МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

Кафедра высшей математики

Т.С. Филиппова А.Н.Филиппов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к изучению темы

«Кратные и криволинейные интегралы»

(для студентов всех специальностей)

Москва 2011

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение, геометрический смысл и свойства двойного интеграла.

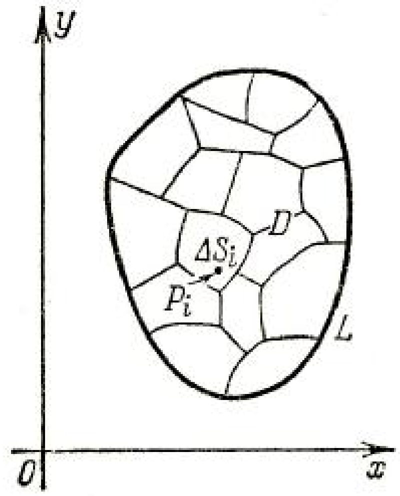


рис. 1

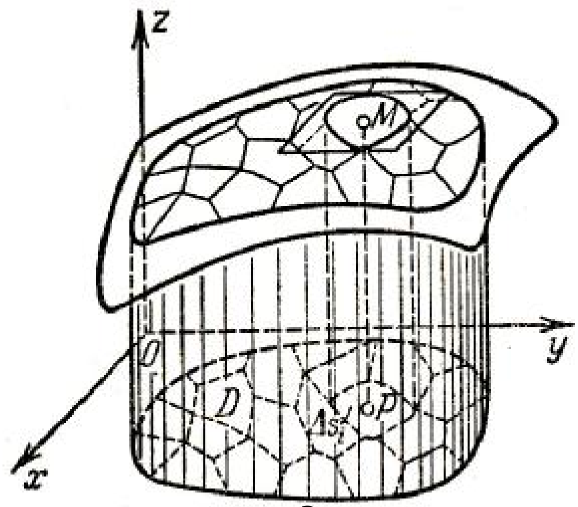


рис.2

Рассмотрим в плоскости Оху замкнутую область D, ограниченную непрерывной кривой L (рис. 1). Пусть в D задана непрерывная функция двух переменных z=f(x,y). Т.к. координаты (x,y) определяют некоторую точку P в области D, то функцию z=f(x,y) можно считать заданной в точках $P \in D$, т.е. z=f(P). Разобьём область D на n элементарных площадок: ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3, ..., ΔS_n. В каждой из площадок выберем точку P_i, тогда значение функции в каждой такой точке будет равно $f(P_i)$. Составим интегральную сумму для функции f(x,y) в области D:

$$V_n=f(P_1)\Delta S_1+f(P_2)\Delta S_2+...+f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad (*)$$

Если $f(P) \geq 0$ в области D, то каждое слагаемое $f(P_i)\Delta S_i$ представляет собой объём малого цилиндра, основание которого есть ΔS_i, а высота $f(P_i)$. Сумма V_n есть сумма объёмов элементарных цилиндров (рис.2). Предположим, что при $n\to\infty$ максимальный диаметр площадок ΔS_i стремится к 0.

Теорема1. Если функция f(x,y) непрерывна в замкнутой области D, то существует предел последовательности интегральных сумм (*), если максимальный диаметр площадок ΔS_i стремится к нулю при $n\to\infty$. Этот предел, не зависящий ни от способа разбиения области D на площадки ΔS_i, ни от выбора точек P_i внутри площадок ΔS_i, называется двойным интегралом от функции f(x,y) по области D и обозначается $\iint\limits_D f(P)\,dS$ или $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Т.о. можно записать, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Область D - называется областью интегрирования, а $dS = dxdy$ - дифференциалом площади в декартовой прямоугольной системе координат.

<u>**Геометрический смысл двойного интеграла.**</u> Если f(x,y) ≥0, то двойной интеграл от функции f(x,y) по области D равен объёму тела, ограниченного поверхностью z = f(x,y), плоскостью z=0 и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D (рис 3).

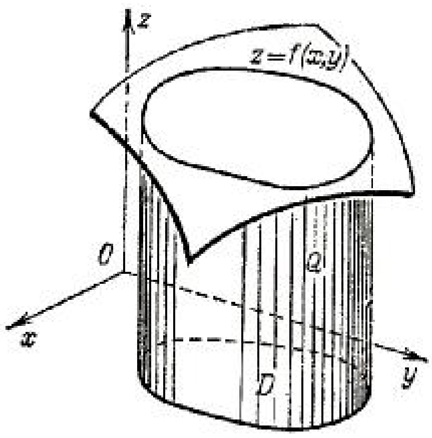


рис.3

<u>**Свойства двойного интеграла.**</u>

1. Двойной интеграл от суммы двух непрерывных функций f_1(x,y) и f_2(x,y) по области D равен сумме двух двойных интегралов по области D от каждой из этих функций в отдельности:

$$\iint\limits_D (f_1(x,y) + f_2(x,y)dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е., если λ=const, то

$$\iint\limits_D l\, f(x,y)dxdy = l\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

3. Если область D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то двойной интеграл по области D равен сумме интегралов по D_1 и D_2

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy .$$

1.2. Повторный интеграл и его вычисление.

Введем понятие правильной области в направлении оси Оу. Пусть в плоскости Оху задана замкнутая область D,ограниченная линиями y=φ(x), y=ψ(x), x=*a*, x=*b*, причём φ(x)≤ψ(x), *a*≤*b*, а функции φ(x), ψ(x) непрерывны на отрезке *(a,b*), и любая прямая, проведённая через область D параллельно оси Оу, пересекает границу области в двух точках (рис. 4). Такая область D называется правильной в направлении оси Оу. Аналогично область D будет правильной в направлении оси Ох, если она ограничена линиями x=h(y), x=g(y), y=*c*, y=*d*, причём h(y)≤g(y), а функции h(y), g(y) непрерывны на отрезке *(c,d)*, и любая прямая, проведённая через область D, параллельно оси ОХ, пересекает границу области в двух точках (рис.5).

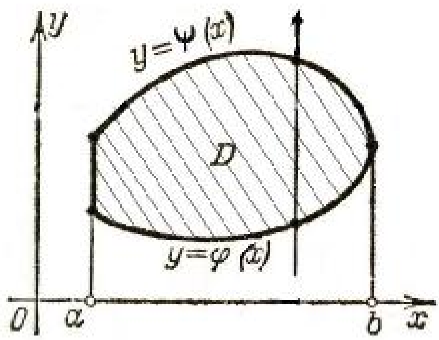


рис.4

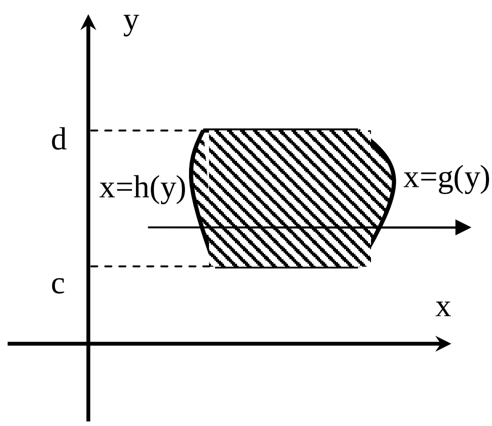


рис.5

Определение. Если функция f(x,y) непрерывна в правильной в направлении оси Оу области D (рис. 4), то выражение $I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ называется двукратным (повторным) интегралом от функции f(x,y) по области D.

Отметим, что сначала вычисляется внутренний интеграл, причём интегрирование производится по переменной y, а x считается постоянной. В результате получим непрерывную функцию от x: $F(x)=\int\limits_{j(x)}^{y(x)} f(x,y)dy$. Далее вычисляется внешний интеграл $I=\int\limits_a^b F(x)dx$.

Пример 1. Вычислить двукратный интеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}(x+y)dy$.

1. Вычислим сначала внутренний интеграл

$$F(x)=\int\limits_0^{x^2}(x+y)dy=(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{x^2}=x^3+\frac{x^4}{2}.$$

2. Вычислим теперь внешний интеграл

$$I=\int\limits_0^1(x^3+\frac{x^4}{2})dx=(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5})\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}.$$

Аналогично вводится понятие повторного интеграла по правильной в направлении оси Ox области D: $I=\int\limits_c^d dx\int\limits_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dy$ (рис. 5).

1.3. Вычисление двойного интеграла путем сведения его к повторному.

1. Изображаем область D в координатной плоскости Oxy.
2. Определяем в направлении какой оси область D является правильной.
3. От двойного интеграла переходим к повторному интегралу, расставляя пределы интегрирования.
4. Вычисляем повторный интеграл.

Если область D правильная в направлении оси Oy, то двойной интеграл перейдёт в повторный интеграл следующего вида:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y(x)}^{j(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.1)$$

Для того чтобы правильно расставить пределы интегрирования во внутреннем интеграле, проведём через область D прямую параллельную оси Oy. Нижняя граница, которую пересечёт прямая, будет нижним пределом интегрирования y=φ(x), а верхняя граница области D, из которой выйдет прямая, будет верхним пределом интегрирования y=ψ(x). Пределы интегрирования во внутреннем интеграле – это линии, заданные функциями, зависящими от x. Пределы интегрирования во внешнем интеграле находятся как пределы изменения границы области D вдоль оси Ox. Пределами интегрирования во внешнем интеграле являются числа.

Если область D правильная в направлении оси OX, то двойной интеграл перейдёт в повторный интеграл такого вида:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dy \tag{1.2}$$

Для того чтобы правильно расставить пределы интегрирования во внутреннем интеграле, проведём прямую через область D параллельно оси Ox. Нижняя граница, которую пересечёт прямая, будет нижним пределом интегрирования x=h(y), а верхняя граница области D, из которой выйдет прямая будет верхним пределом интегрирования x=g(y). Пределы интегрирования во внутреннем интеграле это - линии, заданные функциями, зависящими от y. Пределы интегрирования во внешнем интеграле находятся как пределы изменения границы области D вдоль оси Oy. Пределами интегрирования во внешнем интеграле являются числа.

Примечание. Если область D не является правильной ни в каком направлении, то её надо разбить на правильные области. Тогда исходный двойной интеграл будет суммой двойных интегралов по этим правильным областям. Если область D является правильной в направлении обеих осей (тогда она называется просто правильной областью), то первым выбирается то направление интегрирования, которое позволяет избежать разбиения интеграла на два или более повторных.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции f(x,y)=1+x+y по области D, ограниченной линиями: y=-x, $x=\sqrt{y}$, y=2.

Имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D (1+x+y)dxdy.$$

Решение. Нарисуем область D (рис.6).

Область D является правильной. Однако удобнее сначала интегрировать по переменной x. считая область правильной в направлении оси OX. Проведём прямую через область D, параллельно оси OX, левая граница области D, которую пересечёт прямая: x=-y, а правая граница $x = \sqrt{y}$. Область D вдоль оси ОУ будет меняться от 0 до 2. От двойного интеграла перейдём к повторному:

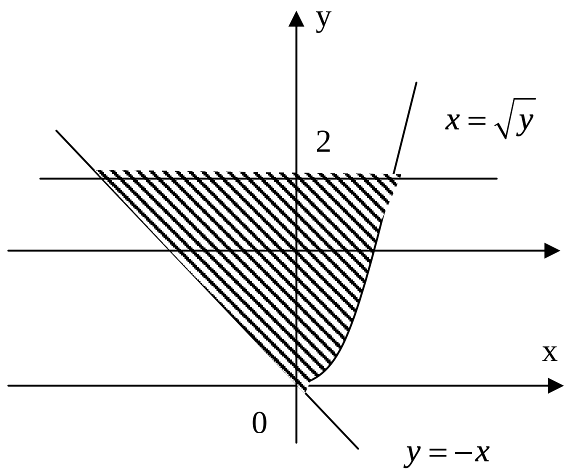


рис.6

$$\int_0^2 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)dx = \int_0^2 (x + \frac{x^2}{2} + yx)\Big|_{-y}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^2 [(y^{\frac{1}{2}} + \frac{y}{2} + y^{\frac{3}{2}}) - (-y + \frac{y^2}{2} - y^2)]dy =$$

$$= \int_0^2 (y^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}y + y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2})dy = (\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{y^3}{6})\Big|_0^2 = \frac{44\sqrt{2}}{15} + \frac{13}{3}.$$

Отметим, что если бы мы, считая область правильной в направлении оси Oy, сначала интегрировали по переменной y, то область D пришлось бы разбить прямой x=0 на две подобласти, т.к. нижняя граница области D представляет собой кусочно-гладкую кривую, состыкованную из двух различных линий: y=-x и y=x^2.

Пример 3. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$, если область D ограничена прямыми линиями x=0, x=1, y=0 и y=3/2.

