ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА
имени И.М. ГУБКИНА

Кафедра высшей математики

Д.Л. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Методическое пособие

Москва 2009

УДК 514.752.2
Б43

Рецензенты:

А.И. Ляхов, доктор технических наук
Н.Г. Гамкрелидзе, доктор физико-математических наук, профессор

Белоцерковский Д.Л.
Кривые второго порядка на плоскости: методическое пособие М.: РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2009. – 42 с.

Настоящее учебно-методическое пособие входит в серию учебно-методических изданий, посвященных различным разделам курса высшей математики для технических высших учебных заведений. Изложены основные понятия и факты, связанные с теорией кривых второго порядка. Приведены подробно разобранные примеры, проиллюстрированные большим числом рисунков.

Пособие предназначено для студентов различных специальностей РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Кривые второго порядка были известны еще в Древней Греции. Тогда они назывались «коническими сечениями», изучению свойств которых посвящались научные трактаты. Применение изученных греками кривым нашлось в XVII – XVIII веках в баллистике и астрономии: выяснилось, что пушечное ядро летит по параболической траектории, а движение планет происходит по эллиптическим орбитам. Позже в небесной механике были введены понятия космических скоростей. Оказалось, что тело, запущенное с земной поверхности с разной начальной скоростью может двигаться в космическом пространстве по различным траекториям, представляющие собой кривые второго порядка: окружность, эллипс, параболу, гиперболу.

В XX веке многие физические эксперименты показали, что частицы в этих экспериментах двигаются по траекториям, являющимися кривыми второго порядка. Например, заряженная частица в однородном электрическом поле плоского конденсатора движется по параболе, или альфа-частицы в опыте Резерфорда при рассеивании их ядром атома движутся по гиперболам. В этой связи, изучение кривых второго порядка в рамках курса высшей математики имеет весьма важное как теоретическое, так и прикладное значение.

Настоящее пособие посвящено рассмотрению кривых второго порядка и их некоторым часто используемым свойствам. Содержание пособия разбито на шесть параграфов. Каждой кривой второго порядка посвящен отдельный параграф, в котором подробно разобран пример приведения уравнения кривой к каноническому виду со всеми сопутствующими рассмотрению арифметическими выкладками. Детально разобраны приемы преобразования декартовой системы координат. Проведенные математические действия проиллюстрированы большим числом рисунков. Для построения кривых второго порядка в разобранных примерах используется система компьютерной алгебры **«*Mathematica*»,** популяризация применения которой студентами является одной из задач пособия. Приведены простейшие команды системы **«*Mathematica*»,** используемые для построения кривых. В конце пособия приводятся задачи для самостоятельного решения, помогающие читателю лучше усвоить изложенный материал.

Настоящее пособие будет полезно студентам РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина при изучении соответствующей темы в курсе высшей математики.

1. Введение

Кривыми второго порядка на плоскости называются множества точек $A(x, y)$, координаты которых удовлетворяют следующему уравнению второй степени:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad (1)$$

где x, y – переменные, a, b, c, d, e, f – числовые коэффициенты, для которых $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Далее будем называть в уравнении (1) слагаемые $ax^2,\ bxy,\ cy^2$ квадратичными членами, слагаемые $dx,\ ey$ – линейными членами, слагаемое f – свободным членом.

Некоторые кривые второго порядка изучались еще в школьном курсе алгебры: например, парабола, описываемая в декартовой системе координат уравнением $y = ax^2 + bx + c$, окружность с уравнением $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$, где (x_o, y_o) – координаты центра окружности, а R – ее радиус, или гипербола $xy = 1$, уравнение которой записывается в виде $y = 1/x$.

В данном пособии будут рассмотрены все возможные кривые второго порядка, которые удовлетворяют уравнению (1). Для упрощения анализа уравнения (1) попытаемся рассмотреть его в другой декартовой системе координат, в которой уравнение (1) будет иметь более простой вид.

Рассмотрим вначале некоторые важные преобразования декартовых координат на плоскости. Эти преобразования будут необходимы для упрощения уравнения (1).

Пусть имеются две системы координат Oxy и $O'x'y'$. Пара чисел (x, y) является координатами произвольной точки A в системе Oxy, а (x', y') координаты той же точки в системе $O'x'y'$. Пусть система координат $O'x'y'$ получена из Oxy с помощью одного из рассмотренных ниже частных случаев.

I. Параллельный перенос

На рисунке 1 показан параллельный перенос осей с началом координат O в точку O'. Если точка O' имеет координаты (x_o, y_o) в системе Oxy и $(0,0)$ в $O'x'y'$, то координаты произвольной точки в системах Oxy и $O'x'y'$ связаны соотношениями:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + x_o \\ y &= y' + y_o \end{aligned}} \tag{2}$$

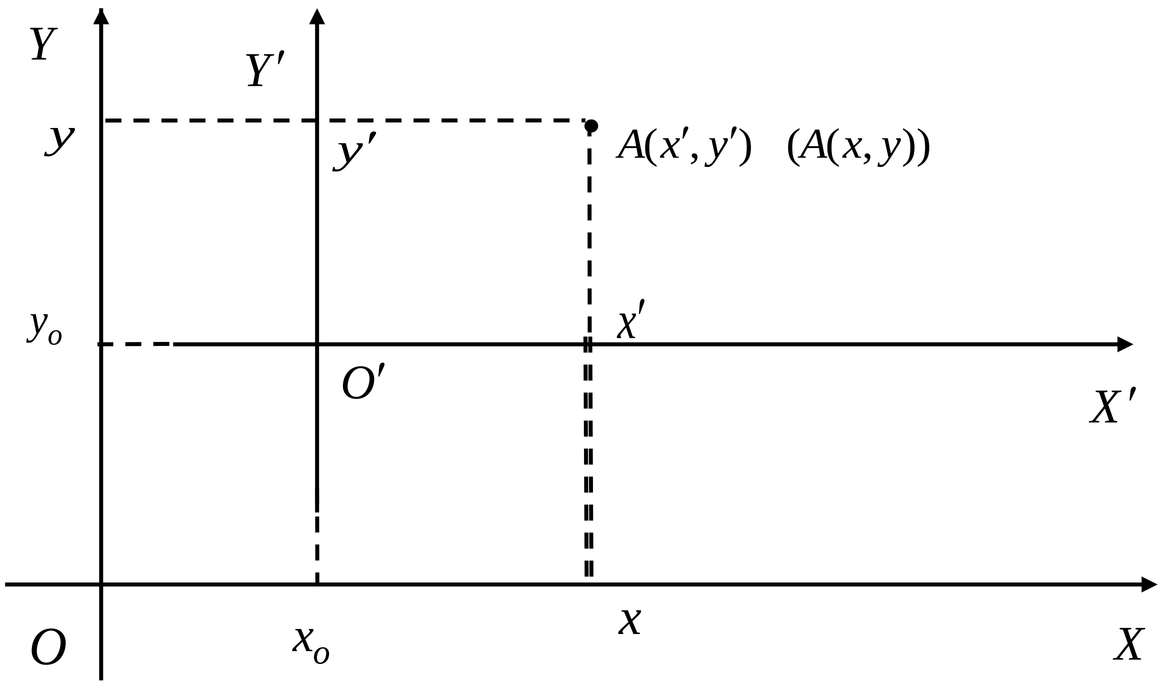

Рис.1.

II. Поворот

На рисунке 2 изображен поворот вокруг начала координат системы координат Oxy на угол φ. Заметим, что при $\varphi > 0$ поворот осуществляется против хода часовой стрелки, и при $\varphi < 0$ – по часовой стрелке.

В отличие от параллельного переноса, поворотам системы координат в школьной программе уделено меньше внимания, поэтому рассмотрим этот вопрос более подробно.

