(xy)}{\sin(1+xy)}$.

7) $z = \frac{e^{-4x}}{\cos(x)}$.

8) $z = \frac{tg(7y+1)}{\cos(4y)}$.

9) $z = (1-x)\sqrt{1+xy}$.

10) $z = arctg\left(xy^7\right)$.

11) $z = \frac{1+\cos(1-xy)}{\ln(1-xy)}$.

12) $z = \frac{1+x\sin(y)}{1-xy}$.

13) $z = 1 - xtg\left(\frac{x}{y}\right)$.

14) $z = \frac{1-x}{1+e^{5y}}$.

15) $z = (1+\sin(7x+y))\sqrt{y-x}$.

16) $z = (1-x)\sin(3x-5y)$.

17) $z = x - 3\frac{x}{y}$.

18) $z = x^2 - 4y^5\sqrt{x+y}$.

19) $z = sh(x-y)$.

20) $z = 4ch(xy)$.

3.2 Пользуясь результатами упражнения 3.1, проверьте справедливость равенства $z_{xy} = z_{yx}$.

3.3 Используя результаты упражнения 3.1, вычислите оператор Лапласа от функций z (т.е. $\nabla^2 z$), перечисленных в упражнении 3.1.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

3.4 Являются ли следующие функции решениями уравнения Лапласа?

1) $z = x + y$.

2) $z = xy$.

3) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

4) $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

5) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

6) $z = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.

§4 Дифференцирование сложных функций

Если $u = f(x, y)$ - дифференцируемая функция переменных x, y, которые сами по себе являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x = j_1(t), \quad y = j_2(t),$$

то производная сложной функции $u = f\left(j_1(t), j_2(t)\right)$ вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

В частности, если t совпадает, например, с переменной x, то “полная” производная функции u по x равна

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

4.1 Найти $\frac{dz}{dt}$, если

1) $z = e^{2x-3y}$, где $x = tg\,t$, $y = t^2 - t$.

2) $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

3) $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

4) $z=\frac{y}{x}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$.

5) $z=\left(e^x+e^y\right)$, где $x=\sin(3t-1)$, $y=e^t$.

6) $z=tg(xy)$, где $x=\frac{1-t}{1+t}$, $y=\cos(2t)$.

7) $z=\arcsin\left(x^2-y\right)$, где $x=\frac{1-t}{1+e^t}$, $y=e$.

8) $z=\frac{1-x}{\lg x}$, где $x=e^{2t}+1$, $y=\ln t$.

9) $z=\arcsin(1-xy)$, где $x=\sin(3t-1)$, $y=e^{2t}-1$.

10) $z=\frac{1-\ln(x+y)}{xy}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$.

11) $z=\frac{e^{xy}}{x-y}$, где $x=\frac{1-t}{1+t}$, $y=\ln t$.

12) $z=\sqrt{xy-y^2}$, где $x=\sin(3t-1)$, $y=\frac{1-3t}{\cos(t)}$.

§5 Замена переменных в дифференциальных выражениях

Пример 2. Требуется преобразовать уравнение $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$, полагая $x=\cos t$.

Находим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t*\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t*\frac{dy}{dt}}{\sin^2 t*(-\sin t)}=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Подставим полученные выражения производных в данное уравнение и заменим x на $\cos t$:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\left(1-\cos^2 t\right)\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)=0.$$

или $\frac{d^2y}{dt^2}=0.$

5.1 Преобразовать уравнение

1) $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-y=0$, полагая $x=\frac{1}{t}$.

2) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\left(1+x^2\right)^2}=0$, полагая $x=tg\,t$.

3) $x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}=1$, полагая $x=e^t$.

4) $2\frac{dy}{dx}+4(1+x)\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+x}$, полагая $x=t^2-1$.

5) $-2\sin x*\cos x\frac{dy}{dx}+\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$, полагая $x=arctg\,t$.

§6 Дифференциалы первого порядка функций 2-х переменных

В каждой точке, где справедливо равенство

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+C(\Delta x)^2+D\Delta x\Delta y+E(\Delta y)^2+\ldots,$$

в котором $\Delta x=x-x_0=dx$, $\Delta y=y-y_0=dy$, *дифференциал функции f первого порядка* равен $df=A\Delta x+B\Delta y$.

Дифференциалом функции 1-го порядка называют линейную часть ее приращения.

Дифференциал функции первого порядка df может быть вычислен по формуле

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Свойства дифференциала:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

- $d(f+g)=df+dg$,
- $d(kf)=k\,df$, где $k-const$,
- $\int df = f+c$, где c – неопределённая константа.

6.1 Вычислите дифференциалы первого порядка следующих функций:

1) $z=e^{2x-3y}$.

2) $z=x^{y}$.

3) $z=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

4) $z=\frac{y}{x}$.

5) $z=\left(e^{x}+e^{y}\right)$.

6) $z=tg(xy)$.

7) $z=\frac{e^{xy}}{x-y}$.

8) $z=\frac{1-x}{\lg x}$.