Решение. Поскольку правильная область D представляет собой прямоугольник, то интегрирование в повторном интеграле можно проводить в любой очередности.

$$I=\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{3}{2}}dy\int_0^1(4-x^2-y^2)dx=\int_0^{\frac{3}{2}}(4x-\frac{x^3}{3}-y^2x)\Big|_0^1dy=$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}(4-\frac{1}{3}-y^2)dy=(4y-\frac{y}{3}-\frac{y^3}{3})\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{35}{8},$$

или $I=\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{3}{2}}(4-x^2-y^2)dy=\int_0^1(4y-yx^2-\frac{y^3}{3})\Big|_0^{\frac{3}{2}}dx=$

$$=\int_0^1(6-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{8})dx=(6y-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{8}x)\Big|_0^1=\frac{35}{8}.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x-y+1)dxdy$, где область D ограничена прямыми линиями y=x, y=2x, x=0 и x=1.

Решение. Сделаем рисунок области D (рис.7), Область D – является правильной, но предпочтительнее (почему?) интегрирование сначала проводить в направлении оси ОУ, поэтому $\iint_D (x-y+1)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{2x}(x-y+1)dy$.

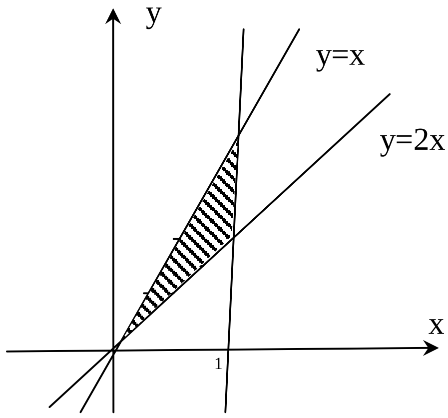


рис.7

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_x^{2x}(x-y+1)dy=(xy-\frac{y^2}{2}+y)\Big|_x^{2x}=x-\frac{x^2}{2}.$$

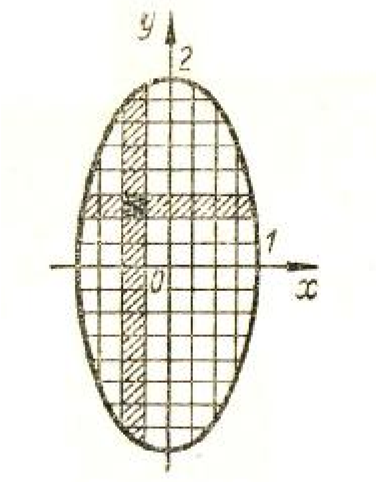
Вычислим внешний интеграл:

$$\int_0^1(x-\frac{x^2}{2})dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xydxdy$, где область D задается неравенством $4x^2+y^2\le 4$.

Решение. Построим область D, расположенную внутри эллипса (рис.8). Сначала будем интегрировать, например, по переменной x и найдём пределы для внутреннего интеграла: $x=-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$ и $x=\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$. Пределы для внешнего интеграла найдём как ординаты самой нижней и самой верхней точек области D:

y=-2 и y=2. Перейдём теперь от двойного интеграла к повторному: $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{2}^{-2} ydy \int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} xdx = \int\limits_{-2}^{2} ydy \cdot 0 = 0$. Процедура вычисления двойного интеграла мало изменится, если интегрирование вначале проводить по переменной y, а потом по x (почему?).



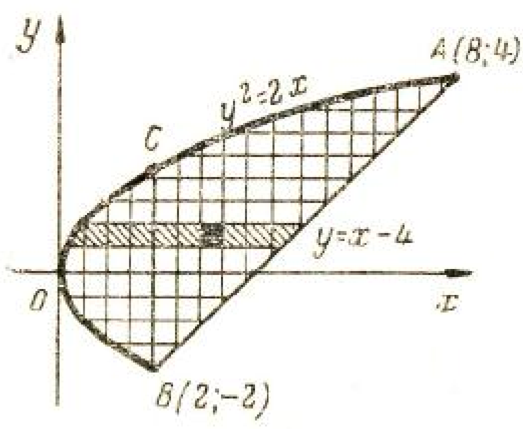


рис.8 рис.9

<u>Пример 6.</u> Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где область D, ограничена прямой $y = x - 4$ и параболой $y^2 = 2x$.

<u>Решение.</u> Построим область D (рис.9), которая является правильной в направлении обеих осей, но интегрирование рационально проводить сначала в направлении оси OX (почему?). От двойного интеграла переходим к повторному:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{-2}^{4} ydy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx = \int\limits_{-2}^{4} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4} y[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}]dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4} y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4})dy =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24})\Big|_{-2}^{4} = 90.$$

<u>1.4. Изменение порядка интегрирования в повторном интеграле.</u>

Переход от одного вида повторного интеграла (1.1) к другому (1.2) и, наоборот, называется изменением порядка интегрирования в интеграле:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx .$$

<u>Пример 7.</u> Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.

<u>Решение</u>. Вначале по пределам интегрирования определяем область интегрирования. Полагая x равным пределам интеграла по переменной x, а *y* равным пределам интеграла по переменой y, получим уравнения линий, ограничивающих эту область: x=-2, x=2, $y=x^2$ и y=4 (рис.10). Область интегрирования является правильной и в направлении оси Ох, и в направлении оси Оу. Проведём прямую через область интегрирования параллельно оси x, левая граница области $x=-\sqrt{y}$, которую пересекает прямая, будет нижним пределом интегрирования для внутреннего интеграла, а правая граница области $x=\sqrt{y}$, будет верхним пределом интегрирования для внутреннего интеграла. Пределы для внешнего интеграла находим как наименьшее и наибольшее значение y по всей области интегрирования: y=0 и y=4. Следовательно, имеем $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

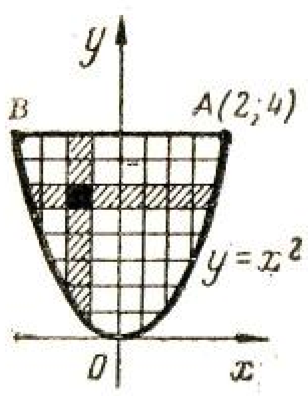


рис.10

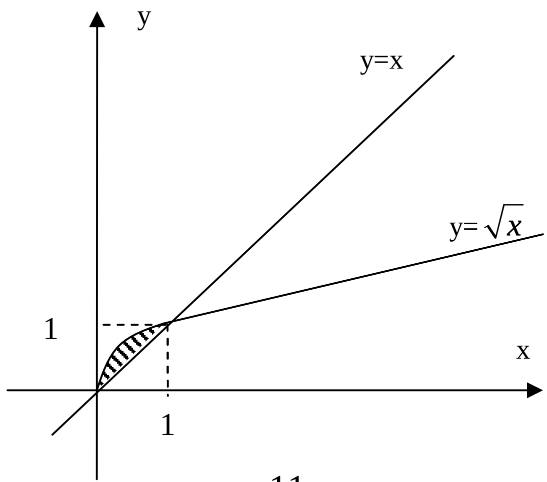


рис.11

<u>Пример 8.</u> Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

Решение. Область интегрирования ограничена прямой y=x и параболой $y=\sqrt{x}$ (рис.11). Область интегрирования будет правильной как в направлении оси Ох, так и в направлении оси Оу. В исходном интеграле область интегрирования рассматривается как правильная в направлении оси Оу. Для того, чтобы изменить порядок интегрирования в исходном интеграле, надо рассматривать область интегрирования как правильную в направлении оси Ох. Проведём прямую через область интегрирования параллельно оси Ох. Левая граница области, которую пересечёт прямая, будет $x=y^2$, а правая граница x=y. Область интегрирования вдоль оси Оу будет меняться от 0 до 1. Тогда $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{y2}^{y} f(x,y)dx$.

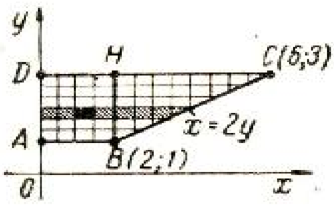


рис.12

Пример 9. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_1^3 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx$.

Решение. Область интегрирования ограничена прямыми y=1, y=3, x=0, x=2y (рис.12). Она представляет собой трапецию ABCD. При интегрировании в другом порядке, вначале по y, необходимо разбить область ABCD прямой BH, параллельной оси Оу, на две части, так как нижняя линия границы этой области состоит из двух частей AB и BC, которые имеют различные уравнения y=1 и y=x/2. Вследствие этого исходный интеграл при изменении порядка интегрирования будет равен сумме двух интегралов:

$$\int_1^3 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_1^3 f(x,y)dy+\int_2^6 dx\int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy.$$

1.5. Двойной интеграл в полярных координатах.

Пусть в полярной системе координат (φ, ρ) задана область D, которая ограничена кривыми: $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, и лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$. Область D будет правильной в полярной системе координат, если любой луч, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает границу области D не более чем в двух точках (рис.13).

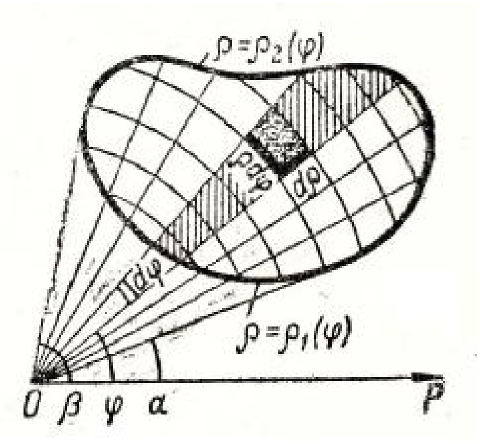


рис.13

Двойной интеграл в полярной системе координат имеет вид: $\iint\limits_D F(r,j)drdj$.

<u>Вычисление двойного интеграла в полярных координатах</u>.

1. Нарисуем область D.

2. От двойного интеграла переходим к повторному, расставляя пределы интегрирования:

а) определяем в каких пределах по углу φ ограничена область D: α≤φ≤β. Это будут пределы для внешнего интеграла;

б) проводим луч из полюса О через область D: нижняя граница области, которую пересечёт этот луч будет нижним пределом интегрирования для внутреннего интеграла, а верхняя граница области из которой выйдет луч – верхним пределом интегрирования для внутреннего интеграла. Поэтому

$$\iint\limits_D \mathrm{F}(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_a^b dj \int\limits_{r_1(q)}^{r_2(q)} F(j,r)dr$$

<u>Пример 10.</u> Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D r\sin j\,drdj$, если область D:

1) круговой сектор, ограниченный линиями ρ=*a*, φ=π/2 и φ=π;

2) полукруг ρ≤2acosφ, 0≤φ≤π/2;

3) заключена между линиями ρ=2+cos φ и ρ=1.

<u>Решение.</u>

1) Построив окружность ρ=*a* и лучи, образующие с полярной осью углы φ=π/2 и φ=π, получим круговой сектор ОАВ с центром в полюсе О (рис.14). От двойного интеграла перейдем к повторному:

$$\iint\limits_D r\sin j\,drdj = \int\limits_{\frac{p}{2}}^{p} \sin j\,dj \int\limits_0^a rdr = \int\limits_{\frac{p}{2}}^{p} (\frac{r^2}{2})\Big|_0^a \sin j\,dj = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\frac{p}{2}}^{p} \sin j\,dj = \frac{a^2}{2}.$$

2) Построим область D (рис.15), от двойного интеграла перейдём к повторному:

$$\iint_D \rho\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^{2a\cos\varphi} \sin\varphi\, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^2 d(\cos\varphi) = -\frac{2}{3}a^2\cos^3\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}a^2$$

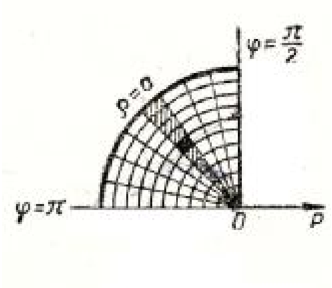


рис.14

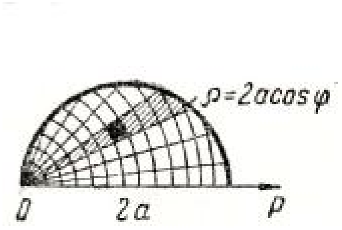


рис.15

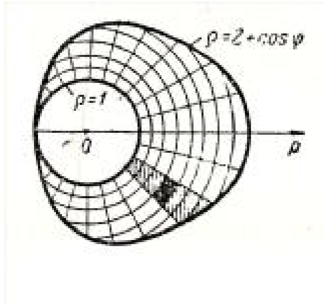


рис.16

3) Построим область D (рис.16), от двойного интеграла перейдём к повторному:

$$\iint_D \rho\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_1^{2+\cos\varphi} \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_1^{2+\cos\varphi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(2+\cos\varphi)^2 - 1\right]\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} (3 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d(\cos\varphi) = \frac{1}{2}\left(3\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_{2\pi}^{0} = 0.$$

1.6. Переход от декартовой прямоугольной системы координат к полярной системе координат.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл от функции f(x,y) по области D, заданной в прямоугольной системе координат: $\iint_D f(x,y)dxdy$.