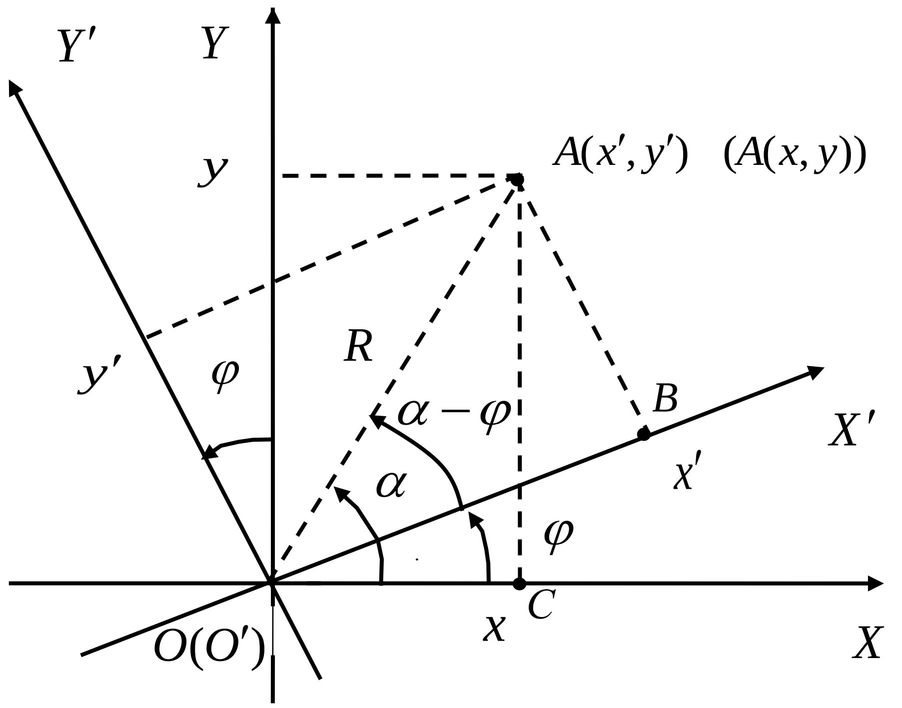

Рис.2.

В дальнейшем, нам понадобятся формулы, связывающие координаты x и y, и координаты x' и y'. Получим эти формулы, решив несложную геометрическую задачу. Пусть α угол между направлениями OA и OX. Рассмотрим простейшие тригонометрические соотношения в треугольниках OAB и OAC. Имеем $OA = R, OC = x, OB = x', AC = y, AB = y'$. Тогда B и C – проекции точки A на оси OX и OY соответственно (рис.2).

$$\begin{aligned} x &= R\cos\alpha; \\ y &= R\sin\alpha; \\ x' &= R\cos(\alpha - \varphi); \\ y' &= R\sin(\alpha - \varphi). \end{aligned} \qquad (3)$$

Применяя формулы синуса и косинуса разности, а также соотношения (3), получаем

$$x' = R\cos(\alpha - \varphi) = R(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) =$$
$$= (R\cos\alpha)\cos\varphi + (R\sin\alpha)\sin\varphi = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y' = R\sin(\alpha - \varphi) = R(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi) =$$
$$= (R\sin\alpha)\cos\varphi - (R\cos\alpha)\sin\varphi = y\cos\varphi - x\sin\varphi.$$

Таким образом, получены формулы, выражающие координаты x' и y' точки A в системе координат $O'x'y'$ через ее координаты x и y в системе координат Oxy:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= y\cos\varphi - x\sin\varphi. \end{aligned}} \qquad (4)$$

Теперь выразим координаты x и y через x' и y'. Для этого умножим выражение для x' в формуле (4) на $\sin\varphi$, а выражение для y' в формуле (4) – на $\cos\varphi$ и сложим:

$$x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = x\cos\varphi\sin\varphi + y\sin^2\varphi + y\cos^2\varphi -$$
$$- x\sin\varphi\cos\varphi = y(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = y$$

Таким образом, имеем выражение для y:

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Подставим это выражение в формулу для y' из (4) и получим:

$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi = (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\cos\varphi - x\sin\varphi =$$
$$= x'\sin\varphi\cos\varphi + y'\cos^2\varphi - x\sin\varphi.$$

Далее, выразим x через x' и y':

$$x\sin\varphi = y'(\cos^2\varphi - 1) + x'\sin\varphi\cos\varphi \quad \Rightarrow$$
$$x\sin\varphi = -y'\sin^2\varphi + x'\sin\varphi\cos\varphi \quad \Rightarrow$$
$$x = -y'\sin\varphi + x'\cos\varphi$$

Таким образом, выведены очень важные для дальнейшем изложении материала формулы преобразования координат при повороте системы координат на угол φ:

$$\boxed{\begin{aligned}x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,\\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.\end{aligned}} \tag{5}$$

Рассмотрим общий случай, когда для преобразования координат требуется рассмотреть оба частных случая: параллельный перенос и поворот.

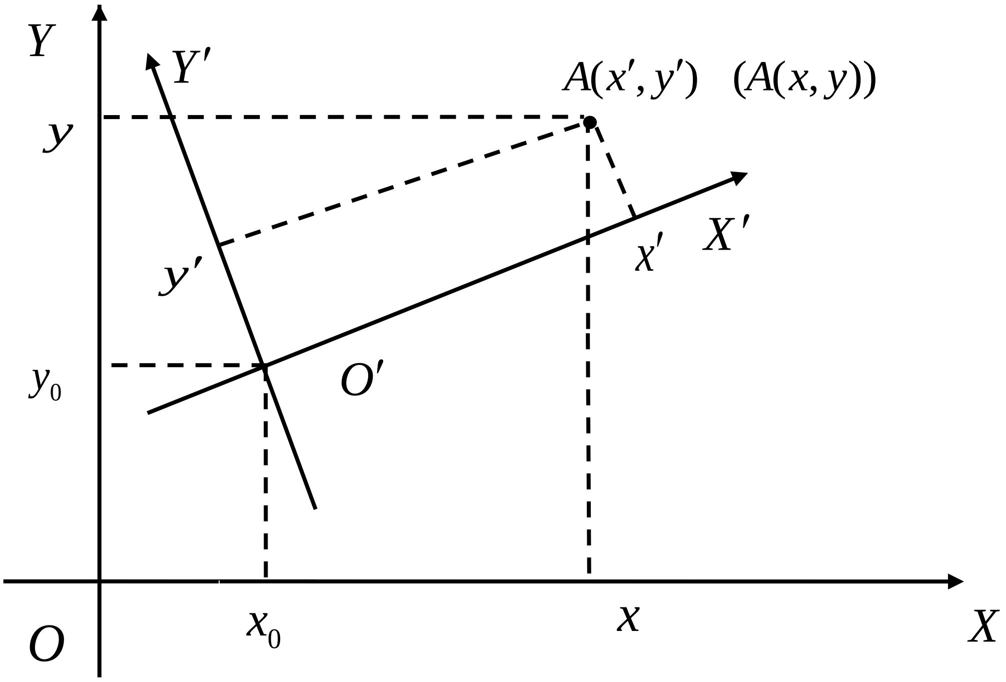

Рис.3.

Применяя формулы (2) и (5), получаем формулу преобразования координат в общем случае, когда система координат $O'x'y'$ получена из системы координат Oxy путем параллельного переноса в точку (x_o, y_o) и поворота на угол φ.

$$\boxed{\begin{aligned}x &= x_o + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,\\ y &= y_o + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.\end{aligned}}$$

2. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

В пункте 1 получены формулы перехода от одной системы координат к другой с помощью параллельного переноса, задаваемого с помощью формул (2), или поворота на угол φ, который определяется с помощью формул (5).

Рассмотрим вопрос об упрощении уравнения $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, описывающего кривую второго порядка, при преобразовании системы координат на плоскости.

Начнем со случая $b = 0$. Это означает, что в уравнении отсутствует член, содержащий xy. Имеем уравнение $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Упростить его можно, если применить параллельный перенос. Для этого заменим x и y в рассматриваемом уравнении на x' и y' по формулам (2):

$$a(x' + x_o)^2 + c(y' + y_o)^2 + d(x' + x_o) + \\ + e(y' + y_o) + f = 0$$

Приведем подобные слагаемые. Заметим, что x_o и y_o параметры, которые можно выбрать по своему усмотрению.

$$a(x')^2 + c(y')^2 + x'(2ax_o + d) + y'(2cy_o + e) + \\ + ((x_o)^2 + (y_o)^2 + dx_o + ey_o + f) = 0$$

Положим $2ax_o + d = 0$, $2cy_o + e = 0$ и получим выражения для x_o и y_o: $x_o = -d/2a$; $y_o = -e/2c$.

Обозначим $f' = (x_o)^2 + (y_o)^2 + dx_o + ey_o + f$.

Таким образом, получим новое уравнение кривой второго порядка $a(x')^2 + c(y')^2 + f' = 0$, которое не содержит линейных членов. Следовательно, с помощью параллельного переноса системы координат можно упростить (1), если $b = 0$.

Пусть теперь $b \neq 0$.

