

ВТОРАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ВАРИАНТ №0.

1 (2 балла). Образуют ли все n -мерные векторы, у которых первая и последняя координаты равны между собой, линейное подпространство? Если да, укажите его базис и размерность.

2 (2 балла). Найдите размерность и базис линейного пространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3 (3 балла). Разложить данный вектор $\mathbf{x} = (-2, -2, -2)^T$ из трехмерного арифметического пространства в сумму двух векторов, один из которых лежит в P , а другой - в Q , где P – линейная оболочка системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, а Q – линейная оболочка вектора $\mathbf{b}$. Проверить единственность разложения. $\mathbf{a}_1 = (4, 3, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

4 (3 балла). Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств четырехмерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4$ и $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_4$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 (2 балла). Доказать, что: 1) отображение, обратное к изоморфизму, существует и также является изоморфизмом; 2) линейное отображение, не являющееся изоморфизмом, не имеет обратного.

6 (3 балла). Линейное преобразование вещественного n -мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования и выяснить геометрический смысл преобразования.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$