Если область D является правильной в полярных координатах (φ,ρ), то вычисление данного интеграла можно свести к вычислению двукратного интеграла в полярных координатах, используя замену: x= ρcosφ, y= ρsinφ, dxdy= ρdρdφ:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\ .$$

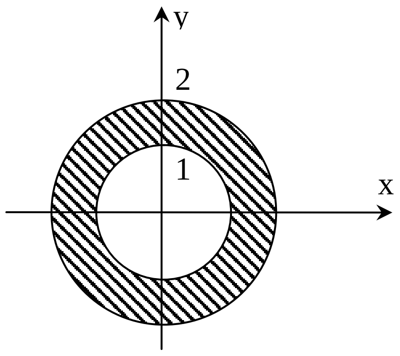


рис.17

Пример 11. Переходя в полярную систему координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область D – круговое кольцо, заключённое между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (рис.17).

Решение. Используя замену x= ρcosφ, y= ρsinφ, dxdy= ρdρdφ, где 0≤φ≤2π, 1≤ρ≤2, получим

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_D \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}} = \iint\limits_D d\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 d\rho = 2\pi$$

Пример 12. Переходя в полярную систему координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy^2dxdy$, где область D ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y$.

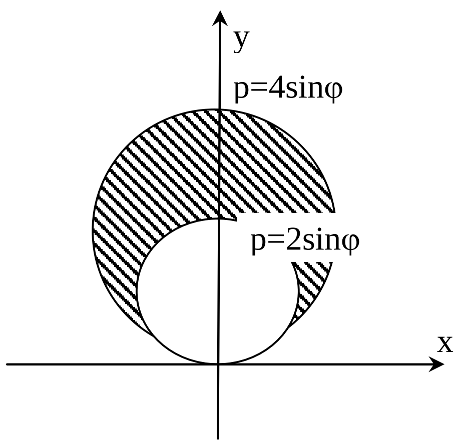


рис.18

Решение. Приведём уравнение окружности $x^2+y^2=4y$ к каноническому виду $x^2+(y-2)^2=4$ и в координатной плоскости сделаем рисунок области D (рис.18). Сделаем замену x=ρcosφ, y=ρsinφ, dxdy=ρdρdφ, получим уравнения окружностей в полярной системе координат $\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi-1)^2=1$ и $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\sin\varphi$. Сделав нужные преобразования, получим $\rho=2\sin\varphi$ и $\rho=4\sin\varphi$, 0≤φ≤π. Тогда $\iint\limits_D xy^2dxdy = \iint\limits_D \rho^4\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho^4 d\rho$.

1. Найдем внутренний интеграл: $\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho^4 d\rho = (\frac{\rho^5}{5})\Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} = \frac{992}{5}\sin^5\varphi$

2. Найдем внешний интеграл:

$$\frac{992}{5}\int\limits_0^{\pi}\sin^7\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{992}{5}\int\limits_0^{\pi}\sin^7\varphi\, d(\sin\varphi) = \frac{992}{40}\sin^8\varphi\Big|_0^{\pi} = 0.$$

1.7. Вычисление площади с помощью двойного интеграла.

Площадь S плоской области D равна двойному интегралу от дифференциала dS по области D.

В прямоугольной системе координат: $S=\iint\limits_D dxdy$.

В полярных координатах: $S=\iint\limits_D r\,d j\,d r$.

Пример 13. Найти площадь области, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=2^{-2x}$, y=4.

Решение. Сделаем рисунок 19, область D – это криволинейный треугольник ABC. Область D является правильной как в направлении оси Ох, так и в направлении оси Оу. Однако проще сначала вести интегрирование по x. Поэтому

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^4 dy\int\limits_{-\frac{\ln y}{2\ln 2}}^{\frac{\ln y}{\ln 2}}dx=\int\limits_1^4\left(\frac{\ln y}{\ln 2}+\frac{\ln y}{2\ln 2}\right)dy=\frac{3}{2\ln 2}\int\limits_1^4 \ln y dy=\frac{3}{2\ln 2}(y\ln y-y)\Big|_1^4=\frac{3}{2\ln 2}(4\ln 4-3).$$

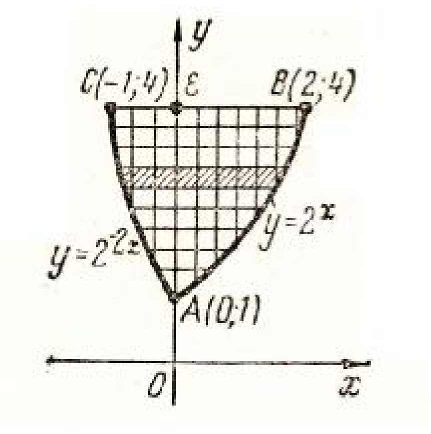


рис.19

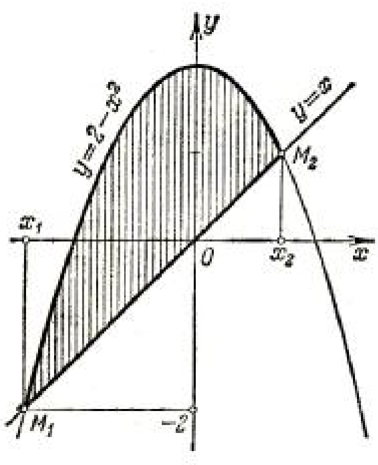


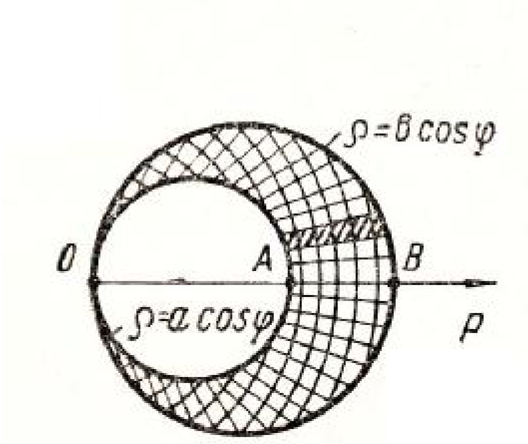
рис.20

Пример14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2-x^2$ и y=x.

Решение. Определим точки пересечения указанных кривых (рис.20). В точке пересечения ординаты равны, т.е., $x=2-x^2$, откуда $x^2+x-2=0$ и $x_1=-2$, $x_2=1$. Получили две точки пересечения $M_1(-2,-2)$ и $M_2(1,1)$. Используем то, что область D – правильная в направлении Оу. Тогда

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} dy = \int\limits_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Пример 15. Найти площадь области, ограниченной окружностями $r = a\cos j$, $r = b\cos j$, $b \ge a \ge 0$.



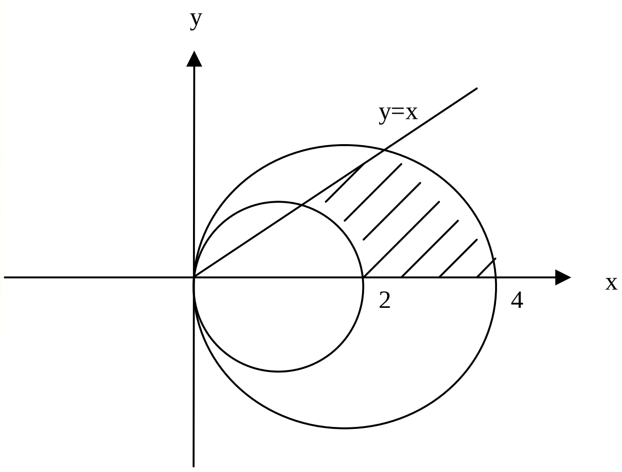


рис.21 рис.22

Решение. Построим заданные окружности в полярной системе координат (рис.21). Тогда $S = \iint\limits_D r\,dj\,dr = 2\iint\limits_{ABC} r\,dj\,dr = 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}} dj \int\limits_{a\cos j}^{b\cos j} r\,dr = (b^2 + a^2)\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 j\,dj =$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{p}{2}} (1 + \cos 2j)dj = \frac{b^2 - a^2}{2}(j + \frac{1}{2}\sin 2j)\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{4}(b^2 - a^2).$$

Пример 16. Переходя к полярным координатам, найти площадь, ограниченную линиями $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ y = x,\ y = 0.$

Решение. Уравнения окружностей приведём к каноническому виду $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ (x-2)^2 + y^2 = 4$ и сделаем рисунок 22. Переходя к полярной системе координат, сделаем замену $x = r\cos j$, $y = r\sin j$, $dxdy = r\,d\,r\,d\,j$ и получим уравнения границ: $r = 2cos j$, $r = 4\cos j$, $\sin j = \cos j$, $\sin j = 0$, откуда следует, что $j = \frac{p}{4}$ и $j = 0$. Таким образом, $\iint\limits_D dydx =$

$$= \int\limits_0^{\frac{p}{4}} dj \int\limits_{2\cos j}^{4\cos j} r\,d\,r = \int\limits_0^{\frac{p}{4}} (r^2)\Big|_{2\cos j}^{4\cos j} dj = \int\limits_0^{\frac{p}{4}} 12\cos^2 j\,dj = 6\int\limits_0^{\frac{p}{4}} (1 + \cos 2j)dj = 6(j + \frac{1}{2}\sin 2j)\Big|_0^{\frac{p}{4}} = 6(\frac{p}{4} + \frac{1}{2}).$$

1.8. Вычисление объёма тела с помощью двойного интеграла.

Объём вертикального цилиндрического тела, имеющего своим основанием область D на плоскости xOy и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (рис.23), выражается двойным интегралом $V = \iint\limits_D zdxdy$. Вычисление объёмов тел более сложной формы сводится к вычислению алгебраической суммы объёмов нескольких вертикальных цилиндрических тел с образующими, параллельными оси Oz.

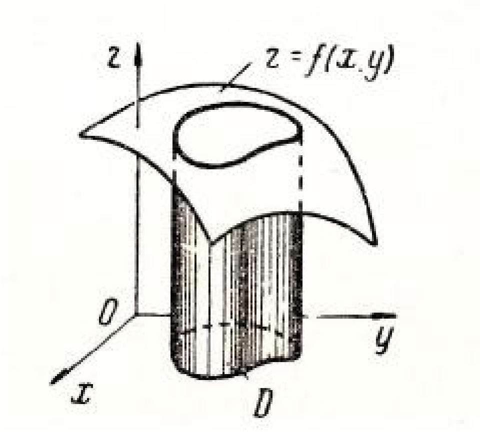


рис.23

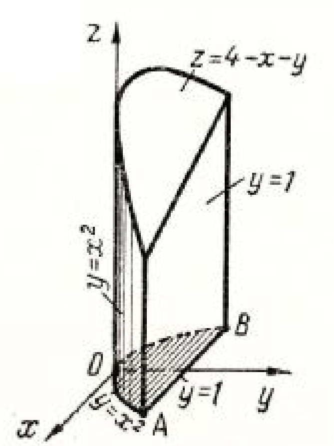


рис.24

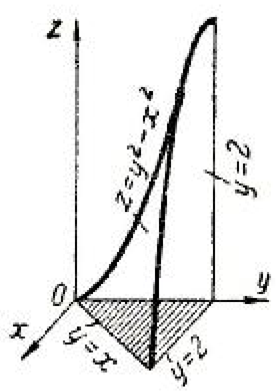


рис.25

Пример 17. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $y = x^2,\ y = 1,\ x + y + z = 4$ и z=0.

Решение. Данное тело (рис.24) представляет вертикальный цилиндр, который ограничен сверху частью плоскости z=4-x-y, а снизу – частью плоскости, заключённой между параболой $y = x^2$ и прямой y=1. Следовательно,

$$V = \iint\limits_{OAB} zdxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (4 - x - y)dy = \int_{-1}^{1} (4y - xy - y^2)\Big|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} (4 - x - 1 - (4x^2 - x^3 - x^4))dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (3 - x - 4x^2 + x^3 + x^4)dx = (3x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5})\Big|_{-1}^{1} = \frac{68}{15}.$$

Пример 18. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = y^2 - x^2,\ z = 0,\ y = \pm 2.$

Решение. Гиперболический параболоид $z = y^2 - x^2$ пересекает координатную плоскость xOy (z=0) по двум прямым $y = \pm 2$. Он ограничивает тело, симметричное относительно плоскостей xOz и yOz, поэтому объём четвертой части тела, расположенной в первом октанте (рис. 25), равен

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_{OAB} zdxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y (y^2 - x^2)dx = \int (y^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{x=0}^{x=y} dy = \frac{2}{3}\int\limits_0^2 y^3 dy = (\frac{2}{3}\cdot\frac{y^4}{4})\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$ Тогда $V=\frac{32}{3}$.

1.9.Вычисление массы, центра тяжести и моментов инерции плоской фигуры с помощью двойного интеграла.

Если ρ(M) есть поверхностная плотность в точке M(x,y) плоской фигуры (материальной пластинки), занимающей область D, то её масса m, координаты центра тяжести C – (x_c, y_c) и моменты инерции относительно осей Ox и Oy – $I_{x,} I_y$, и начала координат O – I_o (полярный момент инерции), выражаются формулами:

1) $m = \iint\limits_D r(M)dxdy$.