Покажем теперь прием, с помощью которого в (1) можно избавиться от квадратичного члена xy. Для этого используем поворот системы координат на угол φ. Подставим в (1) формулы (5), заменив x и y на x' и y'.

$$a(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + b(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + \\ + y'\cos\varphi) + c(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + d(x'\cos\varphi - \\ - y'\sin\varphi) + e(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + f = 0$$

Приведем подобные слагаемые. Заметим, что угол φ – параметр, который можно выбрать по своему усмотрению.

$$(x')^2(a\cos^2\varphi + b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi) + (y')^2(a\sin^2\varphi - \\ - b\cos\varphi\sin\varphi + c\cos^2\varphi) + x'y'(-2a\cos\varphi\sin\varphi + \\ + b\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi + 2c\cos\varphi\sin\varphi) + x'(d\cos\varphi + \\ + e\sin\varphi) + y'(e\cos\varphi - d\sin\varphi) + f = 0$$

Введем новые буквенные обозначения.

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\varphi + b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi, \\ b' &= a\sin^2\varphi - b\cos\varphi\sin\varphi + c\cos^2\varphi, \\ c' &= d\cos\varphi + e\sin\varphi, \\ d' &= e\cos\varphi - d\sin\varphi, \\ e' &= f \end{aligned} \qquad (6)$$

Выберем угол φ так, чтобы коэффициент перед квадратичным членом xy равнялся 0. Тогда получим уравнение для неизвестного φ:

$$-2a\cos\varphi\sin\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2c\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

Для упрощения решаемого уравнения используем известные из школьного курса алгебры тригонометрические формулы синуса и косинуса двойного угла

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi; \quad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

В результате получим следующее уравнение

$$(-a+c)\sin 2\varphi + b\cos 2\varphi = 0 \qquad (7)$$

Покажем, что всегда существует угол φ, удовлетворяющий полученному уравнению.

Если $a \neq c$, то разделим уравнение на $\cos 2\varphi$. Тогда из (7) получим: $\mathrm{tg}\, 2\varphi = b/(a-c)$. Это уравнение имеет решение для любых значений $a,b,c\ (a \neq c)$, причем $\varphi \neq \pi/4$ и $\cos 2\varphi \neq 0$.

Если $a = c$, то $\cos 2\varphi = 0$ имеет, например, решение $\varphi = \pi/4$.

Далее, используя новые обозначения (6), переписываем уравнение (1), которое не содержит квадратичного члена $x'y'$.

$$a'(x')^2 + b'(y')^2 + c'x' + d'y' + e' = 0 \qquad (8)$$

Уравнение (8) записано в новой системе координат $O'x'y'$, полученной из системы координат Oxy с помощью поворота на угол φ. Покажем, что дальнейшее рассмотрение уравнения (8) сводится к исследованию всего двух случаев: 1) $a' \neq 0, b' \neq 0$; 2) $a' = 0, b' \neq 0$ $a' = 0, b' \neq 0$.

Действительно, случай $a' = b' = 0$ нами будет отброшен, как вырожденный, а случай $a' \neq 0, b' = 0$ сводится к случаю 2 при повороте системы координат $O'x'y'$ на угол $\varphi = -\pi/2$. Покажем это.

При повороте система $O'x'y'$ переходит в новую систему координат $O''x''y'''$, при этом координаты преобразуются по формулам (5):

$$x' = x''\cos(-\pi/2) - y''\sin(-\pi/2) = y'',$$
$$y' = x''\sin(-\pi/2) + y''\cos(-\pi/2) = x''.$$

Таким образом, подставив новые координаты x'' и y'' вместо x' и y' в уравнение (8), получим новое уравнение

$$a'(y'')^2 + c'y'' + d'x'' + e' = 0$$

Введем новые коэффициенты $b'' = a', c'' = d', d'' = c'$. Теперь уравнение можно записать в следующем виде $b''(y'')^2 + c''x'' + d''y'' + e' = 0$ и $a'' = 0, b'' \neq 0$.

Случай $a''=0, b''=0$ является, вообще говоря, вырожденным. Действительно, тогда в уравнение есть только линейные члены и свободный член. Известно, что такое уравнение задает в декартовой системе координат $O'x'y'$ прямую линию. Но система $O'x'y'$ получена из системы Oxy поворотом на угол φ. Следовательно, и в системе Oxy графиком уравнения (1) является прямая, и (1) не содержит квадратичных членов, что противоречит условию $a^2+b^2+c^2 \neq 0$.

Вернемся к исследованию уравнения (8), избавившись от линейных членов. Для этого можно воспользоваться уже описанным выше параллельным переносом системы координат $O'x'y'$ в систему $O''XY$ и формулами (2).

<u>Случай</u> $\boldsymbol{a' \neq 0, b' \neq 0}$. Выделим в уравнении (8) полный квадрат.

$$\begin{aligned} a'(x')^2 + b'(y')^2 + c'x' + d'y' + e' = a'((x')^2 + 2\cdot c'/2a' \cdot x' \\ + (c'/2a')^2) - (c')^2 \big/ 4a' + b'((y')^2 + 2\cdot d'/2b' \cdot y' + \\ + (d'/2b')^2) - (d')^2 \big/ 4b' + e' = a'(x' + c'/2a')^2 + \\ + b'(y' + d'/2b')^2 + e' - (c')^2 \big/ 4a' - (d')^2 \big/ 4b' = 0. \end{aligned}$$

Пусть система координат $O''XY$ получена из системы координат $O'x'y'$ параллельным переносом. Введем новые переменные X и Y в системе координат $O''XY$ вместо x' и y' в системе координат $O'x'y'$:

$$X = x' + c'/2a', \quad Y = y' + d'/2b'$$

Обозначив $E = e' - (c')^2 \big/ 4a' - (d')^2 \big/ 4b'$, $A = a'$, $B = b'$, получим уравнение (8) в системе координат $O''XY$:

$$\boxed{AX^2 + BY^2 + E = 0, \quad A \neq 0,\ B \neq 0} \tag{9}$$

Дальнейшее исследование уравнения (9) сводится к анализу соответствующих кривых в зависимости от знаков A, B, E. Этому анализу посвящены параграфы 3 и 4 пособия.

Случай $\boldsymbol{a' \neq 0,\ b' \neq 0}$. В этом случае уравнение (8) имеет следующий вид: $b'(y')^2 + c'x' + d'y' + e' = 0$. Здесь возможны два варианта: а) $c' = 0$ и б) $c' \neq 0$.

а) $c' = 0$. Это означает, что уравнение не содержит x'. Разделим уравнение на b': $(y')^2 + d'/b'\, y' + e'/b' = 0$ и выделим полный квадрат:

$$\left((y')^2 + 2 \cdot d'/2b' \cdot y' + (d'/2b')^2\right) - (d'/2b')^2 + e'/b' = 0$$

$$\Rightarrow \left(y' + d'/2b'\right)^2 + D = 0,$$

где для удобства введено обозначение: $D = e'/b' - (d')^2/4b'$. Здесь возможны три случая.

1. $D > 0$. Тогда левая часть полученного выражения положительна и действительных y', удовлетворяющих рассматриваемому уравнению, не существует.

2. $D = 0$, и существует единственное значение, удовлетворяющее рассматриваемому уравнению. В этом случае, графиком функции будет прямая линия, проходящая через точку с координатами $(0, -d'/2b')$ и параллельная оси $O'x'$.

3. $D < 0$. Разрешив полученное уравнение относительно y', получим два корня:

$$y_1' = -d'/2b' + \sqrt{(d')^2/4b' - e'/b'},$$
$$y_2' = -d'/2b' - \sqrt{(d')^2/4b' - e'/b'}$$

Следовательно, графиком функции будут две прямые линии, параллельные оси $O'x'$, одна из которых проходит через точку с координатами $(0, y_1')$, а другая – через точку $(0, y_2')$.

Как мы видим, рассмотренный случай $c' = 0$ приводит к функциям, графиками которых являются только прямые линии.

б) $c' \neq 0$. Дополним уравнение (8) до полного квадрата.

$$b'(y')^2 + c'x' + d'y' + e' = b'((y')^2 + 2 \cdot d'/2b' \cdot y' +$$
$$+ (d'/2b')^2) + c'(x' + e'\big/c' - (d')^2\big/(4b'c')) =$$
$$= b'(y' + d'/2b')^2 + c'(x' + e'\big/c' - (d')^2\big/(4b'c')) = 0$$

Введем новые переменные X и Y вместо x' и y' по формулам:

$$X = x' + e'\big/c' - (d')^2\big/(4b'c'),\ Y = y' + d'/2b'.$$

В итоге, в системе координат $O''XY$ уравнение (8) имеет следующий вид: $b'Y^2 + c'X = 0$. Так как $b' \neq 0$, то разделим полученное уравнение на b'. Обозначим $C = c'/b'$. Окончательно, для случая $a' = 0,\ b' \neq 0$ получаем

$$\boxed{Y^2 + CX = 0} \qquad (10)$$

Уравнение (10) рассматривается ниже, в параграфе 5 пособия.

