

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ I порядка.

Общий вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

1. ДУ с разделяющимися переменными.

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + Const$$

2. Однородные ДУ.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Уравнения сводятся к ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x; \\ y' = u' \cdot x + u \end{cases}$$

3. Линейные ДУ.

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Замена:

$$\begin{cases} y = u \cdot v \\ y' = u' \cdot v + v' \cdot u \end{cases}$$

Подставляем замену в уравнение, группируем первое и третье слагаемое, приравниваем скобку к 0.

$$u' \cdot v + v' \cdot u + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

$$v \cdot (u' + P(x) \cdot u) + v' \cdot u = Q(x)$$

Уравнение распадается на два ДУ с разделяющимися переменными:

1) $u' + P(x) \cdot u = 0$ из уравнения находим функцию $u = u(x)$ (без C!)

2) $v' \cdot u = Q(x)$ подставляя в уравнение найденную функцию u , находим функцию $v = v(x, C)$

Общее решение – по формуле: $y = u(x) \cdot v(x, C)$.

4. Уравнение Бернулли.

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

Уравнение решается по методу решения линейного уравнения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ II порядка, допускающие понижение порядка.

Общий вид ДУ II порядка: $F(x, y, y', y'') = 0$.

Порядок понижается, если набор (x, y, y') - неполный.

1. $F(x, y', y'') = 0$ (нет y).

Замена:

$$\begin{cases} y' = P(x) \\ y'' = P' \end{cases}$$

С помощью замены уравнение сводится к ДУ I порядка, решением которого является функция $z(x; C_1) = y'$.

Разделяя переменные в полученном уравнении и интегрируя выражение, получаем решение:

$$y = \int P(x; C_1) dx + C_2.$$

2. $F(y, y', y'') = 0$ (нет x).

Замена:

$$\begin{cases} y' = P(y) \\ y'' = P \frac{dP}{dy} \end{cases}$$

С помощью замены уравнение сводится к ДУ I порядка, решением которого является функция $P(y; C_1) = y'$.

Разделяя переменные в полученном уравнении и интегрируя выражение, получаем решение:

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{P(y; C_1)}.$$

Если в уравнении отсутствуют x и y , то уравнение можно относить к любому типу. Выбирать тот метод решения, при котором получаются наименее трудоемкие интегралы.