2) $x_c = \dfrac{m_y}{m} = \dfrac{\iint\limits_D xr(M)dxdy}{m}$, $\quad y_c = \dfrac{m_x}{m} = \dfrac{\iint\limits_D yr(M)dxdy}{m}$,

где m_x, m_y - статистически моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

3) $I_x = \iint\limits_D y^2 r(M)dxdy$, $I_y = \iint\limits_D x^2 r(M)dxdy$, $I_o = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$.

Пример 19. Найти массу кругового кольца $r_1 \le r \le r_2$, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра кольца, т.е. ρ(M)=$\frac{k}{r^2}$.

Решение. $m = \iint\limits_D \frac{k}{r^2} r dj dr = k\int\limits_0^{2p} dj \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = k\int\limits_0^{2p} \ln r\Big|_{r_1}^{r_2} dj = k\ln\frac{r_2}{r_1}\int\limits_0^{2p} dj = 2kp \ln\frac{r_2}{r_1}$.

Пример 19. Найти центр тяжести треугольника, ограниченного прямыми y=*a*+x и y=*a*-x, y=0. Поверхностная плотность $r = y$. (рис.26).

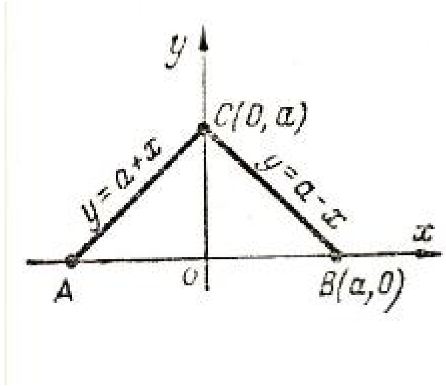


рис.26

Решение.

$$m_x = \iint\limits_{ABC} y^2 dxdy = \int\limits_0^a y^2 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2\int\limits_0^a y^2 (a-y)dy = 2(a\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4})\Big|_0^a = \frac{a^4}{6},$$

$$m_y = \iint\limits_{ABC} xydxdy = \int\limits_0^a ydy \int\limits_{y-a}^{a-y} xdx = \int\limits_0^a ydy \cdot 0 = 0,$$

$$m = \iint\limits_{ABC} ydxdy = \int\limits_0^a ydy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2\int\limits_0^a y(a-y)dy = \left(ay^2 - \frac{2}{3}y^3 \right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

Следовательно, $x_c = \frac{m_y}{m} = 0, y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{a}{2}$. Центр тяжести размещается в точке M$(0, \frac{a}{2})$. Отметим, что равенство $x_c = 0$ очевидно в силу симметрии.

Пример 20. Найти моменты инерции треугольника, данного в условиях предыдущей задачи.

Решение. $I_x = \iint\limits_{ABC} y^3 dxdy = \int\limits_0^a y^3 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2\int\limits_0^a y^3 (a-y)dy = \frac{a^5}{10},$

$$I_y = \iint\limits_{ABC} yx^2 dxdy = \int\limits_0^a ydy \int\limits_{y-a}^{a-y} x^2 dx = \int\limits_0^a y((a-y)^3 - (y-a)^3)dy = 2\int\limits_0^a (ya^3 - 3a^2y^2 + 3ay^3 - y^4)dy =$$

$$= 2(\frac{a^3y^2}{2} - a^2y^3 + \frac{3ay^4}{4} - \frac{y^5}{5})\Big|_0^a = \frac{a^5}{10}.$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{a^5}{5}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Вычислить следующие повторные интегралы:

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (x^2 + 2xy)dy$. 2. $\int\limits_2^0 dy \int\limits_0^{y^2} (x + 2y)dx$. 3. $\int\limits_0^5 dy \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}dy$.

4. $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2}^{5} (x+2y)dx$. 5. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$. 6. $\int\limits_{0}^{2p} dj \int\limits_{a\sin j}^{a} rdr$.

2. Вычислить двойные интегралы:

8. $\iint\limits_{D} x^2 ydxdy, D: y=0, y=\sqrt{2ax-x^2}$. 9. $\iint\limits_{D} \sin(x+y)dxdy : D: y=0, x=y, x+y=\frac{p}{2}$.

10. $\iint\limits_{D} x^2(y-x)dxdy, D: x=y^2, y=x^2$. 11. $\iint\limits_{D} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy, D: y^2+x^2=1, x\geq 0, y\geq 0$.

12. $\iint\limits_{D} xydxdy, D: y=x^2, y=x+9$. 13. $\iint\limits_{D} (x+2)dxdy, D: y=x, y=10-x, y=0, y=4$.

3. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

14. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$. 15. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$. 16. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

17. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy$. 18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$. 19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.

4. Переходя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

20. $\iint\limits_{S} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy, S: x^2+y^2=1$.

21. $\iint\limits_{S} ydxdy, S: (x-\frac{1}{2})^2+y^2=1, y\geq 0$.

22. $\iint\limits_{S} (x^2+y^2)dxdy, S: x^2+y^2=2x$.

23. $\iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy, S: x^2+y^2=a^2$.

24. $\int\limits_{o}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$.

5. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями, с помощью двойного интеграла:

25. $y^2=10x+25, y^2=-6x+9$.

26. $xy=4, x+y=5$.

27. $y=e^x, y=e^{2x}, x=1$.

28. $3x^2=25y, 5y^2=9x$.

29. $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x, y=x, y=0$ (перейти в полярную систему координат).

30. $x^2+y^2=4x, x^2+y^2=8x, y=x, y=x\sqrt{3}$ (перейти в полярную систему координат).

6. Вычислить объём тел с помощью двойного интеграла:

31. $z=x^2-y^2, y=0, z=0, x=1.$

32. $x^2+z^2=a^2, y=0, z=0, y=x.$

33. $az=y^2, x^2+y^2=r^2, z=0.$

34. $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, x+z=6, z=0$.

35. $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0.$

36. $x+y+z=a, 3x+y=a, \frac{3}{2}x+y=a, y=0, z=0$.

7. Вычислить массу, центр тяжести и моменты инерции с помощью двойного интеграла:

37. $r=xy, D: y=x, y=0, x=5$.

38. $r=a, D: x=0, x=a, y=b, y=0$.

39. $r=x, D: y=2x, y=-2x+5, x=0$.

40. $r=a, D: x^2+y^2=r^2$.

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1.Определение тройного интеграла.

Пусть в пространстве задана некоторая трехмерная область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Пусть в области V и на её границе определена некоторая непрерывная функция трех переменных $f(x,y,z)$, где x,y,z – прямоугольные координаты любой точки P этой области. Если $f(x,y,z)$>0, то можем считать эту функцию плотностью распределения некоторого вещества в выбранной области V. Разобьём область V произвольным образом на элементарные области ΔV_i, в границах ΔV_i выберем точку P_i и обозначим через $f(P_i)$ значение функции $f(x,y,z)$ в этой точке. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i \qquad (2.1)$$

При неограниченном увеличении числа *n* малых областей ΔV_i, их наибольший линейный размер будет стремиться к нулю. Тогда будет существовать предел интегральной суммы (2.1) при $n\to\infty$, не зависящий ни от способа разбиения области V, ни от выбора точек P_i. Этот предел называется тройным интегралом и обозначается символом $\iiint\limits_V f(P)dV$. Таким образом по определению имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(P)dV$. Или

$$\iiint_V f(P)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \tag{2.2}$$

Если $f(x,y,z)$ считать объёмной плотностью распределения вещества в области V, то интеграл (2.2) даст массу всего вещества, заключённого в объёме V. Область V называется областью интегрирования, а $dV = dxdydz$ – дифференциалом объема в декартовой прямоугольной системе координат.

2.2. Определение правильной трёхмерной области.

Трёхмерная область V, ограниченная замкнутой поверхностью S, будет правильной, если она обладает следующими свойствами (рис.27):

1) Всякая прямая, параллельная оси Oz, проведённая через внутреннюю точку области V, пересекает поверхность S в двух точках;

2) Вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную (двухмерную) область D;

3) Всякая часть области V, отсечённая плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (Oxy, Oxz, Oyz), также обладает свойствами 1) и 2).

Пример неправильной трёхмерной области дан на рис.28.

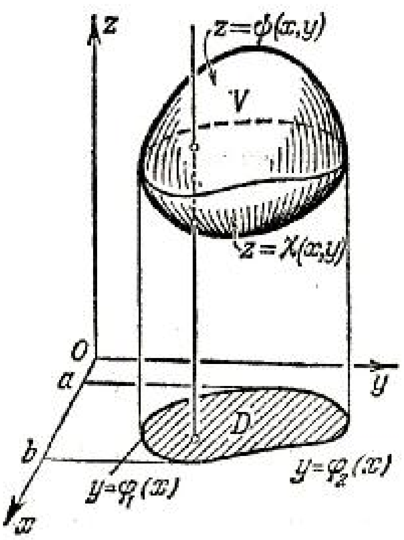


рис.27

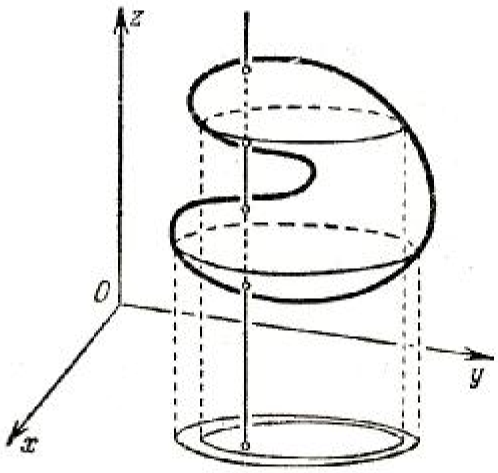


рис.28

2.3. Свойства тройного интеграла.

1. Тройной интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\iiint_V (f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z))dxdydz \iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz + \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\iiint_V l f(x,y,z)dxdydz = l \iiint_V f(x,y,z)dxdydz .$$

3. Если область V представить в виде совокупности двух правильных областей V_1 и V_2, не имеющих общих внутренних точек, то тройной интеграл по области V будет равен сумме двух интегралов по этим областям:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz .$$

2.4. Вычисление тройного интеграла сведением к трехкратному.

Пусть поверхность, ограничивающая область V снизу, задана уравнением $z = c(x,y)$, а поверхность, ограничивающая эту область сверху, задана уравнением $z = y(x,y)$ (рис.27). Введём понятие трёхкратного интеграла I_V по замкнутой области V от функции трёх переменных $f(x,y,z)$, которая определена и непрерывна в этой области. Пусть трехмерная область V проектируется на расположенную в плоскости Оху двухмерную область D, правильную в направлении оси Оу и ограниченную линиями:

$$y = j_1(x), y = j_2(x), x = a, x = b.$$

Тогда трёхкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V определяется как:

$$I_V = \int_a^b dx \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} dy \int_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (2.3)$$

и равен тройному интегралу (2.2). Проинтегрируем (2.3) сначала по переменной z, и после подстановки пределов интегрирования получим функцию двух переменных x и y. Далее, вычисляется двойной интеграл от этой функции по правильной в направлении оси Оу области D сведением его к двукратному интегралу.

Пример 21. Вычислить трёхкратный интеграл и построить область интегрирования: $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz$.

Решение. Последовательно вычислим три обыкновенных (однократных) определённых интеграла, начиная с внутреннего:

$$I_1=\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz=\frac{(4+z)^2}{2}\Big|_0^2=18-8=10,$$

$$I_2=\int\limits_{x^2}^{1}I_1dy=10\int\limits_{x^2}^{1}dy=10y\Big|_{x^2}^{1}=10(1-x^2),$$

$$I_3=\int\limits_{-1}^{1}I_2dx=10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx=10(x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

Для построения области интегрирования данного трёхкратного интеграла запишем уравнения поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его нижнему и верхнему пределам, получим следующие уравнения:

$x=-1,\ x=1,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0,\ z=2.$

Найденные поверхности образуют прямой параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz (рис.29).

Пример 22. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{1-x-y}$, если область V

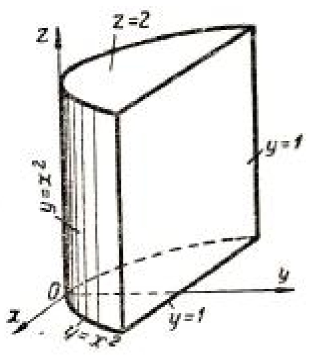


рис.29

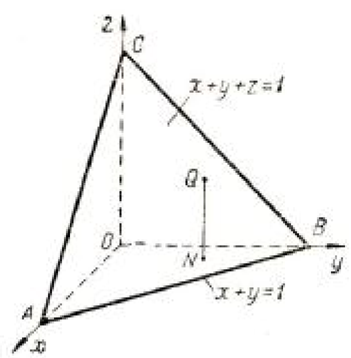


рис.30

ограничена плоскостями $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Решение. Построим данную область, представляющую собой тетраэдр (рис.30). Проведём через эту область прямую параллельно оси Oz. Нижняя плоскость AOB, которую пересекает прямая, описывается уравнением z=0. Верхняя плоскость ABC, из которой выходит прямая, имеет уравнение $z = 1 - x - y$. Правые части уравнений этих плоскостей будут пределами для внутреннего интеграла. Проекцией тетраэдра на плоскость Oxy является прямоугольный треугольник AOB. Следовательно, будем иметь $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y} = \iint\limits_{AOB} \frac{dxdy}{1-x-y}\int\limits_0^{1-x-y} dz =$

$$= \iint\limits_{AOB} \frac{dxdy}{1-x-y}(z|_0^{1-x-y}) = \iint\limits_{AOB} dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy = \int\limits_0^1 y|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 (1-x)dx = (x - \frac{x^2}{2})|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

<u>Пример 23.</u> Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $3(x^2+y^2)+z^2 = 3a^2$.