Уравнения (9) и (10) кривых 2-го порядка, полученные из уравнения (1) с помощью преобразований системы координат Oxy, называются ***каноническими***.

3. Эллипс.

В этом параграфе исследуем уравнение (9) при условии $A \cdot B > 0$. Для простоты далее вместо X и Y будем писать x и y.

Положим, что $A > 0,\ B > 0$. (Если, $A < 0,\ B < 0$, то умножим уравнение почленно на -1). Дальнейшее исследование зависит от значения E.

а) пусть $E > 0$ Разделим (9) на E. Тогда уравнение имеет следующий вид: $Ax^2/E + By^2/E + 1 = 0$. Так как $A/E > 0$ и $B/E > 0$, то допустимо ввести новые обозначения коэффициентов: $a^2 = E/A, \quad b^2 = E/B$. В результате, уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (11)$$

Так как левая часть уравнения неотрицательна, то не существует действительных x и y, удовлетворяющих уравнению (11) и в этом случае нельзя построить графика функции. Говорят, что уравнение (11) определяет ***мнимый эллипс***.

б) пусть $E = 0$. Уравнение (9) примет вид $Ax^2 + By^2 = 0$. Введем новые обозначения коэффициентов $a^2 = 1/A,\ b^2 = 1/B$. Запишем уравнение в новых обозначениях

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (12)$$

Очевидно, уравнение (12) имеет единственное решение $x = y = 0$. Поэтому график функции, заданной уравнением (12), состоит из единственной точки: начала системы координат Oxy.

в) пусть $E < 0$. Разделим (9) на $-E$. Тогда уравнение имеет следующий вид: $-Ax^2/E + (-By^2/E) - 1 = 0$. Так как $-A/E > 0$ и

$-B/E=0$, то введем новые обозначения коэффициентов: $a^2=-E/A$, $b^2=-E/B$. Тогда уравнение (9) можно записать $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{13}$$

Кривая, определяемая уравнением (13), называется ***действительным эллипсом***, или, просто, ***эллипсом*** (рис.4).

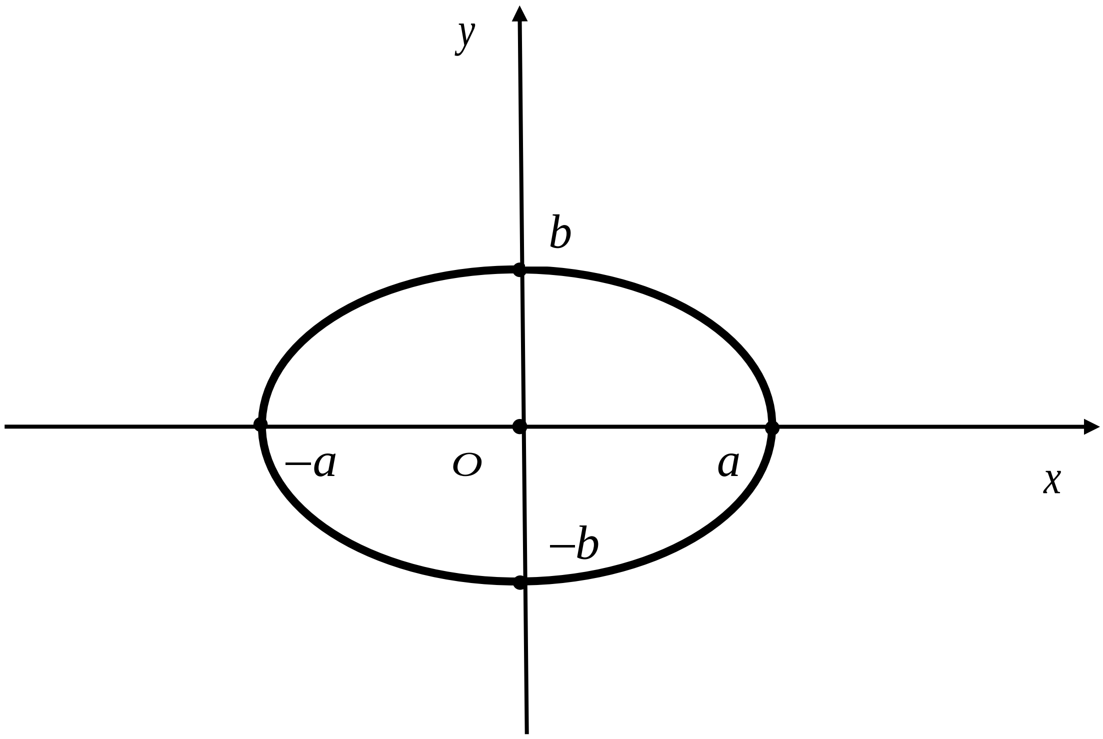

Рис.4. Эллипс в декартовых координатах

Если $a=b=R$, то (13) легко приводится к хорошо знакомому из курса школьной алгебры уравнению окружности $x^2+y^2=R^2$, где $R-$радиус окружности с центром в начале системы координат Oxy.

ПРИМЕР №1. Преобразовать к каноническому виду и изобразить кривую

$$3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$$

Преобразуем уравнение к каноническому виду.

Будем считать, что данное уравнение задано в системе координат Oxy. Сначала найдем такую систему координат $O'x'y'$, в которой уравнение не содержит квадратичный член $x'y'$. Как было показано в п.2, такая система координат может быть получена поворотом системы Oxy на угол φ, который вычисляется по формулам (5). Заметим, что здесь $a=c$ и в п.2 показано, что тогда $\varphi = \pi/4$.

$$3(x'\cos\pi/4 - y'\sin\pi/4)^2 - 2(x'\cos\pi/4 - y'\sin\pi/4)$$
$$(x'\sin\pi/4 + y'\cos\pi/4) + 3(x'\sin\pi/4 + y'\cos\pi/4)^2 -$$
$$-4(x'\cos\pi/4 - y'\sin\pi/4) -$$
$$-4(x'\sin\pi/4 + y'\cos\pi/4) - 12 = 0$$

Подставим найденное значение φ в уравнение и выполним необходимые расчеты.

$$2(x')^2 + 4(y')^2 - \sqrt{2}x' - 12 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x')^2 + 2(y')^2 - 2\sqrt{2}x' - 6 = 0$$

Запишем связь между координатами (x, y) и (x', y'), подставив в формулу (5) найденное значение угла φ.

$$x = \sqrt{2}x'/2 - \sqrt{2}y'/2; \quad y = \sqrt{2}x'/2 + \sqrt{2}y'/2$$

Теперь избавимся в уравнении кривой от линейного члена x'. Для этого найдем систему координат $O''XY$, в которой нет члена x'. Как было показано в п.2, такая система координат может быть получена параллельным переносом системы $O'x'y'$. Старые и новые координаты связаны формулами (2). Для вычисления неизвестных величин x_O и y_O, дополним до полного квадрата исходное выражение:

$$(x')^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot x' + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 + 2(y')^2 - 6 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x' - \sqrt{2})^2 + 2(y')^2 - 8 = 0$$

Дополнение до полного квадрата было произведено только для членов, содержащих x'. Так как линейного члена y' в уравнении нет, то нет необходимости выполнять дополнение до полного квадрата для членов, содержащих y'. В случае, если такой член имеется, следует выполнить дополнение до полного квадрата, аналогичное выполненному для членов, содержащих x'. В новой системе $O''XY$ введем координаты X и Y, связанные со старыми координатами x' и y' следующим образом:

$$X = x' - \sqrt{2};\ \ Y = y' \Rightarrow\ x' = X + \sqrt{2};\ \ y' = Y$$

Для удобства построения эллипса установим связь между координатами X ,Y и x, y:

$$x = \sqrt{2}x'/2 - \sqrt{2}y'/2 = (X + \sqrt{2} - Y)\sqrt{2}/2,$$
$$y = \sqrt{2}x'/2 + \sqrt{2}y'/2 = (X + \sqrt{2} + Y)\sqrt{2}/2.$$

Установим положение начала координат системы $O''XY$. Полученные формулы являются частным случаем применения формул (2) для рассматриваемой задачи. Подставляем $X = 0;\ Y = 0$ в уравнения связей между координатами и получаем $x_o = 1, y_o = 1$. Следовательно, центром системы координат $O''XY$ является точка с координатами $(1,1)$ в системе Oxy.

