ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **I порядка**.

Общий вид: $\boxed{F(x,y,y')=0}$

1. **ДУ с разделяющимися переменными**.

$$\boxed{y'=f(x)\cdot g(y)}$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+Const$$

2. **Однородные ДУ**.

$$\boxed{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Уравнения сводятся к ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=u\Rightarrow y=u\cdot x;\\ y'=u'\cdot x+u\end{cases}$$

3. **Линейные ДУ**.

$$\boxed{y'+P(x)\cdot y=Q(x)}$$

Замена:

$$\begin{cases}y=u\cdot v\\ y'=u'\cdot v+v'\cdot u\end{cases}$$

Подставляем замену в уравнение, группируем первое и третье слагаемое, приравниваем скобку к 0.

$$u'\cdot v+v'\cdot u+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x)$$

$$v\cdot\big(u'+P(x)\cdot u\big)+v'\cdot u=Q(x)$$

Уравнение распадается на два ДУ с разделяющимися переменными:

1) $u'+P(x)\cdot u=0$ (из уравнения находим функцию *u* (без *C*!)

2) $v'\cdot u=Q(x)$ (подставляя в уравнение найденную функцию *u*, находим функцию *v* (+*C*)).

Общее решение – по формуле: $y=u\cdot v$.

4. **Уравнение Бернулли**.

$$\boxed{y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n}$$

Уравнение решается по методу решения линейного уравнения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **II порядка, допускающие понижение порядка.**

Общий вид ДУ II порядка: $\boxed{F(x,y,y',y'')=0}$.

Порядок понижается, если набор (x,y,y') - неполный.

1. $\boxed{F(x,y',y'')=0}$ (нет ***y***).

Замена:

$$\begin{cases}y'=P(x)\\ y''=P'\end{cases}.$$

С помощью замены уравнение сводится к ДУ I порядка, решением которого является функция $P(x)+C_1=y'$.

Разделяя переменные в полученном уравнении и интегрируя выражение, получаем решение:

$$y=\int P(x)dx+C_1\cdot x+C_2.$$

2. $\boxed{F(y,y',y'')=0}$ (нет ***x***).

Замена:

$$\begin{cases}y'=P(y)\\ y''=P\dfrac{dP}{dy}\end{cases}.$$

С помощью замены уравнение сводится к ДУ I порядка, решением которого является функция $P(y)+C_1=y'$.

Разделяя переменные в полученном уравнении и интегрируя выражение, получаем решение:

$$x+C_2=\int\frac{dy}{P(y)+C_1}.$$

Если в уравнении отсутствуют и ***x*** и ***y***, то уравнение удобнее относить к первому типу.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **II порядка**.
(**Линейные, с постоянными коэффициентами и специальной функцией в правой части**).

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)}$$

($f(x)$ - специального вида).

Решения находятся отдельно для каждой из частей уравнения:
$\bar{y}$ - для левой части уравнения;
y^* - для правой части уравнения.

1. <u>Левая часть.</u>

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Записывается и решается характеристическое уравнение:

$$\boxed{ak^2 + bk + c = 0}$$

$$(y'' \to k^2;\ y' \to k;\ y \to 1)$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Характеристические числа:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Решение $\bar{y}$ выписывается по формулам согласно виду $k_{1,2}$.

1). $k_1 \neq k_2$ $(D > 0)$	$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2). $k_1 = k_2$ $(D = 0)$	$\bar{y} = C_1 e^{kx} + C_2 x \cdot e^{kx}$
3). $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(D < 0;\ \ -1 = i^2)$	$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

2. <u>Правая часть.</u>

Возможные виды $f(x)$:

(1). $\boxed{f(x) = (\text{многочлен}) \cdot e^{\alpha x}}$

(2). $\boxed{f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left((\text{многочлен}) \cdot \cos \beta x + (\text{многочлен}) \cdot \sin \beta x\right)}$.

Из функции $f(x)$ выписываем два числа:

$$\begin{array}{l} \alpha \to \text{из}\ \ e^{\alpha x} \\ \beta \to \text{из}\ \ \cos \beta x\ \ \text{или}\ \ \sin \beta x \end{array};$$

составляем число $(\alpha \pm i\beta)$, сравниваем с $k_1,\ k_2$.
r - число совпадений ($r = 0, 1, 2$).

Решение y^* выписывается по формуле:

$$\boxed{\begin{array}{l} y^* = x^r \cdot (\text{функция с неопределенными коэффициентами}, \\ \qquad\qquad \text{записанная согласно виду}\ f(x)) \end{array}}.$$

Т.е. $\boxed{y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[Q_{(1)n}(x) \cdot \cos \beta x + Q_{(2)n}(x) \cdot \sin \beta x\right]}$

При этом для $f(x)$ вида (2) $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$ всегда выписываются в паре, порядок многочлена при них выбирается максимальный.

Неопределенные коэффициенты в решении определяются путем нахождения $y^{*\prime};\ y^{*\prime\prime}$ и подстановки выражений для функции и её производных внутрь исходного уравнения.

Общее решение уравнения определяется формулой:

$$\boxed{y = \bar{y} + y^*}.$$

Если в правой части уравнения сумма из нескольких функций, то формула принимает вид:

$$\boxed{y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* + \ldots}.$$