<u>Решение.</u> Область V, ограниченная данной поверхностью, есть эллипсоид вращения (рис.31). Его проекция D на плоскость Oxy есть круг $x^2+y^2 \le a^2$. Т.о.

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{-\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}}^{\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}} (x^2+y^2+z^2)dz = \iint\limits_D ((x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3})\Big|_{-\sqrt{3(a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{3(a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 2a^2\sqrt{3}\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy.$$

Перейдём к полярным координатам $x = r\cos j$, $y = r\sin j$, $dxdy = r\,d\,r\,d\,j$:

$$I = 2a^2\sqrt{3}\iint\limits_D \sqrt{a^2-r^2}\,r\,d\,r\,d\,j = a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2p} d\,j \int\limits_a^0 (a^2-r^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2-r^2) = a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2p} \frac{2(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_a^0 d\,j =$$

$$= \frac{2a^5\sqrt{3}}{3}\int\limits_0^{2p} d\,j = \frac{4p\,a^5}{\sqrt{3}}.$$

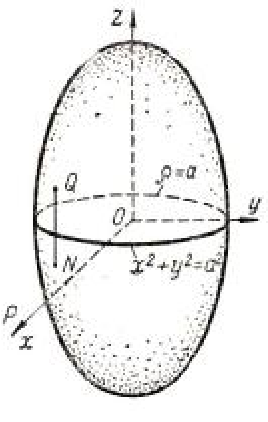


рис.31

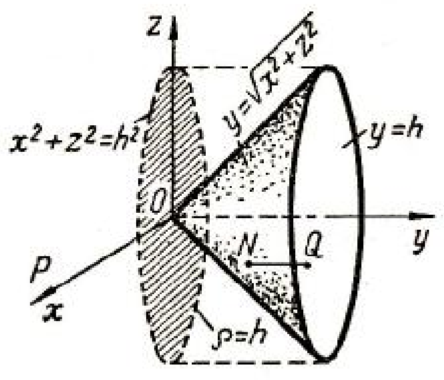


рис.32

Пример 24. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V y dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = h;\ \ h > 0.$

Решение. Данной областью является конус (рис.32) высотой h, имеющий в качестве оси симметрии Oy. Всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку конуса параллельно оси Oy, пересекает ограничивающую его поверхность в двух точках, а проекцией этого конуса на плоскость Oxz является круг $x^2 + y^2 \le h^2$. Меняя местами переменные z и y получим:

$$I = \iint\limits_D dxdz \int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{h} ydy = \iint\limits_{x^2+z^2 \le h^2} \left. \frac{y^2}{2} \right|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{h} dxdz = \frac{1}{2} \iint\limits_{x^2+z^2 \le h^2} (h^2 - x^2 - z^2) dxdz .$$

Переходя к полярной системе координат $x = r\cos j, y = r\sin j, dxdy = rdrdj$, получим:

$$I = \frac{1}{2} \iint\limits_{r \le h} (h^2 - r^2) r\, dr\, dj = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^{h} (h^2 r - r^3) dr = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2p} \left(\frac{h^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^h dj = \frac{h^4}{8} \int\limits_0^{2p} dj = \frac{p h^4}{4}.$$

2.5. Вычисление объёма тела с помощью тройного интеграла.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то тройной интеграл дает объём области: $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Пример 25. Вычислить объём тела, ограниченного сферической поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, цилиндром $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ и плоскостью z=0.

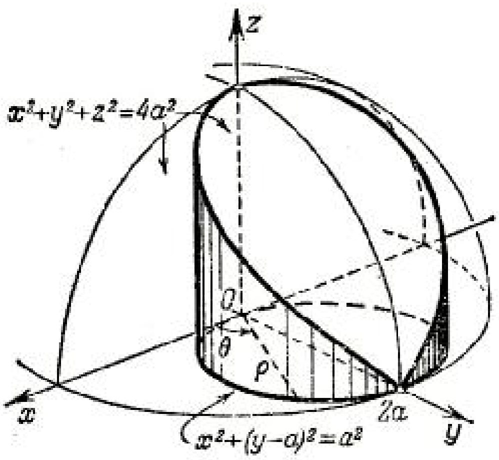


рис.33

<u>Решение.</u> На рис.33 представлена область, объём которой надо вычислить. Любая прямая, проведённая внутри области параллельно оси Oz, пересекает в нижней точке поверхность z=0, а в верхней точке поверхность $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$, ограничивающие эту область. Правые части уравнений поверхностей будут пределами интегрирования для внутреннего интеграла. Проекцией всей области на плоскость Oxy является круг (рис.33). Уравнение границы этого круга можно записать в виде $x^2+(y-a)^2=a^2$. Вычислим половину искомого объёма V. Тогда в качестве области интегрирования двойного интеграла возьмем полукруг, границы которого определяются уравнениями $x=0, x=\sqrt{2ay-y^2}, y=0, y=2a$:

$$\frac{1}{2}V=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dz=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Перейдём в полярную систему координат $x=r\cos q, y=r\sin q, dxdy=r\,dr\,dq$. Тогда уравнение окружности примет вид $r^2cos^2q+r^2\sin^2q-2ar\sin q=0$, или $r^2-2ar\sin q=0$, или $r=2a\sin q$.

В полярной системе координат границы области D (полукруга) определяются уравнениями $r=0, r=2a\sin q, a=0, b=\frac{p}{2}$. Подынтегральная функция тогда примет вид $F(q,r)=\sqrt{4a^2-r^2}$. В результате получим

$$V=2\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\Big(\int\limits_0^{2a\sin q}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\Big)dq=2\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\left[-\frac{(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{2a\sin q}dq=-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\left[(4a^2-4a^2\sin^2q)^{\frac{3}{2}}-(4a^2)^{\frac{3}{2}}\right]dq=$$

$$=-\frac{16a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}(1-\cos^3q)dq=\frac{8}{9}a^3(3p-4).$$

<u>Пример 26.</u> Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=4, z=0, x=3, x=0, y=2, y=0.$

<u>Решение.</u> Заданные плоскости ограничивают шестигранник (рис.34).

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{4-x-y}dz=\iint\limits_D(4-x-y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^3(4-x-y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{4-y}(4-x-y)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[(4-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=3}dy+\int\limits_1^2\left[(4-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=4-y}dy=\int\limits_0^1\Big(\frac{15}{2}-3y\Big)dy+\frac{1}{2}\int\limits_1^2(4-y^2)dy=$$

$$= (\frac{15}{2}y - \frac{3}{2}y^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{6}(y-4)^3\Big|_1^2 = \frac{55}{6}.$$

Здесь при вычислении двойного интеграла по области OABCD её пришлось разбить прямой BE параллельной оси OX на две части.

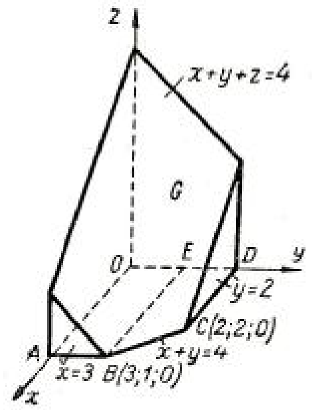


рис.34

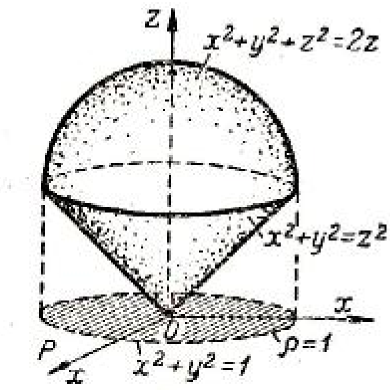


рис.35

<u>Пример 27.</u> Найти объём тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=2z$ (с центром в точке (0,0,1)) и конусом $x^2+y^2=z^2$ (рис. 35).

<u>Решение.</u> Любая прямая, проведённая внутри этой области параллельно оси Oz, пересечет снизу ограничивающую поверхность $z=\sqrt{x^2+y^2}$, а сверху поверхность $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Правые части уравнений этих поверхностей будут пределами интегрирования для внутреннего интеграла по переменной z. Проекцией всей области на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\le 1$. Поэтому,

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz=\iint\limits_D (1+\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})dxdy\,.$$

Переходя к полярным координатам, найдём:

$$V=\iint\limits_D (1+\sqrt{1-r^2}-r)r\,dj\,dr=\int\limits_0^{2p} dj\int\limits_0^1 (r-r^2+r\sqrt{1-r^2})dr=$$

$$=\int\limits_0^{2p} dj\int\limits_0^1 (r-r^2+r\sqrt{1-r^2})dr=\int\limits_0^{2p}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 dj\ =p\,.$$

2.6. Приложение тройного интеграла в механике.

***1. Определение массы тела, занимающего область V*:**

$m=\iiint\limits_V d(M)dV=\iiint\limits_V d(x,y,z)dxdydz$, где $d(M)$ - объёмная плотность распределения массы в точке M(x,y,z) тела V.

2. Координаты центра тяжести C тела:

$$x_c=\frac{m_{yz}}{m}, y_c=\frac{m_{xz}}{m}, z_c=\frac{m_{xy}}{m}$$

где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} – статистические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$m_{yz}=\iiint\limits_V xddxdydz; m_{xz}=\iiint\limits_V yddxdydz; m_{xy}=\iiint\limits_V zddxdydz.$$

Для однородного тела плотность постоянна, поэтому $d=\text{const}$ выносится за знак интегралов и сокращается.

3. Моменты инерции тела относительно осей OX, OУ и OZ и начала координат O:

$$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)ddxdydz, I_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz,$$

$$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)ddxdydz, I_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Пример 28. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$, если в каждой его точке объёмная плотность численно равна ординате этой точки.

Решение. Согласно условию в точке M(x,y,z) тела объёмная плотность $d(M)=y$, поэтому $m=\iiint\limits_V d(M)dv=\iiint\limits_V ydxdydz$, где V - область, занимаемая данным телом (рис. 36). Поэтому

$$m=\iint\limits_{AOB} ydxdy\int\limits_{1-y}^{2(1-y)}dz=\iint\limits_{AOB} y(1-y)dxdy=\int\limits_0^1(y-y^2)dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=\int\limits_0^1(y-y^2)2\sqrt{2y}dy=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

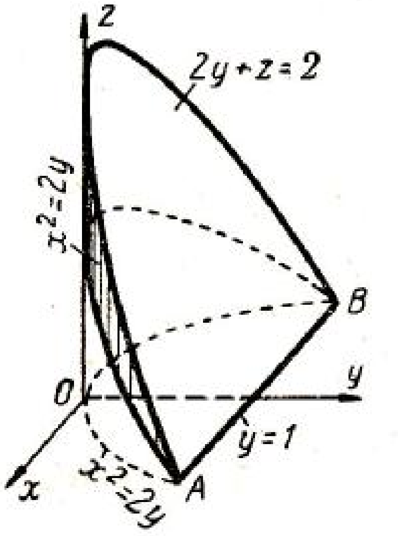


рис.36

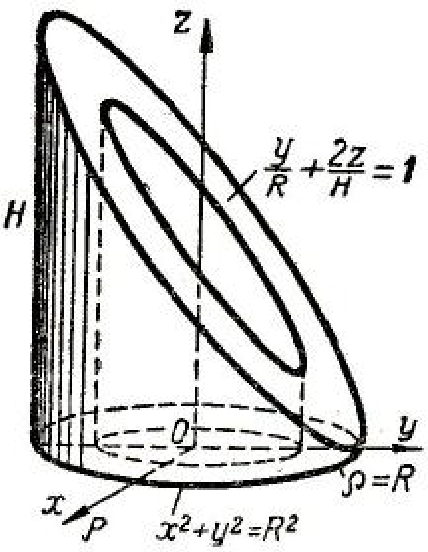


рис.37

Пример 29. Найти момент инерции однородного полого усечённого цилиндра (рис. 37) относительно его оси.