9) $z=\arcsin(1-xy)$.

10) $z=\frac{1-\ln(x+y)}{xy}$.

11) $z=\arcsin\left(x^{2}-y\right)$.

12) $z=\sqrt{xy-y^{2}}$.

13) $z=x+y$.

14) $z=xy$.

15) $z=\ln\left(x^{2}+y^{2}\right)$.

16) $z=\frac{x}{x^{2}+y^{2}}$.

17) $z=\frac{x^{2}-y^{2}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}$.

18) $z=\log_{5}\left(\frac{x}{x+y}\right)$.

19) $z=\frac{arctg(xy)}{\sin(1+xy)}$.

20) $z=\frac{e^{-4x}}{\cos(x)}$.

21) $z=(1-x)\sqrt{1+xy}$.

22) $z=(1+x)\sqrt{1-xy}$.

Дифференциальное выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является *полным дифференциалом*, если существует такая функция $z(x,y)$, дифференциал которой $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ совпадает с данным выражением.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Для того чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно соблюдение условия Римана $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

6.2 Проверьте, что полными дифференциалами будут следующие дифференциальные соотношения.

1) $dz=\frac{2x\,dx}{1+y^2-2x^2y+x^4}-\frac{dy}{1+y^2-2x^2y+x^4}$.

2) $dz=\frac{\left(0.5-\sqrt{x+y^2}\right)dx}{x+y^2-x\sqrt{x+y^2}}+\frac{ydy}{x+y^2-x\sqrt{x+y^2}}$

3) $dz=\frac{dx+3dy}{\sqrt{1-x^2-6xy-9y^2}}$.

4) $dz=\frac{1}{1+xy}\sqrt{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{1+xy}\sqrt{\frac{y}{x}}dy$.

5) $dz=\cos\left(y+\sin x\right)\left(\cos x dx+dy\right)$.

6) $dz=3e^{3x}\sin y\;dx+e^{3x}\cos y\;dy$.

7) $dz=\left(e^x+1\right)\;dx$.

8) $dz=\left(2x-15x^4y\right)dx+\left(1-3x^5\right)dy$.

9) $dz=\frac{(3x+y)dx+xdy}{2\sqrt{x+y}}$.

10) $dz=\frac{e^x dx+dy}{e^x+y}$.

§7 Дифференциалы функций высших порядков

Дифференциал m-го порядка функции $z=f(x,y)$, где x, y-независимые переменные, выражается символьной формулой

$$d^m z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z,$$

которая формально раскрывается по биноминальному закону.

Например, в случае функции $z=f(x,y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов 2-го и 3-го порядков справедливы формулы

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

7.1 Найти d^2z следующих функций:

1) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

2) $z = \frac{y}{x}$.

3) $z = tg(xy)$.

4) $z = x^y$.

5) $z = \frac{e^{xy}}{x - y}$.

6) $z = \frac{e^{-4x}}{\cos(x)}$.

7.3 Найти d^3z следующих функций:

1) $z = \ln(x + y)$.

2) $z = \sin(xy)$.

3) $z = e^{xy}$.

4) $z = x - y$.

5) $z = \frac{1}{xy - 1}$.

6) $z = \frac{x}{y - 1}$.

7) $z = x^7y^3 - xy^5$.

8) $z = \cos(x + y)$.

9) $z = e^{xy}$.

10) $z = e^x \cos(xy)$.

11) $z = \ln(x + e^y)$.

12) $z = \ln(x + e)$.

13) $z = \frac{3x^2y - xy^7}{x}$.

14) $z = \frac{xy + e^x y}{y}$.

15) $z = \frac{1 + x}{y}$.

16) $z = \frac{1 - x}{e^y}$.

17) $z = \frac{1 + x^2}{y}$.

18) $z = \frac{1 + x}{e^y}$.

§8 Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Если функция z дифференцируема $m+1$ раз в некоторой окрестности точки P_0, то для всякой точки P,

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

принадлежащей этой окрестности справедлива *формула Тейлора:*

$$z\big|_p = z\big|_{p_0} + \frac{dz\big|_{p_0}}{1!} + \frac{d^2 z\big|_{p_0}}{2!} + \ldots + \frac{d^n z\big|_{p_0}}{n!} + \ldots$$

Для случая функции двух переменных, *формула Тейлора* записывается следующим образом:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right) +$$

$$+0.5*\left(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) +$$

$$+\frac{1}{6}*\left(f'''_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + \right.$$

$$\left. +3f'''_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f'''_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\right) +$$

$$\ldots + \frac{1}{m!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0).$$

В частном случае $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получаем *формулу Маклорена*.

8.1 Разложить следующие функции в ряд Тейлора в окрестности точки (2,1) вплоть до второго порядка включительно:

1) $z = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$.

2) $z = xy^2$.

3) $z = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6y - 4$.

4) $z = y/x$.

5) $z = \ln\left(xy + z^2\right)$.

6) $z = x^y$.

7) $z = \frac{1-xy}{x}$.