Вернемся к полученному уравнению $X^2 + 2Y^2 - 8 = 0$. Приведем это уравнение к каноническому виду

$$(X/\sqrt{8})^2 + (Y/2)^2 = 1 \qquad (14)$$

Уравнение (14) называется каноническим уравнением эллипса, для которого в соответствии с формулой (13) имеем $a = \sqrt{8},\ b = 2$. Все произведенные преобразования координат и график найденного эллипса изображены на рисунке 5**.**

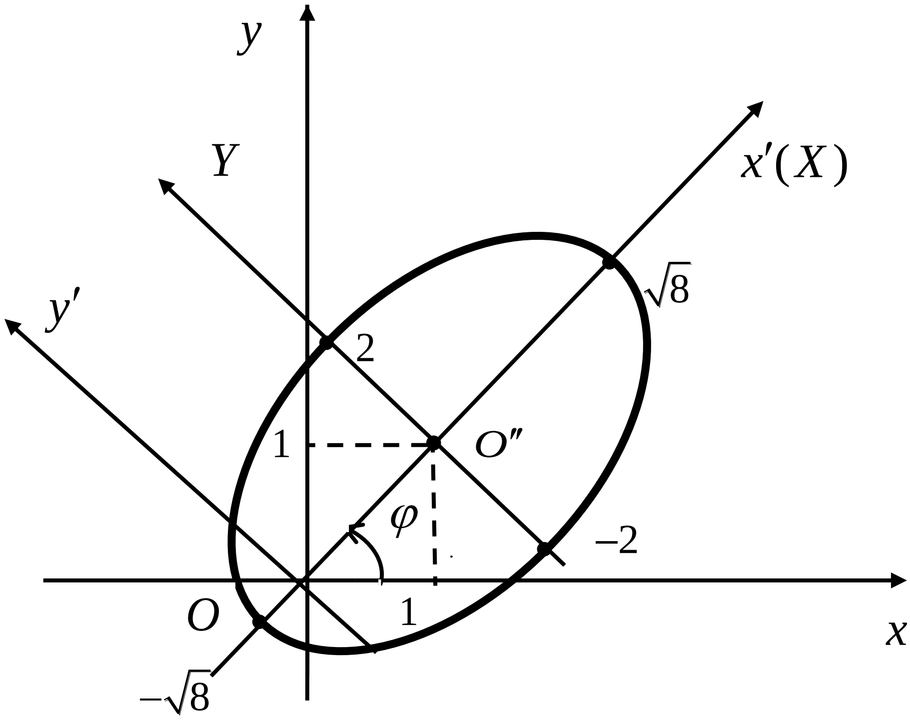

Рис.5. Построение эллипса из примера №1.

Изобразим кривую из примера №1 воспользовавшись системой компьютерной алгебры ***Mathematica***. Для этого достаточно использовать всего одну команду:

```
*  ImplicitPlot[3x^2-2x*y+3y^2-4y-4x==12,{x,-2,5}]
```

Mathematica легко справляется с задачей построения кривой. Результат изображен на рисунке 6.

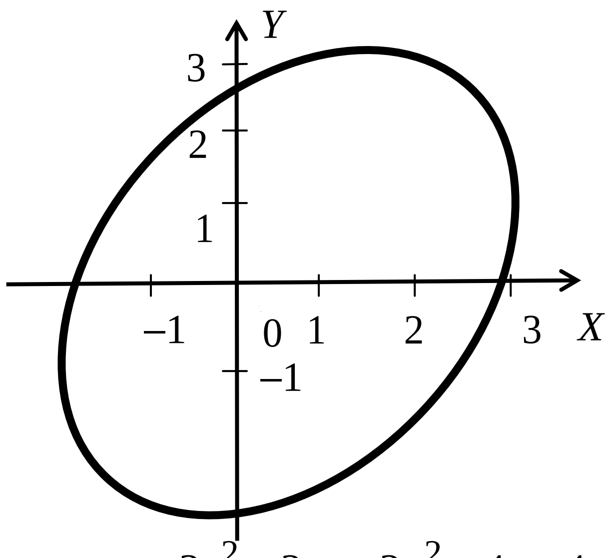

Рис.6. Кривая $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$, построенная с помощью системы ***Mathematica.***

Эллипс обладает некоторыми замечательными свойствами.

Выберем в системе координат Oxy точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$ (рис.7). Отметим на плоскости все точки $M(x, y)$, для которых выполнено $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Применим теорему Пифагора для треугольников F_1MN и F_2MN и проведем необходимые арифметические преобразования:

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \qquad ,$$

$$(-xc + a^2)^2 = (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$

$$x^2 / a^2 + y^2 / (a^2 - c^2) = 1$$

Обозначив $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, получим уравнение (13).

После проведенного доказательства, можно дать определение эллипса.

Эллипсом называется геометрическое место таких точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянна.

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами эллипса***. ***Большой осью эллипса*** называется отрезок *AB* длиной $2a$, ***малой осью*** – *CD* длиной $2b$. ***Эксцентриситетом e*** называется величина, равная c/a. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса. ***Фокальным параметром p*** называется величина, вычисляемая по формуле $p = b^2/a$. Начало координат на рис. 7 является центром симметрии эллипса и называется ***центром*** эллипса. Любая хорда (например, *GH*), проведенная через центр, делится в центре пополам.

Заметим также, что для эллипса справедливо неравенство $a = \sqrt{c^2 + b^2} > c$, следовательно, эксцентриситет эллипса e меньше единицы: $e = c/a < 1$.

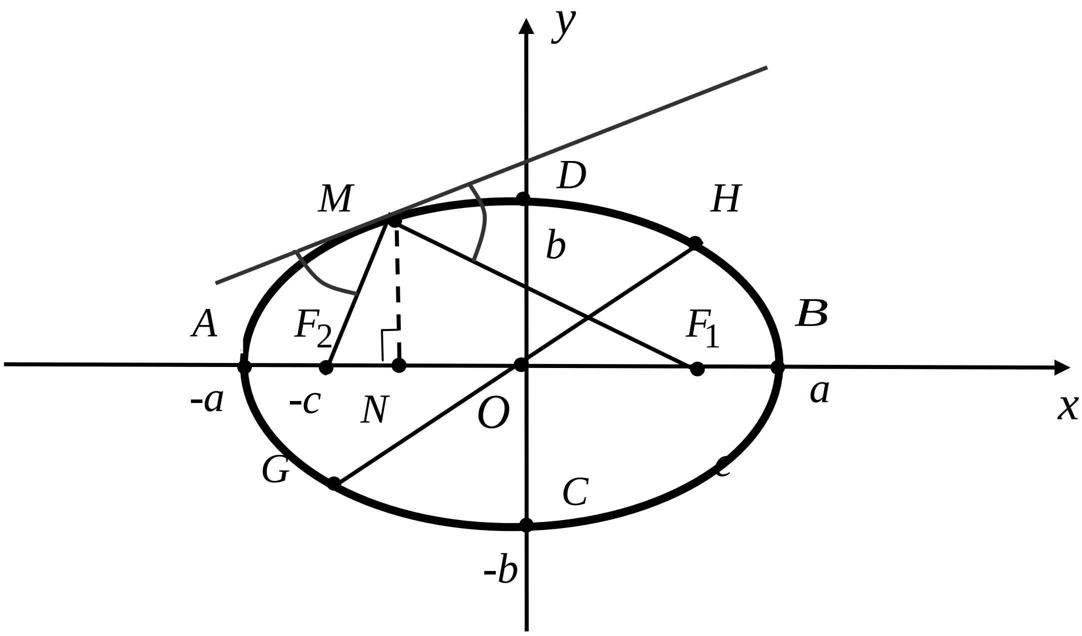

Рис.7. Оптическое свойство эллипса

На рис. 7 изображена касательная к эллипсу, проведенная в произвольной точке M. Можно доказать, что отмеченные на рисунке углы, образованные касательной и прямыми MF_1 и MF_2, равны. Это свойство эллипса называется ***оптическим свойством.***

Уравнение эллипса можно записать в полярных координатах.

Полярные координаты состоят из фиксированной точки O (полюса) и луча с началом в O (полярной оси). Положение точек кривой в полярной системе координат определяется расстоянием ρ до полюса O и углом φ, отложенным от полярной оси.