Решение. Обозначим внешний и внутренний радиусы цилиндра через R и r, а его высоту через H. Тогда относительно указанной на рис. 37 прямоугольной системы координат уравнения цилиндрических поверхностей и плоскостей, ограничивающих цилиндр V, будут

$$x^2+y^2=R^2, x^2+y^2=r^2, z=0, Hy+2Rz=HR.$$

Полагая $d=1$, получим момент инерции цилиндра относительно его оси. В ходе решения перейдём в полярную систему координат:

$$I_z=\iiint\limits_V d(x^2+y^2)dxdydz=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy\int\limits_0^{\frac{H}{2}(1-\frac{y}{R})}dz=\frac{H}{2}\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)(1-\frac{y}{R})dxdy=$$

$$=\frac{H}{2}\iint\limits_{r\le r\le R} r^2(1-\frac{r\sin j}{R})r\,dj\,dr=\frac{H}{2}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_r^R(r-\frac{r^3\sin j}{R})dr=\int(\frac{r^4}{4}-\frac{r^5\sin j}{5R})\Big|_r^R)dj=$$

$$=\frac{H}{2}\int(\frac{R^4-r^4}{4}-\frac{R^5-r^5}{5R}\sin j)dj=\frac{pH(R^4-r^4)}{4}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Вычислить тройные и трехкратный интегралы:

41. $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz,$ где V – призма, ограниченная плоскостями $x=0, y=0, z=0, z=3, x+y=2.$

42. $\iiint\limits_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz,$ где область V расположена в первом октанте и ограничена конусом $4z^2 = x^2+y^2$ и плоскостями $x=0, y=0, z=0, z=1.$

43. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$ где V – область ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1.$

44. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyzdz$.

45. $\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz,$ где V – общая часть параболоида $2z \geq x^2+y^2$ и шара $x^2+y^2+z^2 \leq 3$.

2. Вычислить объёмы указанных тел с помощью тройных интегралов.

46. Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями:

а) сферой $x^2+y^2+z^2=12$ и параболоидом $x^2+y^2=4z.$

б) цилиндрами $x^2=y, x^2=4-3y$ и плоскостями $z=0, z=9.$

в) конусом $x^2+y^2=z^2$ и параболоидом $x^2+y^2=6-z, z\geq 0.$

г) цилиндром $x^2+y^2=x$ и сферой $x^2+y^2+z^2=1.$

3. Задачи на приложение тройного интеграла в механике.

47. Найти массу прямоугольного параллелепипеда $0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b, 0\leq z\leq c$, если плотность в точке (x,y,z) есть $r(x,y,z)=x+y+z.$

48. В теле, имеющем форму полушара $x^2+y^2+z^2\leq a^2, z\geq 0,$ плотность равна расстоянию от точки до центра.

49. Найти момент инерции круглого цилиндра относительно его оси, если высота его равна h, а радиус основания a.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Криволинейный интеграл 1-го рода.

Пусть задана непрерывная функция *f(x,y)* и уравнение некоторой плоской гладкой кривой *L*: *y=χ(x)* (*a*≤ *x* ≤*b*). Построим систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($y_i = c(x_i)$, i=0,1,2,…,n), разбивающих кривую *L* на элементарные дуги Δl_i, и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$. Если существует конечный предел этой суммы при n →∞ и $\max_i \Delta l_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения дуги, ни от выбора точек на ней:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i = \int_L f(x,y)dl, \qquad (3.1)$$

то он называется криволинейным интегралом первого рода (здесь *dl* – дифференциал дуги кривой) и вычисляется по формуле

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, c(x))\sqrt{1+(c`(x))^2}dx. \qquad (3.2)$$

В случае параметрического задания кривой *l*: $x = j(t), y = y(t)$ $(a \le t \le b)$ имеем:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(j(t), y(t))\sqrt{j^{`2}(t) + y^{`2}(t)}dt. \qquad (3.3)$$

Криволинейные интегралы первого рода от функции трёх переменных *f(x,y,z)*, взятые по пространственной кривой, вычисляются аналогично. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления пути интегрирования.

Пример 30. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x+y)dl$ где L - контур треугольника AOB с вершинами A(1;0), B(0;1) и O(0;0) (рис. 38).

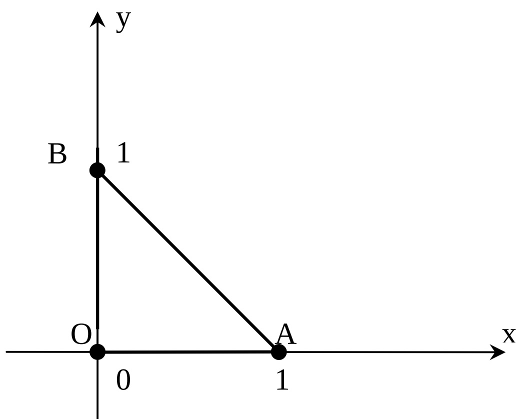


рис.38

Решение. Уравнение стороны AB: y=1-x, уравнение стороны OB: x=0, уравнение стороны OA: y=0. Следовательно,

$$\int_L (x+y)dl = \int_{AB} (x+y)dl + \int_{BO} (x+y)ds + \int_{OA} (x+y)dl = \int_0^1 \sqrt{2}dx + \int_0^1 ydy + \int_0^1 xdx = \sqrt{2}+1.$$

3.2. Криволинейный интеграл 2-го рода.

Если P(x,y) и Q(x,y) – непрерывные функции своих аргументов и $y = c(x)$ – гладкая плоская кривая C, пробегаемая полностью при изменении x от a до b, то соответствующий криволинейный интеграл второго рода выражается следующим образом:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, c(x)) + c`(x)Q(x, c(x))]dx \qquad (3.4)$$

В общем трехмерном случае, когда кривая C задана в параметрическом виде: $x = j(t), y = y(t), z = z(t),$ а параметр t изменяется от a до b, имеем

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \{P(j(t), y(t), z(t))j`(t) + Q(j(t), y(t), z(t))y`(t) +$$
$$R(j(t), y(t), z(t))z`(t)\}dt \qquad (3.5)$$

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода:

1. При перемене направления на кривой интегрирования криволинейный интеграл изменяет свой знак: $\int_{AB} = -\int_{BA}$.

2. Если кривую интегрирования AB можно разбить точкой C на две части, то:

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB} .$$

3. Постоянную можно выносить из-под знака криволинейного интеграла:

$$\int_C l\,\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{l} = l\int_C \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{l},$$

где $\vec{f}(x,y,z) = \{f_1, f_2, f_3\}$ - заданная непрерывная вектор-функция, а $d\vec{l} = \{dx, dy, dz\}$.

Криволинейный интеграл по замкнутой плоской линии при положительном направлении обхода (против часовой стрелки) обозначается как $\oint_{+l}$, а при отрицательном направлении обхода – $\oint_{-l}$.

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}$ сводится к вычислению обыкновенного определённого интеграла: исходя из уравнения линии интегрирования AB, подынтегральное выражение криволинейного интеграла преобразуется к зависимости одной переменной, значения которой в начале и в конце дуги AB будут пределами полученного обыкновенного интеграла.

Пример 31. Вычислить криволинейный интеграл $\int (xy-1)dx + x^2ydy$ от точки A(1;0) до точки B(0;2):

1) по прямой $2x + y = 2$
2) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$
3) по дуге эллипса $x = \cos t, y = 2\sin t$

Решение.

1) $y = 2-2x, dy = -2dx$:

$$I_1 = \int\limits_{x_A=1}^{x_B=0} [x(2-2x)-1]dx + x^2(2-2x)(-2dx) = \int\limits_1^0 (4x^3-6x^2+2x-1)dx = x^4-2x^3+x^2-x\,|_1^0 = 1\,.$$

2) $x = 1-\dfrac{y^2}{4}, dx = -\dfrac{y}{2}dy$:

$$I_2 = \int\limits_{y_A=0}^{y_B=2} [(1-\frac{y^2}{4})y-1](-\frac{y}{2}dy) + (1-\frac{y^2}{4})^4 ydy = \int (\frac{y^5}{16}+\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{3y}{2})dy =$$

$$= \frac{y^6}{96}+\frac{y^5}{40}-\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{6}+\frac{3y^2}{4}\,|_0^2 = -\frac{1}{5}.$$

3) $x = \cos t, dx = -\sin tdt, y = 2\sin t, dy = 2\cos tdt$:

$$I_3 = \int\limits_{t_A}^{t_B} (\cos t 2\sin t - 1)(-\sin tdt) + \cos^2 t 2\sin t 2\cos tdt = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} (4\cos^3 t\sin t + \sin t - 2\sin^2 t\cos t)dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \cos^3 td\cos t + \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin tdt - 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 td\sin t = -\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3}\sin^3 t\,|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{4}{3}.$$

3.3. Геометрические и механические приложения криволинейного интеграла.

1) *Длина дуги AB плоской или пространственной линии:*

$$L_{AB} = \int\limits_{AB} dl \qquad (3.6)$$

2) *Площадь фигуры, расположенной в плоскости* xOy *и ограниченной замкнутой линией C*

$$S = \frac{1}{2}\oint_{+C} xdy - ydx \tag{3.7}$$

3) *Масса материальной дуги AB*

$$m = \int_{AB} \rho(M)dl \tag{3.8}$$

где $\rho(M)$ – линейная плотность вещества в точке М дуги.

4) *Координаты центра тяжести C дуги AB:*

$$x_C = \frac{\int_{AB} x\rho(M)dl}{m};\ y_C = \frac{\int_{AB} y\rho(M)dl}{m};\ z_C = \frac{\int_{AB} z\rho(M)dl}{m} \tag{3.9}$$

5) *Работа, совершаемая силой* $\overline{F} = (P,Q,R)$*, действующей на материальную точку при перемещении её по дуге AB:*

$$\mathbf{A} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz \tag{3.10}$$

Пример 32. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой – эллипсом $x = a\cos t, y = b\sin t$.

$$S = \frac{1}{2}\oint_{+C} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t d(b\sin t) - b\sin t d(a\cos t) = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Пример 33. Найти массу дуги АВ кривой $y = \ln x$, если в каждой её точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки; $x_A = 1; x_B = 3$.

Решение. $y` = \frac{1}{x}, dl = \sqrt{1+(y`)^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx, \rho = kx^2$:

$$m = \int_{AB} \rho\, dl = k\int_1^3 x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx = \frac{k}{2}\int_1^3 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1) = \frac{k}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{k}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}).$$

Пример 34. Найти работу силового поля $\vec{F} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j}$ при движении по часовой стрелке вдоль окружности $x = a\cos t, y = a\sin t$.

$$\mathbf{A} = \oint_{-C} (x+y)dx - xdy = \int_0^{-2\pi} (a\cos t + a\sin t)d(a\cos t) - a\cos t d(a\sin t) =$$

$$-a^2\int_0^{-2\pi} (1+\sin t\cos t)dt = -a^2\left(t + \frac{\sin^2 t}{2}\right)\Big|_0^{-2\pi} = 2\pi a^2.$$

3.4. Формула Грина для плоскости.

Если L – граница области D и функции $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в замкнутой области D, то для перехода от криволинейного к двойному интегралу и, наоборот, справедлива формула Грина:

$$\oint_{+L} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (3.11)$$

(обход контура выбирается положительным).

Пример 35. Вычислить криволинейный интеграл непосредственно и с помощью формулы Грина: $\oint_{+L} 2xdx - (x+2y)dy$, где L- периметр треугольника с вершинами A(-1;0), B(0,2) и C(2;0).

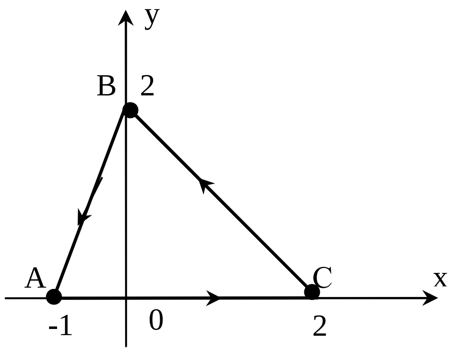


рис.39

Решение. Изобразим контур интегрирования (рис. 39). Составим уравнение стороны AB: $y = 2x + 2$, $dy = 2dx$, тогда

$$\int_{BA} = -8\int_0^{-1}(x+1)dx = -4(x+1)^2 \Big|_0^{-1} = 4.$$

Составим уравнение стороны BC:

$$x = 2 - y, dx = -dy, \int_{CB} = \int_0^2 (y-6)dy = \frac{(y-6)^2}{2}\Big|_0^2 = -10.$$

Составим уравнение стороны CA: $y = 0, dy = 0, \int_{AC} = 2\int_{-1}^2 xdx = x^2 \Big|_{-1}^2 = 3$.

Следовательно, $\oint_{ACBA} = \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BA} = 3 - 10 + 4 = -3$.

Вычислим теперь этот криволинейный интеграл с помощью формулы Грина.

$$P = 2x, Q = -x - 2y, \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = -\iint_D dxdy = -\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}(y-2)}^{2-y} dx =$$

$$= -\int_0^2 \left(2 - y - \frac{1}{2}(y-2)\right)dy = -\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}y\right)dy = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{3}{2}y\right)^2 \Big|_0^2 = -3.$$

Примеры для самостоятельного решения.