8) $z = 1 - xy^5 - x^{-2}y$.

9) $z = e^x y - x^2 y$.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

10) $z = \dfrac{1 - xy}{e^y}$.

8.2 Разложить следующие функции в ряд по формуле Маклорена вплоть до третьего порядка включительно:

1) $z = e^y \cos x$.

2) $z = \sin x \cos y$.

3) $z = \ln(xy + 1)$.

4) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

5) $z = arctg(1 + xy)$.

6) $z = arctg(1 + x + y)$.

§9 Экстремумы функций двух переменных

Говорят, что функция f достигает *локального максимума* в точке Q_0, если существует такая e – окрестность точки Q_0, для всех точек которой, значение функции в точке Q_0 будет наибольшим. Для любой точки Q_1 из этой окрестности, не совпадающей с Q_0, должно выполняться строгое неравенство $f|_{Q_0} > f|_{Q_1}$.

Говорят, что функция f достигает *локального минимума* в точке Q_0, если существует такая e – окрестность точки Q_0, для всех точек которой, значение функции в точке Q_0 будет наименьшим. Для любой точки Q_1 из этой окрестности, не совпадающей с Q_0, должно выполняться строгое неравенство $f|_{Q_0} < f|_{Q_1}$.

Если функция достигает максимума или минимума в точке Q_0, то точка Q_0 называется *точкой экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция f достигает локального экстремума в точке Q_0, то частная производная 1-го

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

порядка функции f в точке Q_0 по любому переменному равна нулю или не существует.

Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Пусть частная производная 1-го порядка функции f в точке $Q_0(x_0, y_0)$ по любому переменному равна нулю. Введём обозначения: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) Если $\Delta > 0$ и $A < 0$ (или $\Delta > 0$ и $B < 0$), то функция имеет в точке $Q_0(x_0, y_0)$ локальный максимум.
2) Если $\Delta > 0$ и $A > 0$ (или $\Delta > 0$ и $B > 0$), то функция имеет в точке $Q_0(x_0, y_0)$ локальный минимум.
3) Если $\Delta < 0$, то экстремум в точке $Q_0(x_0, y_0)$ отсутствует.
4) Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

9.1 Пользуясь определением локальных максимума и минимума функции в точке, исследовать на экстремум следующие функции:

1) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2) $z = |x| + |y|$.
3) $z = |x + y|$.
4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
5) $z = \dfrac{1}{|x| + |y| + 1}$.
6) $z = |x| - |y|$.

9.2 Пользуясь достаточным условием экстремума функции двух переменных, исследовать на экстремум:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2) $z = xy^2(1 - x - y)\ (x > 0, y > 0)$.
3) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$, $(x > 0,\ y > 0)$.
4) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}\ \ (x > 0, y > 0)$.
5) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
6) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
7) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
8) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

§10 Условный экстремум функций двух переменных

Пусть требуется найти условный экстремум функции $z = f(x,y)$, при условии, что x и y удовлетворяют уравнению связи $j(x,y)=0$. *Функция Лагранжа* в этом случае имеет вид:

$$L(x,y,l) = f(x,y) + l\,j(x,y).$$

Точка условного экстремума находится при этом из условий:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=0,\ j(x,y)=0.$$

Точка условного экстремума является точкой максимума, если вычисленный в этой точке определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & j'_x & j'_y \\ j'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ j'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

удовлетворяет условию $\Delta < 0$.

Если $\Delta > 0$, то точка условного экстремума является точкой минимума.

10.1 Найти условные экстремумы следующих функций:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

3) $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

4) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

5) $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

6) $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

7) $z = xy^3$

8) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

при $x+2y=12$ $(x>0,\ y>0)$.

8) $z=x-y^3$ при $x+2y=0$.

9) $z=x+2y$ при $x^2-y^2=5$.

§11 Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция дифференцируема в ограниченной области и непрерывна на границе этой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в точке экстремума, или на границе области.

11.1 Найти наибольшее значение функции z в области Ω:

1) $z=x^2+y^2-xy-x-y$, $\Omega=\{x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 3\}$.

2) $z=xy$, $\Omega=\{x^2+y^2\le 1\}$.

3) $z=xy^2$, $\Omega=\{x^2+y^2\le 1\}$.

4) $z=\sin x+\sin y$, $\Omega=\{0\le x\le p/2,\ 0\le y\le p/2\}$

5) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $\Omega=\{0\le x\le p/2,\ 0\le y\le p/2\}$

6) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $\Omega=\{0\le x\le p/2,\ 0\le y\le p/2\}$

11.2 Представить положительное число a в виде произведения четырёх положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

11.3 Внутри четырёхугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

11.4 В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

11.5 Из всех треугольников с основанием b и углом a при вершине найти треугольник с наибольшей площадью.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

11.6 Около данного квадрата описать квадрат наибольшей площади.

11.7 Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна m, найти наибольший по площади.

11.8 В круг вписать треугольник, сумма квадратов сторон которого наибольшая.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com