Выберем в качестве полюса фокус F_2 и построим эллипс (рис.8). Для получения уравнения эллипса запишем теорему косинусов для стороны MF_1 в треугольнике MF_1O, используя то, что $F_1F_2 = 2c$:

$$MF_1 + MF_2 = \rho + \sqrt{\rho^2 + 4c^2 - 4\rho c\cos\varphi} = 2a \Rightarrow$$

$$(2a-\rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4\rho c\cos\varphi \Rightarrow \rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi}$$

Используем то, что $b^2 = a^2 - c^2$ и делим числитель и знаменатель полученного выражения на a. Так как $p = b^2/a$ и $e = c/a$, то получаем окончательную формулу эллипса в полярных координатах:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},\ 0 \le e < 1} \qquad (15)$$

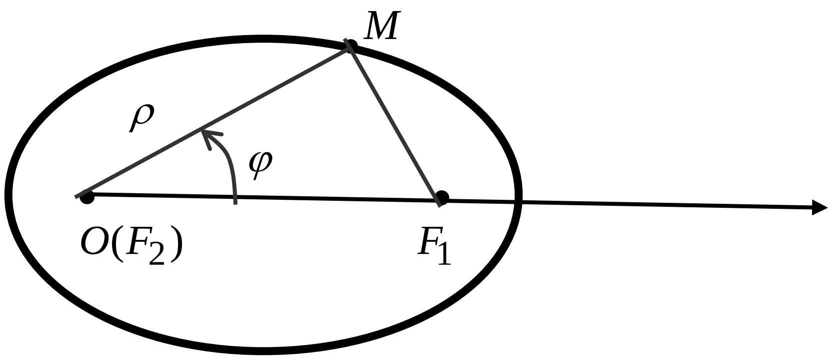

Рис.8.Эллипс в полярных координатах

4. Гипербола.

В этом параграфе исследуем уравнение (9) при условии $A\cdot B<0$. Для простоты опять будем писать x и y вместо X и Y. Положим, что $A>0,\ B<0$. (Если $A<0,\ B>0$, то умножим уравнение на -1). Как и при рассмотрении предыдущего случая, дальнейшее исследование уравнения $Ax^2+By^2+E=0$ зависит от значения E.

а) пусть $E=0$. Тогда уравнение (9) можно записать в следующем виде: $Ax^2-(-By^2)=0$. Тогда, введя следующие обозначения: $a^2=1/A, b^2=-1/B$, получим уравнение кривой $a^2x^2-b^2y^2=0$, которое можно представить в следующем виде: $(ax-by)(ax+by)=0$. Этому уравнению отвечают две пересекающиеся прямые: $y=ax/b,\ \ y=-ax/b$.

б) пусть $E\neq 0$. Разделим уравнение (9) на $-E$. Тогда оно имеет следующий вид: $-Ax^2\big/E-By^2\big/E-1=0$. Так как $A\cdot B<0$, то $E^2\big/A\cdot B<0$ и $(-E/A)\cdot(-E/B)<0$. Примем, что $-E/A>0$, $-E/B>0$, и введем новые обозначения коэффициентов: $a^2=-E/A,\quad b^2=-E/B$. В результате, уравнение (9) можно записать в виде

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{16}$$

Уравнение (16) определяет кривую, состоящую из двух ветвей, и называемую ***гиперболой*** (рис. 9).

Асимптоты гиперболы – прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при стремлении к бесконечности. Покажем, что уравнения $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ являются уравнениями асимптот гиперболы.

Пусть d – разность ординат точек на прямой $y=\dfrac{b}{a}x$ и гиперболе, имеющими одинаковую абсциссу. Из (16) легко вывести уравнение правой ветви гиперболы, выразив y через x и положив $y > 0$: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Тогда $d = \left|\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right|$ и рассматриваемая прямая – асимптота, если $\lim\limits_{x\to+\infty} d = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} d = (b/a)\lim_{x\to+\infty}\left|x - \sqrt{x^2 - a^2}\right| =$$

$$= (b/a)\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right|$$

$$= (b/a)\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| = 0.$$

Аналогично вычислим расстояние d между точкой, лежащей на левой ветви гиперболы в третьем квадранте и точкой прямой $y = \frac{b}{a}x$. Левая ветвь гиперболы задана уравнением $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} d = (b/a)\lim_{x\to-\infty}\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| =$$

$$= (b/a)\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right| =$$

$$= (b/a)\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{a^2}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right| = 0$$

Итак, было показано, что $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы. Аналогично, можно показать, что $y = -\frac{b}{a}x$ также является асимптотой гиперболы.

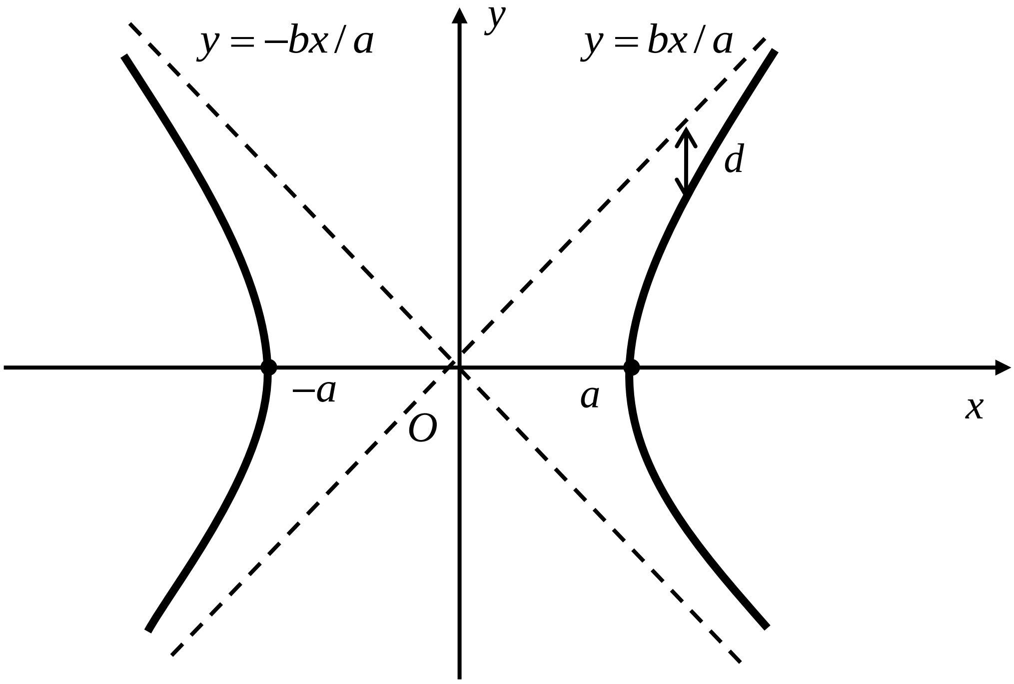

Рис.9. Гипербола в декартовых координатах

ПРИМЕР №2. Привести к каноническому виду и построить кривую

$$3x^2-4xy-12x+8y+4=0$$

Приведем уравнение к каноническому виду.

Найдем такую систему координат $O'x'y'$, в которой рассматриваемое уравнение не будет содержать квадратичный член $x'y'$. Эта система координат может быть получена поворотом системы Oxy на угол φ, который вычисляется в выражениях для x' и y', получаемых по формулам (5).

$$\begin{aligned}3(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2-4(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+\\+y'\cos\varphi)-12(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)+\\+8(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)+4=0\end{aligned}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$\begin{aligned}(x')^2(3\cos^2\varphi-4\cos\varphi\sin\varphi)+(y')^2(3\sin^2\varphi+\\4\cos\varphi\sin\varphi)+x'y'(-6\cos\varphi\sin\varphi-4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi)+\\+x'(-12\cos\varphi+8\sin\varphi)+y'(12\sin\varphi+8\cos\varphi)+4=0\end{aligned}$$

Приравняем к нулю коэффициент перед $x'y'$ в последнем уравнении и найдем угол φ.

$$-6\cos\varphi\sin\varphi-4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi=0$$

Разделим уравнение на $2\cos^2\varphi$. Получим квадратное уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2\varphi-3\,\mathrm{tg}\,\varphi-2=0$$

Корнями уравнения являются углы $\varphi_1=\mathrm{arctg}\,2$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}(-0,5)$. Заметим, что в формуле (16) коэффициент перед переменной x^2 является положительным, поэтому выберем такое φ, чтобы коэффициент $3\cos^2\varphi-4\cos\varphi\sin\varphi$ перед $(x')^2$ также был положительным. Нетрудно проверить, что при подстановке φ_1 этот коэффициент меньше нуля, а при подстановке φ_2 – больше нуля. Следовательно, выберем поворот на угол φ_2.

Для вычисления $\cos\varphi_2$ и $\sin\varphi_2$ используем тригонометрическую формулу $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}=1+\mathrm{tg}^2\varphi$ и основное тригонометрическое тождество $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Учтем также, что угол φ_2 находится в четвертой четверти координатной плоскости, т.е. $-\pi/2<\varphi_2<0$. В результате, получим

$$\cos\varphi_2=2/\sqrt{5};\quad \sin\varphi_2=-1/\sqrt{5}$$

Подставим значения $\cos\varphi_2$ и $\sin\varphi_2$ в первоначальное уравнение с уже приведенными подобными слагаемыми и проведем необходимые расчеты.

$$4(x')^2-(y')^2-32/\sqrt{5}\,x'+4/\sqrt{5}\,y'+4=0$$

Запишем связь между системами $O'x'y'$ и Oxy, подставив значение φ_2 в формулы (5):

$$x=2x'/\sqrt{5}+y'/\sqrt{5};\quad y=-x'/\sqrt{5}+2y'/\sqrt{5}$$

Избавимся от линейных членов в уравнении (17) путем выделения полного квадрата.

$$4\left((x')^2 - 2\cdot 4/\sqrt{5}\,x' + (4/\sqrt{5})^2\right) - \left((y')^2 - 2\cdot 2/\sqrt{5}\,y' +\right.$$
$$\left. + (2/\sqrt{5})^2\right) - 8 = 4(x' - 4/\sqrt{5})^2 - (y' - 2/\sqrt{5})^2 - 8 = 0$$

Введем координаты X и Y, связанные с координатами x' и y' следующим образом:

$$X = x' - 4/\sqrt{5};\;\; Y = y' - 2/\sqrt{5} \Rightarrow x' = X + 4/\sqrt{5};\;\; y' = Y + 2/\sqrt{5}$$

В системе $O''XY$ получили уравнение $4X^2 - Y^2 - 8 = 0$, которое легко приводится к каноническому виду

$$(X/\sqrt{2})^2 - (Y/\sqrt{8})^2 = 1 \qquad (17)$$

Формула (17) определяет каноническое уравнение гиперболы, для которого в соответствии с формулой (16) имеем $a = \sqrt{2},\;\; b = \sqrt{8}$.

Для удобства построения гиперболы установим связь между координатами X, Y и x, y, подставив соответствующие значения в формулу (5):

$$x = 2x'/\sqrt{5} + y'/\sqrt{5} = (2X + Y + 10/\sqrt{5})/\sqrt{5}$$
$$y = -x'/\sqrt{5} + 2y'/\sqrt{5} = (-X + 2Y)/\sqrt{5}$$

Установим координаты начала системы $O''XY$. Подставляем $X = 0,\; Y = 0$ в уравнения связей между координатами и получаем $x = 2,\;\; y = 0$. Следовательно, центром системы координат $O''XY$ является точка $(2, 0)$ в системе Oxy.

График гиперболы со всеми вспомогательными построениями изображен на рисунке 10. Заметим, что асимптоты построенной гиперболы в системе координат $O''XY$ заданы следующими уравнениями: $Y = 2X$ и $Y = -2X$. На рисунке асимптоты изображены штрихпунктирной линией.

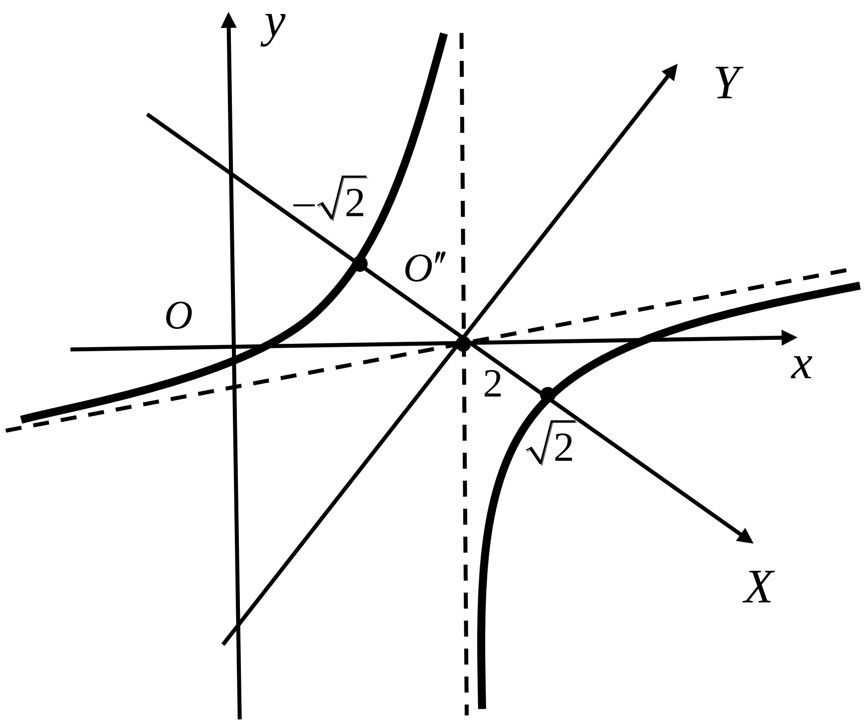

Рис.10. Построение гиперболы из примера №2.

С помощью использования всего одной команды системы компьютерной алгебры ***Mathematica*** получаем график кривой, изображенный на рис.11.

- **ImplicitPlot[3x^2-4x*y+8y-12x==-4,{x,-1,5}]**

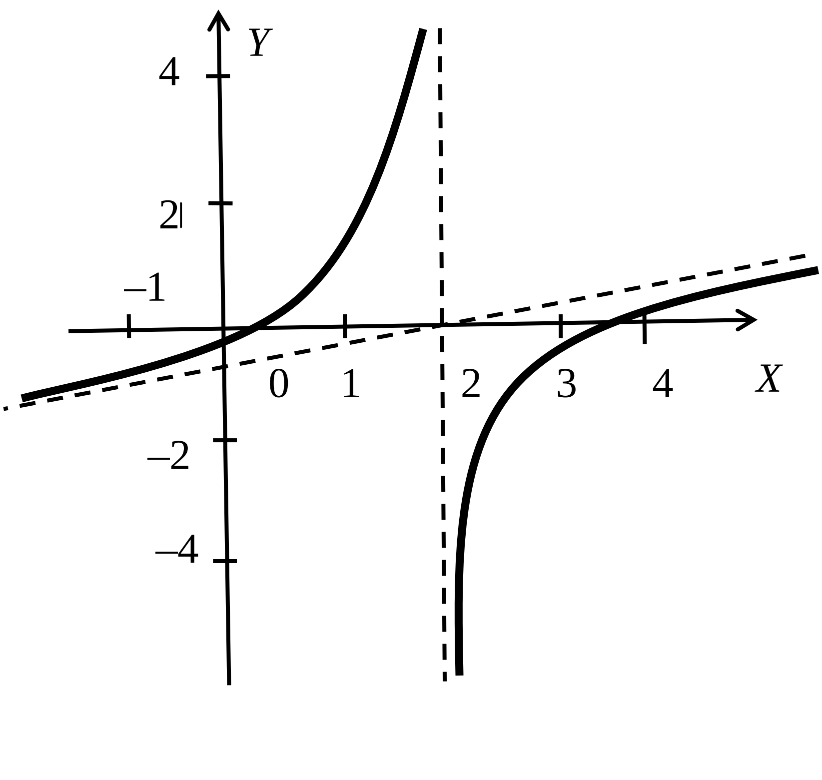

Рис.11. График функции $3x^2-4xy-12x+8y+4=0$ (построен с помощью системы ***Mathematica***).

Как и эллипс, гипербола обладает некоторыми интересными свойствами. Выберем в системе координат Oxy точки $F_1=(c,0)$ и $F_2=(-c,0)$ (рис.12). Отметим на плоскости все точки $M(x,y)$, для которых выполнено соотношение $\left|MF_2-MF_1\right|=2a$.

Применим теорему Пифагора для треугольников и F_2MN и проведем необходимые арифметические преобразования, принимая, что $c>a$:

$$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$xc=a^2+a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow$$

$$(-xc+a^2)^2=\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4\Rightarrow$$

$$x^2/a^2-y^2/(c^2-a^2)=1$$

Обозначив $b=\sqrt{c^2-a^2}$, получим уравнение (16).

После проведенного доказательства можно дать определение гиперболы.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости является постоянным.

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами***, точки A и B – ***вершинами.*** ***Действительной осью*** называется отрезок AB длиной $2a$.

Эксцентриситетом e называется величина равная c/a, ***фокальным параметром p*** – величина, вычисляемая по формуле $p = b^2/a$. Начало координат на рис. 12 является центром симметрии гиперболы и называется ***центром гиперболы***. Любая хорда (например, *GH*), проведенная через центр, делится в центре пополам. Заметим также, что из равенства $a = \sqrt{c^2 - b^2} < c$, следовательно, эксцентриситет эллипса e больше единицы: $e = c/a > 1$.

