ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

1. Определители 2-го и 3-го порядков.

№1. Вычислить определитель второго порядка:

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\quad \text{б) }\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix};\quad \text{в) }\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

№2. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{б) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix};\quad \text{в) }\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Векторы.

№3. Доказать, что для любых трех векторов **a**, **b**, **c** и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b}, \gamma\mathbf{b}-\alpha\mathbf{c}, \beta\mathbf{c}-\gamma\mathbf{a}$ линейно зависимы.

№4. Проверить, что векторы **a**(–5, –1) и **b**(–1, 3) образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов **c**(–1, 2) и **d**(2, –6) в этом базисе.

№5. Из одной точки пространства отложены три вектора **a**, **b** и **c**. Доказать, что конец вектора **c** тогда и только тогда лежит на отрезке, соединяющем концы векторов **a** и **b**, когда выполнено равенство $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, где $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta=1$. В каком отношении конец вектора **c** делит этот отрезок?

№6. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 3:2. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

№7. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найти: 1) координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка

M лежит на отрезке AB и $|AM|:|BM| = m:n$; 2) координаты вектора $\overrightarrow{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $|AN|:|BN| = m:n$.

№8. В плоскости треугольника ABC найти точку O такую, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$. Существуют ли такие точки вне плоскости треугольника?

№9. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $|AM|:|BM| = m_1 : n_1$, $|AN|:|CN| = m_2 : n_2$. Точку пересечения отрезков BN и CM обозначим через O. Найти отношение $|BO|:|ON|$ и $|CO|:|OM|$.

№10(р). Вершина D параллелограмма $ABCD$ соединена с точкой K, лежащей на стороне BC, такой, что $|BK|:|KC| = 2:3$. Вершина B соединена с точкой L, лежащей на стороне CD, такой, что $|CL|:|LD| = 5:3$. В каком отношении точка M пересечения прямых DK и BL делит отрезки DK и BL?

№11. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 3:1, считая от вершины.

№12*. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что прямые EF и BC_1 параллельны. Найти отношение $|EF|:|BC_1|$.

3. <u>Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.</u>

№13. Даны три вектора: $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(5, 1, 1)$, $\mathbf{c}(0, 3, -2)$. Вычислить $\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

№14. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 4 и 2, а угол между базисными векторами равен 120°. Оносительно этой системы координат заданы вершины треугольника $A(-2,\ 2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1,\ 0)$. Найти длины сторон и углы треугольника.

№15. Дан вектор $\mathbf{a}(1, -1, 2)$. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$ и ортогональную составляющую вектора $\mathbf{b}$ относительно этой прямой, если вектор $\mathbf{b}$ имеет координаты: 1) (1, 1, 2); 2) (4, 0, –2).

№16. Даны два вектора: $\mathbf{a}(1, -1, 1)$ и $\mathbf{b}(5, 1, 1)$. Вектор $\mathbf{c}$ имеет длину 1, ортогонален вектору $\mathbf{a}$ и образует с вектором $\mathbf{b}$ угол $\arccos(\sqrt{2/27})$. Вычислить координаты вектора $\mathbf{c}$. Сколько решений имеет задача?

№17. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам взаимно перпендикулярны. Найти углы треугольника.

№18. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и P – середины ребер AD и CD соответственно, точки N и Q – центры граней BCD и ABC соответственно. Найти угол между прямыми MN и PQ.

№19. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(3, -1, 2)$, $\mathbf{b}(2, -3, -5)$;
2) $\mathbf{a}(2, -1, 1)$, $\mathbf{b}(-4, 2, -2)$;
3) $\mathbf{a}(6, 1, 0)$, $\mathbf{b}(3, -2, 0)$.

№20. Доказать тождества:

1) $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) & (\mathbf{b},\mathbf{b}) \end{vmatrix}$;

2) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$;

3) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\mathbf{d}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{d}) \end{vmatrix}$.

№21. Проверить, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе: 1) **a**(2, 3, 5), **b**(7, 1, –1), **c**(3, –5, –11); 2) **a**(2, 0, 1), **b**(5, 3, –3), **c**(3, 3, 10).

№22. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве равны соответственно 1, 2, $\sqrt{2}$, а углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 120°$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 45°$, $\angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 135°$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты (–1, 0, 2), (1, 1, 3) и (2, –1, 1).

№23. Доказать, что 1) если векторы [**a**, **b**], [**b**, **c**], [**c**, **a**] компланарны, то векторы **a**, **b**, **c** компланарны; 2) если векторы [**a**, **b**], [**b**, **c**], [**c**, **a**] компланарны, то они коллинеарны.

№24. Точка M лежит на ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем $|BM| : |MB_1| = 2:1$. Длина ребра куба равна a. Найти расстояние между прямыми CD_1 и MD.

№25. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, равна 3/4 площади треугольника ABC.

№26. Проверить, будут ли копмланарны векторы **l**, **m**, **n**; в случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую (здесь **a**, **b**, **c** – три некомпланарных вектора): $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

4. Замена базиса и системы координат.

№27. В пространстве даны два базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты (1, 1, 1), (–1, –2, –3), (1, 3, 6) соответственно. 1) Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ во втором базисе. 2) Найти координаты вектора во втором базисе, если известны его координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в первом базисе. 3) Найти координаты векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ во втором базисе.

№28. В пространстве даны две системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты (1, 1, 2), а базисные векторы второй системы координат имеют в базисе первой системы координаты (4, 2, 1), (5, 3, 2), (3, 2, 1) соответственно. 1) Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе. 2) Найти координаты точки во второй системе, если известны ее координаты x, y, z в первой системе. 3) Найти координаты точки O во второй системе координат и координаты векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в базисе второй системы.

№29. Координаты x, y каждой точки плоскости в системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ выражаются через координаты x', y' этой же точки в системе $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ формулами $x = 2x' - y' + 5$, $y = 3x' + y' + 2$. 1) Выразить координаты x', y' через координаты x, y. 2) Найти координаты начала O' и базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ первой системы координат во второй системе. 3) Найти координаты начала O и базисных векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ второй системы координат в первой системе.

№30(р). В параллелограмме *ABCD* точка *E* лежит на диагонали *BD*, причем $|BE| : |ED| = 1:2$. Найти координаты точки плоскости в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат $E, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}$.

№31. В трапеции *ABCD* диагонали пересекаются в точке *E*, а длины оснований *BC* и *AD* относятся как 2:3. Найти координаты точки плоскости в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат $E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$.

№32. Координаты x, y каждой точки плоскости в первой системе координат выражаются через координаты x', y' этой же точки во второй системе координат соотношениями $x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}$, $y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}$. Первая система координат является прямоугольной. При каком необходимом и достаточном условии вторая система координат также является прямоугольной?

№33. На плоскости даны две прямоугольные системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты (1, 3), а векторы $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ =135° в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе.

№34. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты (–1, 3, 5), вектор $\mathbf{e}'_1$ образует углы равные 60° с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и острый угол с вектором $\mathbf{e}_3$. Вектор $\mathbf{e}'_2$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образует с вектором $\mathbf{e}_2$ острый угол. Тройки $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ одинаково ориентированы. Найти координаты точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе.