ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

1. Евклидовы и унитарные пространства

№1. Пусть в линейном пространстве заданы две операции скалярного умножения $(\mathbf{x},\mathbf{y})_1$ и $(\mathbf{x},\mathbf{y})_2$. Показать, что для любых чисел $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, одновременно не равных нулю, операцией скалярного умножения будет и $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})_1 + \mu(\mathbf{x},\mathbf{y})_2$.

№2. Обозначим через $x_1,...,x_n$ и $y_1,...,y_n$ координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе n-мерного вещественного линейного пространства. Определить, может ли заданная функция $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполнены:

а) $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1, \quad n = 2$; б) $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2, \quad 1)\ n = 2, \quad 2)\ n \geq 3$.

№3. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Определить, может ли функция $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются:

а) $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (3+i)x_1\overline{y}_2 + (3-i)x_2\overline{y}_1$;

б) $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$.

№4. Показать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение может быть задано формулой: $(p,q) = \sum\limits_{k=0}^{n} p^{(k)}(a)\, q^{(k)}(a)$, где $p^{(k)}(a)$ и $q^{(k)}(a)$ – производные k-го порядка, вычисленные в некоторой точке a вещественной оси.

№5. В вещественном или комплексном арифметическом пространстве скалярное умножение задано как функция компонент $x_1,...,x_n$ и $y_1,...,y_n$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из данных векторов $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_n$. Найти выражение скалярного произведения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через их компоненты в базисе $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_n$.

а) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2, \quad \mathbf{f}_1 = (1,-1)^T, \quad \mathbf{f}_2 = (1,1)^T$;

б) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$, $\mathbf{f}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{f}_2 = (1, -1)^T$.

№6. Векторы **x** и **y** евклидова или унитарного пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ координатными столбцами ξ и η соответственно, и известна матрица Грама Γ_f базиса $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ и скалярное произведение векторов **x** и **y**, если

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2,\quad \Gamma_\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

№7. Найти угол между векторами $(1, 2, 2, 1)^T$ и $(1, 1, 1, 2)^T$ в пространстве $\mathbb{R}_4$ со стандартным скалярным произведением.

№8. В линейном пространстве непрерывных на отрезке [0, 1] функций с обычными операциями сложения и умножения на число скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Доказать, что угол между двумя соседними векторами $f_n = t^{n-1}$ и $f_{n+1} = t^n$ системы векторов $1, t, \ldots, t^n, \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

2. Ортогональные системы векторов. Ортогональные подпространства

№9. 1) Для векторов евклидова пространства установить теорему, обратную теореме Пифагора: если $|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2|^2 = |\mathbf{f}_1|^2 + |\mathbf{f}_2|^2$, то векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ ортогональны.

2) Показать, что для унитарного пространства такая теорема не верна. Найти условия на векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, при которых $|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2|^2 = |\mathbf{f}_1|^2 + |\mathbf{f}_2|^2$.

№10. 1) Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ и $\eta_1,\ldots,\eta_n$ – координаты векторов **x** и **y** в некотором базисе *n*-мерного евклидова пространства. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов **x** и **y** вычисляется по формуле $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$ в том и только в том случае, когда этот базис является ортонормированным.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для унитарного пространства.

№11. Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова или унитарного пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов: а) $(3, -1, -2)^T$, $(4, 0, -1)^T$, $(5, 1, 0)^T$;

б) $(1, 2, -1, 1)^T$, $(-5, -5, 4, -2)^T$, $(-3, 6, 2, 0)^T$.

№12. Систему векторов $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

№13. Подпространство L евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис в L.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 \qquad - 3x_3 - 6x_4 &= 0. \end{aligned}$$

№14. Дано евклидово пространство многочленов степени не выше 3, заданных на отрезке [–1, 1], со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. Построить систему векторов, биортогональную системе 1, t, t^2 и принадлежащую линейной оболочке этих векторов.

№15. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $(1, 3, -1, 1)^T$, $(2, 5, -2, 3)^T$.

