

Примеры теоретических вопросов к экзамену

Каждый экзаменационный билет, помимо задач, содержит два теоретических вопроса наподобие приведённых ниже. При подготовке к экзамену постарайтесь ответить на вопросы из этого списка: это позволяет разобраться в происходящем на более глубоком уровне, чем просто решение типовых задач.

- Опишите все матрицы A размера 2×2 , для которых выполняется равенство: а) $A^T = A$; б) $A^T = 3A$.
- а) Пользуясь свойствами определителя, докажите, что если для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} , то $\det A \neq 0$.
б) Верно ли, что если A и B — квадратные матрицы одного размера и $\det A = 0$, то матричное уравнение $AX = B$ не имеет решений?
- Приведите пример матриц A и B , для которых:
а) определена матрица AB , но не определена матрица BA ;
б) определена матрица BA , но не определена матрица AB ;
в) матрицы AB и BA определены, но $AB \neq BA$;
г) матрицы AB и BA определены, причём $AB = BA$.
- Определите вид четырёхугольника $ABCD$ на плоскости (параллелограмм, трапеция, ромб, прямоугольник и т.д.), если:
а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$;
б) $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$, а векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны;
в) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.
- Обычно прямую в пространстве задают системой из двух линейных уравнений. А можно ли произвольную прямую в пространстве задать одним уравнением (не обязательно линейным)?
- Приведите примеры таких функций f и g , что:
а) существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$, но не существует пределов $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$;
б) существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x))$, но не существует пределов $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$;
в) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$, но $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.
- Приведите примеры таких функций f и g и точки x_0 , что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ и при этом $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a$, где: а) $a = 0$; б) $a = 2$; в) $a = +\infty$; г) $a = -\infty$.
- а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
б) Пользуясь первым замечательным пределом, докажите, что $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$.
- Зная, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, докажите, что: а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$.
- Выведите по определению правила дифференцирования основных элементарных функций: степенной (с произвольным показателем), показательной, логарифмической, тригонометрических.
- а) Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции. б) Зная, что $(e^x)' = e^x$ и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, вычислите производные $(a^x)'$ и $(\log_a x)'$, используя правило дифференцирования сложной функции.
- Сформулируйте правило дифференцирования обратной функции. Докажите с его помощью, что:
а) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; г) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
- Приведите пример такой функции f и точки x_0 , что $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ и при этом:
а) точка x_0 является точкой локального минимума функции f ;
б) точка x_0 является точкой локального максимума функции f ;
в) точка x_0 не является точкой локального экстремума функции f .