Криволинейный интеграл первого типа.

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

50. $\int\limits_C xydl,$ где C - контур квадрата $|x|+|y|=a$.

51. $\int\limits_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}},$ где C - отрезок прямой, соединяющий точки O(0;0) и A(1;2).

52. $\int\limits_C xydl,$ где C - четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ лежащая в первом квадранте.

53. $\int\limits_C y^2dl,$ где C - первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

54. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}dl,$ где C-дуга развёртки окружности

$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t),\ \ 0\le t\le 2p$.

55. $\int\limits_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой $x-2y=4,$ A(0,-2), B(4,0).

Криволинейный интеграл второго типа.

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

56. $\int\limits_{OA} y(x-y)dx+xdy$ по линиям 1) $y=2x,$ 2) $y=2x^2,$ 3) $y^2=4x,$ где O(0,0), A(1;2).

57. $\oint\limits_{+C} (x^2-y)dx$ вдоль периметра прямоугольника, образованного прямыми линиями x=0,y=0,x=1,y=1.

58. $\int\limits_C y^2dx+x^2dy,$ где C- верхняя половина эллипса $x=a\cos t, y=b\sin t,$ пробегаемая по ходу часовой стрелки.

59. $\int\limits_C (2a-y)dx+xdy,$ где C-дуга первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

Задачи на приложения криволинейного интеграла.

60. Найти длину кардиоиды: $x=2a\cos t-a\cos 2t, y=2a\sin t-a\sin 2t$.

61. Найти координаты центра тяжести дуги AB винтовой линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$, если в каждой её точке линейная плотность пропорциональна аппликате этой точки; $t_A=0, t_B=p$.

62. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $x=2\cos t-\cos 2t, y=2\sin t-\sin 2t$.

63. Найти массу дуги OA кривой $3y = 2x\sqrt{x}$, если в каждой её точке M линейная плотность пропорциональна длине дуги OM, O(0;0),A$(4;\frac{16}{3})$.

64. Вычислить работу силы $\vec{F}$ {y-z; z-x; x-y} вдоль винтовой линии L: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, $0 \le t \le 2p$

Применяя формулу Грина вычислить криволинейные интегралы.

65. $\oint\limits_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, где C - контур треугольника с вершинами A(1;1), B(2;2), C(1;3).

66. $\oint\limits_C -x^2 y dy + xy^2 dy,$ где C - окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Варианты расчетно-графической работы

1. Построить область интегрирования:

$$1).\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x,y)dy \quad 2).\int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 f(x,y)dx; \quad 3).\int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx \quad 4).\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy; \quad 5).\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx;$$

$$6).\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dy; \quad 7).\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} dj \int_0^{\cos j} f(j,r)dr \quad 8).\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy \quad 9).\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy; \quad 10).\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/2}^{2-x} f(x,y)dy;$$

$$11).\int_0^1 dx \int_{x^2/2}^{3x} f(x,y)dy; \quad 12).\int_2^4 dy \int_{1/y}^{6-y} f(x,y)dx; \quad 13).\int_2^3 dx \int_{1/x}^{x} f(x,y)dy; \quad 14).\int_3^4 dy \int_0^{\ln y} f(x,y)dx; \quad 15).\int_0^2 dx \int_{x^2}^{8-x^2} f(x,y)dy;$$

$$16).\int_0^2 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx \quad 17).\int_{1/2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy; \quad 18).\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} f(x,y)dy; \quad 19).\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy;$$

$$20).\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x^3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \quad 21).\int_0^2 dy \int_{y^2/4}^{3-y} f(x,y)dx; \quad 22).\int_0^{12} dx \int_{x/3}^{\sqrt{2(x-4)}} f(x,y)dy; \quad 23).\int_1^2 dx \int_{2-x}^{2x-x^2} f(x,y)dy;$$

$$24).\int_0^1 dx \int_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy; \quad 25).\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy; \quad 26).\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy; \quad 27).\int_0^{2p} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy;$$

$$28).\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)}/\sqrt{2}} f(x,y)dy; \quad 29).\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy; \quad 30).\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить повторный интеграл:

$$1).\int_0^2 dx\int_0^1 (x+xy-x^2-y^2)dy; \quad 2).\int_1^3 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy; \quad 3).\int_1^2 dy\int_0^{\ln y} e^x dx; \quad 4).\int_1^3 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy; \quad 5).\int_1^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} xydy;$$

$$6).\int_4^6 dx\int_x^{2x} \frac{y}{x}dx; \quad 7).\int_{-1}^1 dy\int_0^{y^2}(x+2y)dx; \quad 8).\int_1^2 dx\int_x^{x^2}(2x-y)dy; \quad 9).\int_0^2 dx\int_{x^2}^4 (x^2-y)dy; \quad 10).\int_1^2 dx\int_{x^2/2}^{3x}(x+2y)dy;$$

$$11).\int_2^4 dy\int_{1/y}^{6-y} xdx; \quad 12).\int_0^4 xdx\int_1^e \ln ydy; \quad 13).\int_0^{p/4} dx\int_0^{p/4}(\cos^2 x+\sin^2 y)dy; \quad 14).\int_{-3}^1 dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)dy;$$

$$15).\int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)dy; \quad 16).\int_0^{2p}\cos^2 xdx\int_0^1 ydy; \quad 17).\int_0^{2p} dj\int_0^1 r^2\sin^2 j\,dr; \quad 18).\int_1^3 dx\int_x^{x^3}(x-y)dy; \quad 19).\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy;$$

$$20).\int_1^2 dx\int_3^y \frac{dy}{(x+y)^2}; \quad 21).\int_1^3 dx\int_2^5 (5x^2y-2y^3)dy; \quad 22).\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy; \quad 23).\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$24).\int_0^{p/2} dx\int_0^{p} x\sin(x+y)dy; \quad 25).\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2}; \quad 26).\int_0^2 dx\int_0^1 ye^{xy}dy; \quad 27).\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy; \quad 28).\int_0^1 dx\int_0^1 e^{x+y}dy;$$

$$29).\int_0^2 dx\int_0^{p/2} y\cos(xy^2)dy; \quad 30).\int_0^2 dx\int_0^2 xy(x+y)dy.$$

3.Вычислить двойной интеграл:

1). $\iint_D xy^2dxdy; D: y^2 \le 2x; x \le 1;$ 2). $\iint_D xydxdy; D: x^2+y^2 \le 1; x \ge 0; y \ge 0;$

3). $\iint_D \cos(x+y)dxdy; D: x \ge 0; y \le p; y \ge x;$ 4). $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy; D: x \le 2; y \le x; xy \ge 1;$

5). $\iint_D (^2 \ \ +y)dydx\ ; D: y \ge x^2; y^2 \le x;$ 6). $\iint_D x^3y^2dxdy; D: x^2+y^2 \le R^2;$

7). $\iint_D \frac{x^3}{y}dxdy; D: y \le 4; y \le x^2; y \ge \frac{x^2}{4};$ 8). $\iint_D ydxdy; D: x \ge 0; y \ge 0; y \le \sqrt{9-x^2};$

9) $\iint_D dxdy; D: y \le x; y \ge \frac{p}{4}; x+2y \le 6;$ 10). $\iint_D ydxdy; D: y \le \sqrt{x}; y \ge -x; x-y \le 2;$

11). $\iint_D \frac{x}{y^2}dxdy; D: y \ge x; y \le 9x; y \le \frac{1}{x};$ 12). $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy; D: x \le 2; y \le x; y \ge \frac{1}{x};$

13). $\iint_D x^3dxdy; x \ge 0; y \le x; y \le 2-x^2;$ 14). $\iint_D (x^2+2xy)dxdy; D: y \ge 0; y \le 1; y \le x; y \ge x-1;$

15). $\iint_D x\sqrt{y}dxdy; D: y \le 1; y \ge x; y \le 3x;$ 16). $\iint_D (x+y)dxdy; D: x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 3;$

17). $\iint_D (x^2+4y^2+9)dxdy; D: x^2+y^2 \le 4;$ 18). $\iint_D \sin(x+y)dxdy; D: x \ge 0; y \le \frac{p}{2}; y \ge x;$

19). $\iint_D (3x^2-2xy+y)dxdy; D: x \ge 0; x \le y^2; y \le 2;$ 20) $\iint_D (3x+y)dxdy; D: x^2+y^2 \le 9; y \ge \frac{2}{3}x+3;$

21). $\iint_D (\cos 2x+\sin y)dxdy; D: x \ge 0; y \ge 0; 4x+4y-p \le 0;$ 22). $\iint_D y\ln x dxdy; D: xy \ge 1; y \le \sqrt{x}; x \le 2;$

23). $\iint_D xdxdy; D -$ треугольник с вершинами A(2,3),B(7,2),C(4,5).

24). $\iint_D xydxdy; D: xy=1; x+y=\frac{5}{2};$ 25). $\iint_D (x+y)dxdy; D: y^2 \le 2x; x+y \ge 4; x+y \le 12;$

26). $\iint_D dxdy; D: x^2+y^2 \le 1;$ 27). $\iint_D x^2ydxdy; D: x^2=2y; y=\frac{1}{2};$

28). $\iint_D \sin(x+y)dxdy; D: x=0; y=\frac{p}{2}; y=x;$ 29). $\iint_D (x-y)dxdy; D: y=2-x^2; y=2x-1;$

30). $\iint_D \cos(x+y)dxdy; D: x \ge 0; y \le p; y \ge x.$

4.Изменить порядок интегрирования:

1). $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y);$ 2). $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y);$ 3). $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy;$ 4). $\int_0^{p/2} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy;$ 5). $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy;$

6). $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy;$ 7). $\int_{-6}^1 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)dy;$ 8). $\int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)dy;$ 9). $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy;$ 10). $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$

11). $\int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy;$ 12). $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy;$ 13). $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx;$

$$14).\int_0^3 dx \int_0^{9-x^2} f(x,y)dy;\ \ 15).\int_0^4 dy \int_y^{8-y} f(x,y)dx;\ \ 16).\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy;\ \ 17).\int_1^3 dx \int_x^{3x} f(x,y)dy;\ \ 18).\int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx;$$

$$19).\int_0^2 dx \int_{x^2}^{8-x^2} f(x,y)dy;\ \ 20).\int_0^1 dx \int_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy;\ \ 21).\int_0^2 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx;\ \ 22).\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx;$$

$$23).\int_0^1 dx \int_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;\ \ 24).\int_0^{p/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy;\ \ 25).\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy;\ \ 26).\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy;$$

$$27).\int_0^1 dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx;\ \ 28).\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx;\ \ 29).\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx;\ \ 30).\int_0^{p/2} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy.$$

5. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$1).\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy;\ \ 2).\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; D: x^2+y^2 \le 1; x \ge 0; y \ge 0;$$

$$3).\iint_D (5-2x-3y)dxdy; D: x^2+y^2 \le 4;\ \ 4).\iint_D \sqrt{R-x^2-y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \le Rx;$$

$$5).\iint_D \operatorname{arctg}\tfrac{x}{y}dxdy; D: x^2+y^2 \ge 1; x^2+y^2 \le 9; y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}; y \le x\sqrt{3};\ \ 6).\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \le 9;$$

$$7).\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy; D: p^2 \le x^2+y^2 \le 4p^2;\ \ 8)\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \ge 1; x^2+y^2 \le 4;$$

$$9).\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy; D: x^2+y^2 \le 4;\ \ 10).\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \le 1; y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}; y \le x\sqrt{3}; x \ge 0;$$

$$11).\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}; D: x^2+y^2 \le 1; y \ge 0;\ \ 12).\iint_D (x^2+y^2)dxdy; D: x^2+y^2 \le 4x;$$

$$13).\iint_D ydxdy; D: x^2+y^2 \le 1; -1 \le x \le 0; 0 \le y \le 1;\ \ 14).\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \le 1; x \ge 0; y \ge 0;$$

$$15).\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy; D: x^2+y^2 \ge e^2; x^2+y^2 \le e^4;\ \ 16).\iint_D (1-\frac{y^2}{x^2})dxdy; D: x^2+y^2 \le p^2;$$

$$17).\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}; D: y \le \sqrt{1-x^2}; y \ge 0;\ \ 18).\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}; D: x^2+y^2 \ge \frac{p^2}{9}; x^2+y^2 \le p^2;$$

$$19).\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \ge 4; x^2+y^2 \le 16;\ \ 20).\iint_D xydxdy; D: x^2+y^2 \le 9; y \ge x; x \ge 0;$$

$$21).\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy; D: x^2+y^2 \ge \frac{p^2}{4}; x^2+y^2 \le p;$$

$$22).\iint_D xydxdy; D: x^2+y^2 \ge 1; x \ge 0; x^2+y^2 \le 4; y \ge 0;$$

$$23).\iint_D arctg\frac{x}{y}dxdy; D: x^2+y^2 \le 4; y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}; y \le x\sqrt{3}; x \ge 0;$$

$$24).\iint_D (1-2x-3y)dxdy; D: x^2+y^2 \le 9; y \le x; y \ge -x;\ \ 25).\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}; D: x^2+y^2 \le R^2; x \ge 0; y \ge 0;$$