№16. Найти базис ортогонального дополнения подпространства векторов, координаты $x_1, ..., x_n$ которых в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 0, \\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

№17. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

№18. Найти коэффициенты тригонометрического многочлена $T_n(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, доставляющего наименьшее значение интегралу $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (|t| - T_n(t))^2\, dt$. Вычислить это значение.

3. <u>Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств</u>

№19. Линейное подпространство L четырехмерного евклидова пространства E в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ задано системой линейных уравнений. Найти в том же базисе матрицу ортогонального проектирования на L.

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0,$$
$$3\xi_2 - 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0.$$

№20. Найти преобразование, сопряженное преобразованию φ евклидовой векторной плоскости, если:

а) φ – ортогональное отражение в подпространстве, натянутом на вектор $\mathbf{a} \neq \theta$.

б) φ – поворот плоскости на угол α по часовой стрелке.

№21. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 выбран ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Найти преобразование φ*, сопряженное преобразованию φ пространства E_3, если φ – поворот вокруг оси, определяемой вектором $\mathbf{f} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ на угол $2\pi/3$. Найти матрицу преобразования.

№22. Определить, является ли самосопряженным (либо найти условия, при которых является самосопряженным) линейное преобразование

1) ортогонального проектирования евклидовой плоскости на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} \neq \theta$.

2) задачи №21 .

№23. Определить, является ли (либо найти условия, при которых является) ортогональным или унитарным преобразование φ

1) задачи №20 а), 2) задачи №20 б), 3) задачи №21.

№24. Преобразование евклидова пространства многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$ ставит в соответствие многочлену его производную. Найти матрицу сопряженного преобразования в базисе 1, t, t^2.

№25. Пусть L – инвариантное подпространство линейного преобразования φ. Доказать, что ортогональное дополнение $\mathrm{L}^{\perp}$ подпространства L является инвариантным подпространством сопряженного преобразования φ*.

№26(р). Может ли матрица самосопряженного преобразования евклидова пространства в некотором базисе быть несимметричной?

№27. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования φ, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix};\qquad \text{б)}\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

№28*. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов преобразования, являющегося

а) гомотетией с коэффициентом k;

б) ортогональным проектированием на подпространство L;

в) ортогональным отражением в подпространстве L.

№29. Пусть L – ненулевое линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства. Является ли ортогональным (унитарным) преобразованием:

а) ортогональное проектирование на L?

б) ортогональное отражение в подпространстве L?

№30. Линейное преобразование φ евклидова пространства переводит систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе координатными столбцами $\mathbf{a}_1=(3,4)^T$, $\mathbf{a}_2=(1,3)^T$, в систему векторов, заданных в том же базисе координатными столбцами $\mathbf{b}_1 = (5, 0)^T$, $\mathbf{b}_1 = (3, 1)^T$ соответственно. Проверить, является ли преобразование φ ортогональным.

№31. Пусть A – матрица линейного преобразования φ в некотором базисе, Г – матрица Грама этого базиса. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица A для того, чтобы φ было:

а) ортогональным преобразованием евклидова пространства;

б) унитарным преобразованием унитарного пространства?

Отдельно рассмотреть случай, когда базис ортонормированный.

№32. Может ли ортогональное преобразование:

1) не иметь собственных векторов;

2) обладать базисом из собственных векторов;

3) иметь по крайней мере один собственный вектор, но не иметь базиса из собственных векторов?

Привести соответствующие примеры.

4. Линейные функции

№33. Пусть C – квадратная матрица порядка n. Сопоставим каждой квадратной матрице X порядка n число tr($C\,X$). (tr A – след матрицы A; определяется как сумма диагональных элементов матрицы.) Показать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathbb{R}_{n\times n}$, и найти ее координатную строку (координатную матрицу).

№34. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $n \le 3$ число $f(p) = \int\limits_0^1 p(t^2)\,dt$.

Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве многочленов $\mathrm{P}^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов 1, t, t^2, t^3.

№35. Пусть k – натуральное число, $k \le n$, t_0 – вещественное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени не выше n значение его k-й производной при

$t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathrm{P}^{(n)}$. Вычислить ее координатную строку в базисах: а) $1,\ t, ..., t^n$; б) $1,\ t - t_0, ..., (t - t_0)^n$.

