

ТРЕТЬЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ВАРИАНТ №0.

№1 (1 балл). Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Определить, может ли функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \bar{y}_1 + ix_1 \bar{y}_2 - ix_2 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются.

№2 (1 балл). Пусть $t_1, \dots, t_m$ – попарно различные вещественные числа. Доказать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n ($n < m$) с вещественными коэффициентами скалярное произведение можно задать формулой

$$(f, g) = \sum_{k=1}^m f(t_k)g(t_k).$$

Является ли эта функция евклидовым скалярным произведением, если $m \leq n$?

№3 (3 балла). Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова пространства координатными столбцами $(1, -1, 1, -1)^T$, $(4, -2, 4, -2)^T$, $(-2, 7, -4, 7)^T$, $(2, 7, -2, 5)^T$. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов.

№4 (1 балл). Линейное преобразование φ

1) n -мерного евклидова пространства, 2) n -мерного унитарного пространства состоит в растяжении по n взаимно ортогональным направлениям с коэффициентом λ_j по j -му направлению (в случае унитарного пространства числа λ_j могут быть комплексными). Найти сопряженное преобразование φ^* .

№5 (2 балла). Линейное преобразование φ унитарного пространства задано в некотором базисе матрицей A ; Γ – матрица Грама этого базиса. Определить, является ли φ самосопряженным, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \\ 2 & -3i & 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

№6 (2 балла). Определить, является ли унитарным линейное преобразование φ двумерного унитарного пространства, действующее на векторы ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ по формулам: $\varphi(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + (1+2i)\mathbf{e}_2)$, $\varphi(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{3}((1+2i)\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$.

№7 (2 балла). Привести квадратичную форму к каноническому виду. Найти замену базиса.

$$3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4.$$

№8 (3 балла). Проверить, что по меньшей мере одна из данных квадратичных форм является положительно определенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду. Записать этот диагональный вид.

$$f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4,$$

$$g = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4.$$