26). $\iint\limits_D xdxdy; D: x^2+y^2 \ge 1; x^2+y^2 \le 4; -1 \le x \le 0; 0 \le y \le 1;$

27). $\iint\limits_D xydxdy; D: x^2+y^2 \le 1; y \ge \frac{x\sqrt{3}}{3}; y \le x\sqrt{3}; x \ge 0;$ 28). $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}; D: x^2+y^2 \le 4; y \ge x; y \le x\sqrt{3};$

29). $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy; D: x^2+y^2 \ge 2; x^2+y^2 \le 4; y \ge x; x \ge 0;$

30). $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy; D: x^2+y^2 \ge 1; x^2+y^2 \le 9; y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}; y \le x\sqrt{3}.$

6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1). $y=\ln x, y=x-1; y=-1;$ 2). $y=\sin x; y=\cos x; x=0;$ 3). $y=\frac{p}{4}; y=2x; x+3y-7=0;$
4). $y=x+3; 2x+y=6; 4y-x=6;$ 5). $y^2+x^2=1; x^2+y^2=25; y=x\sqrt{3}; x=0;$
6). $x^2+y^2=2y; y=x; x=0;$ 7). $x^2+y^2=2x; x^2+y^2=4x;$ 8). $y=4x-x^2; y=3x^2;$
9). $y^2=-x+4; y^2=2x-5;$ 10). $y=x^2; x+y=6;$ 11). $y^2=2x; y=-x;$ 12). $y=\frac{9}{x}; y=x; x=6;$
13). $y^2=-x; x=-4;$ 14). $y=0; y=4; y=-x; y=\frac{x-1}{2};$ 15). $x+y=2; y=\frac{x^2}{4}-1;$
16). $x^2+y^2=2x; y=0; y=x\sqrt{3};$ 17). $y^2=4x; y=2x;$ 18). $y=\sqrt{x}; y=2\sqrt{x}; x=4;$
19). $y=x^2; 4y=x^2; x=\pm 2;$ 20). $y=x^2-2x; y=x;$ 21). $y^2=4+x; x+3y=0;$ 22). $y=x^2; 4y=x^2; y=4;$
23). $xy=4; y=x; x=4;$ 24). $x=y^2-2y; y+x=0;$ 25). $y^2=1-x; y=1+x;$ 26). $y=x^2; y=x+2;$
27). $xy=4; x+y=10;$ 28). $y=\cos x; y=\cos 2x; y=0;$ 29). $y^2+2y-3x+1=0; 3x-3y-7=0;$
30). $x^2+y^2=2y; y=x; x=0.$

7. Вычислить объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

1). $2y^2=x; \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1; z=0;$ 2). $x+y+z=a; x^2+y^2=R^2; x=o; y=0; z=0; (a \ge R\sqrt{2});$
3). $z=1+x+y; z=0; x+y=1; x=0; y=0;$ 4). $z=xy; x+y+z=0; z=0;$
5). $z=0; x^2+y^2=2y; z=4-x^2-y^2;$ 6). $z=x^2+y^2; x+y=3; x=0; y=0; z=0;$
7). $z=6-x^2+y^2; z=0; x=0; y=0;$ 8). $3x+2y+z-6=0; x=0; y=0; z=0;$
9). $4y^2=x; \frac{x}{2}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1; z=0;$ 10). $x^2+y^2=1; x+y+z=3; z=0;$ 11). $z=1-x^2-4y^2; z=0;$
12) $z=x^2-y^2; x=1; y=0; z=0;$ 13). $z=2-\sqrt{x^2+y^2}; z=0;$ 14). $x^2+y^2=9; z=5x; z=0;$
15). $z=1-x^2-y^2; y=x; y=x\sqrt{3}; z=0; x \ge 0, y \ge 0; z \ge 0;$ 16). $z=x^2+y^2; x^2+y^2=2x; z=0;$
17). $x^2+y^2+z^2=4; x^2+y^2=1;$ (*вне цилиндра*) 18). $2z=2+x^2+y^2; z=4-x^2-y^2;$
19). $x^2+y^2=3x; x^2+y^2+z^2=4;$ (*внутри параболоида*);
20) $4z=16-x^2-y^2; z=0; x^2+y^2=4$ (*вне цилиндра*); 21) $\frac{x^2}{4}+y^2=1; z=12-3x-4y; z=1;$
22). $z=4-y^2; y=\frac{x^2}{2}; z=0$ 23) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; y=\frac{b}{a}x; y=0; z=0; (x \ge 0);$
24). $z=9-y^2; 3x+4y=12; (y \ge 0); x=0; y=0; z=0;$ 25). $z=4-x^2; x=0; y=0; z=0; 2x+y=4 (x \ge 0);$

$26).y = x^2; y = 1; x = 0; z = 0; z = x^2 + y^2;$ $27).z = 0; y = 0; x = 0; 2x + 3y - 12 = 0; z = \frac{y^2}{2};$

$28).x = 0; y = 0; z = 0; x = 4; y = 4; z = x^2 + y^2 + 1;$ $29).x = 0; y = 0; z = 0; x = 2; y = 3; z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6};$

$30).z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - x^2 + y^2.$

8.1. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями:

$1).2y = x^2; y = x^2; x = 1; x = 2;$ $2).y = x^2; x + y = 2;$ $3).r = a(1 + \cos j), j = 0;$ $4).y^2 = x; y = x^2;$
$5).\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$ $6).y = \sin x, осью Ox; x = \frac{p}{4};$ $7).r = 2\cos j; r = 4\cos j;$ $8).y = \sqrt{2x - x^2}; y = 0;$
$9).y = x^2; y = 1;$ $10).y^2 = 2x; x = 2;$ $11).r = a\sin 2j; 0 \le j \le 2p;$ $12).y = x^2; y = 2x^2; x = 1; x = 2;$
$13).y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4;$ $14).y = \sin x; y = 0; x = 0; x = p;$ $15).y^2 = 8x; y = 0; x + y = 6;$
$16).y = 2\sqrt{x}; y = x;$ $17).y^2 = 4x; x + y = 3; (y \ge 0);$ $18).y = x^2; y = 8 - x^2;$
$19).2y = x^2; y = x^2; x = 1; x = 2;$ $20).y = 1; y = x^2;$

8.2. Найти момент инерции площади, ограниченной линиями, относительно оси Ох:

$21).y = 2\sqrt{x}; y = x;$ $22).y = 2\sqrt{x}; y + x = 3; x = 0;$ $23).y = \sin x; y = \cos x; x = 0;$ $24).y = 4 - x^2; y = 0;$

8.3. Найти момент инерции площади, ограниченной линиями, относительно оси Оу:

$25).y^2 = 4x; x + y = 3; (y \ge 0);$ $26).y = 4 - x^2; y = 0;$ $27).y^2 = 2x; x = 2;$ $28).y = 2\sqrt{x}; y = x;$
$29).xy = 4; x + y = 5;$

30). Однородная пластинка имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника, длина гипотенузы которого равна *4b*. Найти момент инерции относительно гипотенузы.

9. Вычислить тройной интеграл:

$1).\iiint\limits_V xydxdydz; V: z = xy; x + y \le 1; y \ge 0; z \ge 0;$

$2).\iiint\limits_V y\cos(z + x)dxdydz; V: y \le \sqrt{x}, y \ge 0, z \ge 0, x + z \le \frac{p}{2};$

$3).\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz; V: x \le 1; y \le x; z \ge 0; z \le xy;$ $4).\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} (1 + x)dz;$

$5).\iiint\limits_V xyzdxdydz; V: x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0; x + y + z \le 1;$ $6).\iiint\limits_V zdxdydz; z \ge \sqrt{x^2 + y^2}; 2z \le 8 - x^2 - y^2;$

$7).\iiint\limits_V xz^2dxdydz; V: x = \sqrt{2y - y^2}; x \le 2; y \ge 0; y \le 2; z \ge 0; z \le 3;$

$8).\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz; V: x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3; z\ge 0; z\le 4;$

$9).\iiint\limits_V ydxdydz; V: x\ge 0; x\le 2; y\ge 0; y\le 1; z\ge 0; z\le 1-y;$

$10).\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz; V: x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0; x\le 2; y\le 3; z\le 4;$

$11).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{z}; V: z\ge x^2+y^2; z\ge 1; z\le 4;$ $12).\iiint\limits_V z^2dxdydz; V: z\le x^2+y^2; z\ge 2; z\le 6;$

$13).\iiint\limits_V z^3dxdydz; V: z\le 4-x^2-y^2; z\ge 0; z\le 3;$ $14).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{z}; V: (x-1)^2+y^2\le 1; z\ge 3; z\le 6;$

$15).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{z^2}; x^2+y^2+z^2\le 9; x\le 1; z\le 2;$

$16).\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz; V: z\ge 0; z\le 3; x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 4;$

$17).\iiint\limits_V xdxdydz; V: x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0; y\le h; x+z\le a;$ $18)\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz; V: x^2+y^2\le z^2, z\le 1;$

$19).\iiint\limits_V zdxdydz; V: 0\le x\le \frac{1}{2}; x\le y\le 2x; 0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2};$

$20)\iiint\limits_V (x+2y+z)dxdydz; V: z=0; x=0; y=0; x=a; y+z=b;$

$21).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{y^2}; V: x^2+y^2+z^2\le 16; y\ge 2; y\le 3;$

$22).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{z}; V: (y^2-1)+z^2\le 1; x\ge 2; x\le 4;$ $23).\iiint\limits_V y^2dxdydz; V: y\le x^2+z^2; y\le 2; y\ge 6;$

$24).\iiint\limits_V x^3dxdydz; V: x\le 4-y^2-z^2; x\ge 0; x\le 1;$ $25).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x}; V: x^2=y^2+z^2; x=1; x=4;$

$26).\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz; V: x^2+y^2=z^2; z=1;$ $27).\iiint\limits_V xyzdxdydz; V: x^2+y^2+z^2=1; x=0; y=0; z=0;$

$28).\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz; V: z=xy; y=x; x=1; z=0;$

$29).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}; V: x=0; y=0; z=0; x+y+z=1;$ $30).\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{z}; z^2\le x^2+y^2; z\ge 1; z\le 4;$

10. Вычислить криволинейный интеграл вдоль контура треугольника с вершинами A(1,1), B(2,2), C(3,1) непосредственно и пользуясь формулой Грина, выбрав положительное направление обхода.

$1).\oint\limits_L (y^2-2x^2)dx+4xydy;$ $2).\oint\limits_L 2xydx+(x^2-3xy)dy,$ $3).\oint\limits_L (2xy+y^2)dx-7x^2dy,$

$4).\oint\limits_L (y^2+3x^2)dx+(2xy-y^2)dy,$ $5).\oint\limits_L (x^2-y^2)dx+(xy-x^2)dy,$ $6).\oint\limits_L (12xy-2x^2)dx+4x^2dy,$

$7).\oint\limits_L (x+y)^2dx-5xydy,$ $8).\oint\limits_L (4xy+x^2)dx+(2x-y)^2dy,$ $9).\oint\limits_L (2x-3xy)dx+(8x^2-y^2)dy,$

$10).\oint\limits_L (xy-5x^2)dx+(x+y)^2dy,$ $11).\oint\limits_L (3x-y)^2dx+2x^2dy,$ $12).\oint\limits_L (xy-y^2)dx+(2xy+x^2)dy,$

$13).\oint\limits_L (4y+x)^2dx+2x^2dy,$ $14).\oint\limits_L 7xydx+(2x^2-y^2)dy,$ $15).\oint\limits_L (y+2x)^2dx+(x^2-2y^2)dy,$

16). $\oint\limits_L (5y-3x)^2 dx - 2xydy$, 17). $\oint\limits_L (xy+2y^2)dx + (x-y)^2 dy$, 18). $\oint\limits_l (x^2+2y^2)dx + 3xydy$,

19). $\oint\limits_L (x^2+2y^2)dx + 3xydy$, 20). $\oint\limits_L (x^2-2xy)dx + 2xdy$, 21). $\oint\limits_L (3xy+x^2)dx + (x-2y^2)dy$,

22). $\oint\limits_L (y^2-xy)dx + 4xy^2dy$, 23). $\oint\limits_L (y^2-x)dx + (x+2xy)^2 dy$, 24). $\oint\limits_l xy^2dx + (xy-2y^2)dy$,

25). $\oint\limits_L (2xy+3y^2)dx + 5x^2dy$, 26). $\oint\limits_L (xy+y^2)dx + (2y^2-x^2)dy$, 27). $\oint\limits_L (y^2-3x^2)dx + 2x^2dy$,

28). $\oint\limits_L (x-y)^2 dx + (3x^2+y^2)dy$, 29). $\oint\limits_L (x^2+5y^2)dx - 2x^2dy$, 30). $\oint\limits_L (3xy+x^2)dx + 8x^2dy$.