ТРИГОНОМЕТРИЯ

1). $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

$$\left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ x = 2\operatorname{arctg} t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\|$$

2). $\int \frac{dx}{\sin^n x \cdot \cos^m x}$; $\int f(\operatorname{tg} x)dx$; $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x \cdot \cos x + d}$

$(n + m - \text{четное})$

$$\left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x;\ \ x = \operatorname{arctg} t;\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\|$$

3). $\int f(\sin x)\cdot\cos x\, dx = \int f(\sin x)\cdot d(\sin x) = F(\sin x) + C$;

$\int f(\cos x)\cdot\sin x\, dx = \int f(\cos x)\cdot d(-\cos x) = -F(\cos x) + C$.

4). $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$

$(n + m - \text{четное})$

Понижение порядка по формулам:

$$\left\| \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\qquad \sin x\cdot\cos x = \frac{\sin 2x}{2} \right\|$$

5). $\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin(\alpha x+\beta x) + \sin(\alpha x - \beta x)\ dx$;

$\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\, dx = \frac{1}{2}\int(\cos(\alpha x-\beta x) - \cos(\alpha x + \beta x)\ dx$;

$\int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x\, dx = \frac{1}{2}\int(\cos(\alpha x-\beta x) + \cos(\alpha x + \beta x)\ dx$

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

1. $\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1);$ $\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C \\ \int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t} + C \end{array} \right.$

2. $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C;$

3. $\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C;$

4. $\int e^t dt = e^t + C;$

5. $\int \sin t\ dt = -\cos t + C;$

6. $\int \cos t\ dt = \sin t + C;$

7. $\int \operatorname{tg} t\ dt = -\ln|\cos t| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} t\ dt = \ln|\sin t| + C;$

9. $\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C;$

10. $\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C;$

11. $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{a} + C; \qquad = -\arccos\frac{t}{a} + C;$

12. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C; \qquad = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{t}{a} + C;$

14. $\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула используется для интегрирования произведений функций.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Приоритеты выбора функции u:

- высший для обратных функций: $\ln\ldots$, $\log_a \ldots$, $\mathrm{arc}\ldots$;
- далее x^{α} и многочлены.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

I. $$\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2})dx$$

Для избавления от иррациональностей используются следующие тригонометрические подстановки:

1) $\sqrt{a^2 - x^2} \to \begin{cases} x = a\sin t; \quad dx = a\cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \end{cases}$

2) $\sqrt{x^2 + a^2} \to \begin{cases} x = a \ \mathrm{tg}\ t; \quad dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2 + a^2} = \dfrac{a}{\cos t} \end{cases}$

3) $\sqrt{x^2 - a^2} \to \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}; \quad dx = \dfrac{a\sin t dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2 - a^2} = a \ \mathrm{tg}\ t \end{cases}$

Замечание: если в результате применения тригонометрической подстановки получается интеграл от сложной тригонометрической функции, то пробуют замену $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2} = t$ или метод интегрирования по частям.

II. $$\int R(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}, \sqrt[q]{(ax+b)^p}, \ldots)dx$$

Для рационализации подынтегральной функции показатели степеней $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \ldots$ приводятся к общему знаменателю k и выполняется замена переменной $\sqrt[k]{ax+b} = t$.

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

В квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$ выделяется полный квадрат по формуле и интеграл сводится к табличному.

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}) =$$

$$= a(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}) = a(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + Const)$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Сложная дробь для удобства интегрирования представляется в виде суммы мелких слагаемых.

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}dx$$

Алгоритм вычисления интеграла:

1) Если дробь неправильная (степень числителя ≥ степени знаменателя), то выделяется целая часть дроби (делением в столбик числителя на знаменатель).

2) Знаменатель дроби раскладывается на множители порядка не выше второго.

3) Правильная дробь разлагается в сумму простых дробей по формулам:

(1) $$\frac{\ldots}{(x-a)\cdot\ldots} = \frac{A}{x-a} + \ldots$$

(2) $$\frac{\ldots}{(x-a)^k\cdot\ldots} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-a} + \ldots$$

(3) $$\frac{\ldots}{(ax^2+bx+c)\cdot\ldots} = \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} + \ldots$$

4) Вычисляются неопределенные коэффициенты разложения и полученная сумма интегрируется.