№36. Подпространство $\mathbb{N}$ в L_5 задано в некотором базисе как линейная оболочка векторов с координатными столбцами $(0, 0, 1, 1, 1)^T$, $(0, 1, 0, 0, 1)^T$. Найти в том же базисе координатные строки всех линейных функций, обращающихся в ноль на $\mathbb{N}$.

5. <u>Билинейные и квадратичные формы</u>

№37. Составить матрицу данной билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в двумерном линейном пространстве:

а) $x_1 y_1$; б) $2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - 5x_2 y_2$.

№38. Восстановить симметричную билинейную форму в трехмерном линейном пространстве по данной квадратичной форме и составить ее матрицу: $x_1^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 5x_2^2 + 12x_2 x_3 + 7x_3^2$.

№39. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду двумя способами: с помощью метода Лагранжа и с помощью элементарных преобразований ее матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы. а) $x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 3x_2^2 - 6x_2 x_3 - 4x_3^2$;

б) $9x_1^2 - 12x_1 x_2 - 6x_1 x_3 + 4x_2^2 + 4x_2 x_3 + x_3^2$;

в) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_3 x_4$.

№40. Привести к каноническому виду данную билинейную форму $x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.

№41. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $-9x_1^2 + 6\lambda x_1 x_2 - x_2^2$ положительно, отрицательно определена или полуопределена?

№42. Квадратичная функция записана в ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид. Найти канонический вид, ранг и сигнатуру квадратичной формы.

а) $2x_1^2-4x_1x_2+9x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$; б) $x_1^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_3^2$.

№43. Пусть все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A принадлежат отрезку $[a, b]$. Доказать, что квадратичная форма с матрицей $A-\lambda E$ положительно определена при $\lambda<a$ и отрицательно определена при $\lambda>b$.

№44. Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду и записать этот диагональный вид обеих форм.

а) $f=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$, $\quad g=4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2$;

б) $f=5x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$, $\quad g=5x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_3^2$.

№45. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму $g=41x_1^2-18x_1x_2+2x_2^2$ к каноническому виду, а квадратичную форму $f=89x_1^2-42x_1x_2+5x_2^2$ к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f.

№46*. Привести квадратичную форму $9x_1^2+24(i+1)x_1x_2+16x_2^2$ к каноническому виду.

ОТВЕТЫ

1. <u>Евклидовы и унитарные пространства</u>

№2. а) Нет, нарушается свойство положительности; б) 1) может; 2) нет, нарушается свойство положительности, но $F(\mathbf{x},\mathbf{x})\geq 0$. Указание: при проверке свойства положительности воспользоваться приведением $F(\mathbf{x},\mathbf{x})$ к сумме квадратов.

№3. а) Нет, нарушается свойство положительности; б) может.

№5. а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$. №6. $\Gamma_\mathrm{e}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y})=-1$.

№7. $\arccos\sqrt{7/10}$. №8. Указание: $\cos\angle(f_n, f_{n+1})=\sqrt{1-\dfrac{1}{4n^2}}$.

2. <u>Ортогональные системы векторов. Ортогональные подпространства</u>

№9. 2) $|\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2|^2 = |\mathbf{f}_1|^2 + |\mathbf{f}_2|^2$ равносильно $\mathrm{Re}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$. Если $\mathbf{x} \neq \theta$, $\mathbf{f}_1 = i\mathbf{x}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{x}$, то $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$, но $\mathrm{Re}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$.

№10. 2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\overline{\eta}_n$. №11. а) $\frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$;

б) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(-2, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(0, 2, 1, -3)^T$.

№12. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)^T$.

№13. Базис в L образуют, например, векторы с координатными столбцами $\frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1)^T$. №14. $\frac{3}{8}(3-5t^2)$, $\frac{3}{2}t$, $-\frac{15}{8}(1-3t^2)$.

№15. Например: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)^T$.

№16. Искомый базис образуют, например, векторы с координатными столбцами $(0, 1, 1, -1)^T$, $(1, 0, -2, 3)^T$. №17. Например, $x_1 + x_2 = 0$, $2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

№18. $a_0 = \frac{\pi}{2}$; $a_k = 2\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$; $b_k = 0$; $\frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(2k+1)^{-4}$.

3. Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств

№19. $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

№20. а) $\varphi^* = \varphi$; б) $\varphi^* = \varphi^{-1}$. №21. $\varphi^* = \varphi^{-1}$. №22. 1) является; 2) нет.

№23. 1), 2), 3) является. №24. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

№26. *Решение*. В ортонормированном базисе не может, т.к. $\Gamma = E$ и получается $A^* = A^T$. А, поскольку преобразование самосопряженное, $A^* = A$, значит, $A = A^T$.

Рассмотрим преобразование с несимметричной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в неортонормированном базисе $\mathbf{e}_1 = (1, 1)^T$, $\mathbf{e}_2 = (1, 0)^T$. Убедимся в том, что оно самосопряженное. $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\varphi^*(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0 \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 0 \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + (x_1 + x_2) y_1 \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + (x_1 + x_2) y_2 \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

$$(\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) = 0 \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1 (y_1 + y_2) \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0 \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_2 (y_1 + y_2) \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

№27. а) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$, $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$; б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 7$, $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$.

№28*. а) Все собственные значения равны *k*, ортонормированный базис из собственных векторов – произвольный онб пространства;

б) собственному значению $\lambda = 1$ отвечает произвольный онб в L, собственному значению $\lambda = 0$ – произвольный онб в $\mathrm{L}^{\perp}$;

в) собственному значению $\lambda = 1$ отвечает произвольный онб в L, собственному значению $\lambda = -1$ – произвольный онб в $\mathrm{L}^{\perp}$.

№29. а) Нет; б) является. №30. Является. №31. а) $A^T \Gamma A = \Gamma$; б) $\overline{A}^T \overline{\Gamma} A = \overline{\Gamma}$. Если базис ортонормирован, то: а) $A^T A = E$; б) $\overline{A}^T A = E$. №32. 1), 2), 3) Может.

4. Линейные функции

№33. C^T. №34. $(1,\ 1/3,\ 1/5,\ 1/7)$. №35. а) $(\chi_0, ..., \chi_n)$ где $\chi_i = 0$ при $i \le k$ и $\chi_i = i(i-1)...(i-k)t_0^{i-k-1}$ при $i > k$; б) $(0, ..., 0, k!, 0, ..., 0)$, (*k*! на (*k* + 1)-м месте.

№36. $(c_1, c_3, c_3 - c_2, c_2, -c_3)$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные числа.

5. Билинейные и квадратичные формы

№37. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, x_1^2; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$. №38. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

$$x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + 5x_2 y_2 + 6x_2 y_3 + 6x_3 y_2 + 7x_3 y_3.$$

№39. а) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 1, 2, –1; б) $x_1'^2$; 1, 1, 0, 1; в) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$; 4, 4, 0, 4.

№40. $x_1' y_1' + x_2' y_2'$. №41. Отрицательно определена при $|\lambda| < 1$, неположительно при $\lambda = \pm 1$.

№42. а) $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $\mathbf{e}_3' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, 1)^T$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$x_1'^2 + 2x_2'^2 + 10x_3'^2$; 3, 3 ;б) $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)^T$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $\mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$

$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\frac{3}{2}x_1'^2 + \frac{3}{2}x_2'^2$; 2, 2.

№44. а) $x_1 = \frac{x_1''}{\sqrt{2}} - x_2''$, $x_2 = \frac{x_1''}{3\sqrt{2}} + \frac{2x_2''}{3}$; $f = x_1''^2 + x_2''^2$, $g = 5x_1''^2 - 4x_2''^2$;

б) $x_1 = \frac{x_2''}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{x_1''}{\sqrt{3}} + \frac{x_2''}{\sqrt{2}} - \frac{2x_3''}{\sqrt{6}}$, $x_3 = \frac{x_1''}{\sqrt{3}} - \frac{x_2''}{\sqrt{2}} + \frac{x_3''}{\sqrt{6}}$;

$f = 3x_1''^2 + 2x_2''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$.

№45. $x_1''^2 + 4x_2''^2$. №46*. $x_1'^2$.