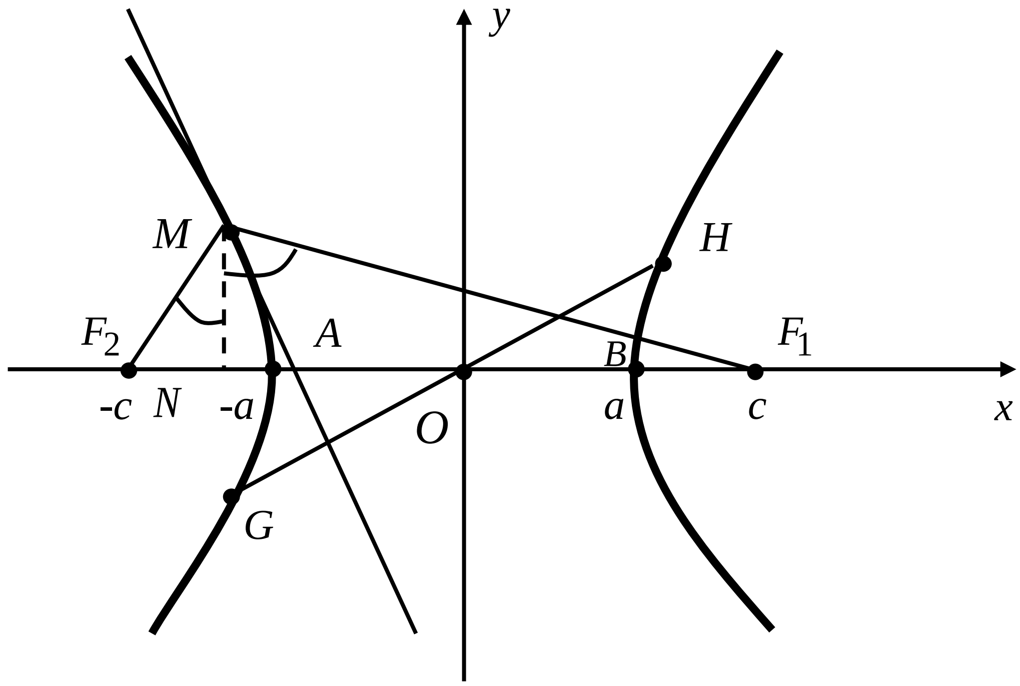

Рис.12. Оптическое свойство гиперболы

На рис. 12 изображена касательная к гиперболе, проведенная в произвольной точке M. Можно доказать, что отмеченные на рисунке углы, образованные касательной и прямыми MF_1 и MF_2, равны. Это свойство гиперболы называется ***оптическим свойством.***

Уравнение гиперболы можно записать в полярных координатах.

Выберем в качестве полюса фокус F_1 и построим гиперболу (рис.13). Для получения уравнения гиперболы запишем теорему косинусов для стороны MF_2 в треугольнике MF_1O, используя, что $F_1F_2 = 2c$.

$$MF_2 = \sqrt{\rho^2 + 4c^2 + 4\rho c\cos\varphi}$$

Положим, что $MF_2 > MF_1$. Далее по определению гиперболы

$$|MF_2 - MF_1| = \left|\sqrt{\rho^2 + 4c^2 + 4\rho c\cos\varphi} - \rho\right| =$$
$$= \sqrt{\rho^2 + 4c^2 + 4\rho c\cos\varphi} - \rho = 2a \Rightarrow$$
$$\rho^2 + 4c^2 + 4\rho c\cos\varphi = (2a+\rho)^2 \Rightarrow \rho = \frac{c^2 - a^2}{a - c\cos\varphi}$$

Учитывая, что $c^2 - a^2 = b^2$, разделим числитель и знаменатель полученного выражения на a. Так как $p = b^2/a$ и $e = c/a$, то получаем окончательно уравнение гиперболы в полярных координатах:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},\ e > 1} \tag{18}$$

Формула (18) совпадает по внешнему виду с формулой (15), но эксцентриситет e гиперболы больше 1, тогда как эксцентриситет эллипса не превосходит 1.

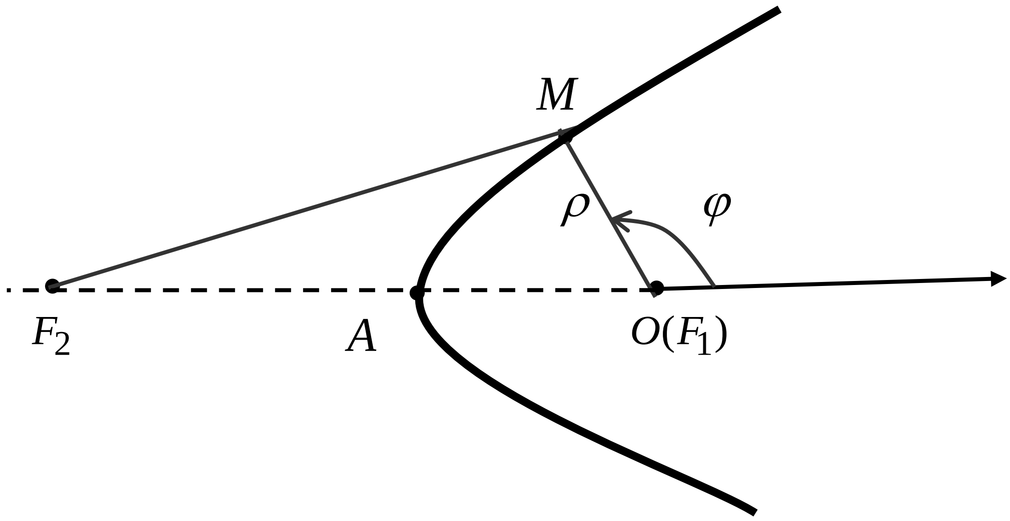

Рис.13.Гипербола в полярных координатах

5.Парабола.

В этом параграфе изучим последний тип кривой второго порядка, определяемой уравнением (10). Как и ранее, вместо X и Y будем писать x и y. Тогда имеем $y^2 + Cx = 0$. Положим $C = -2p$. Таким образом приходим к уравнению:

$$y^2 = 2px \tag{19}$$

Уравнение (19) определяет кривую, называемую ***параболой*** (рис. 14). Геометрический смысл числа p будет разъяснен далее.

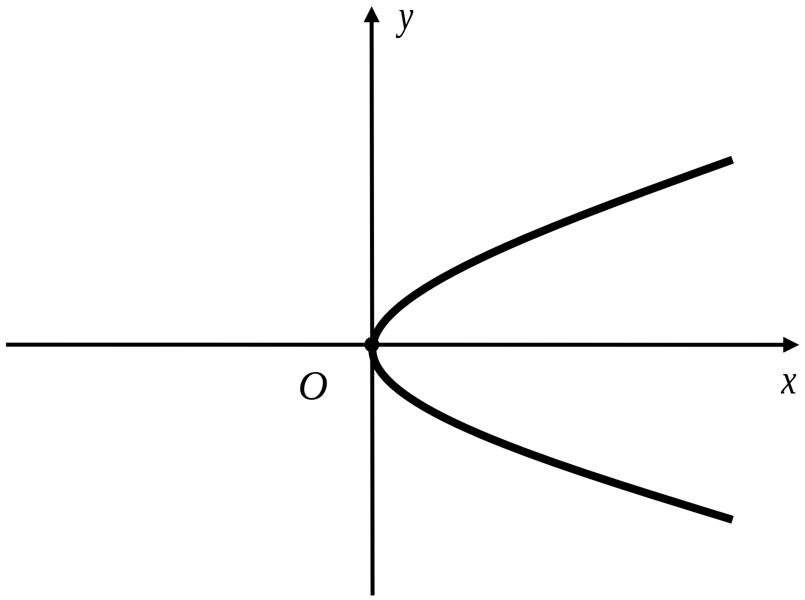

Рис.14.Парабола в декартовых координатах

ПРИМЕР №3. Привести к каноническому виду и построить кривую, заданную уравнением

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 16x + 20y = 0$$

Приведем это уравнение к каноническому виду. Как и в ранее рассмотренных примерах, найдем такую систему координат $O'x'y'$, в которой будет отсутствовать квадратичный член $x'y'$. Такая система координат может быть получена поворотом системы Oxy на угол φ при помощи формул (5). Заменим x, y по этим формулам в рассматриваемом уравнении:

$$4(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 4(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi +$$
$$+ y'\cos\varphi) + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 - 16(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) +$$
$$+ 20(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) = 0$$

Приведем подобные слагаемые:

$$(x')^2(\sin^2\varphi + 4\cos\varphi\sin\varphi + 4\cos^2\varphi) + (y')^2(\cos^2\varphi -$$
$$- 4\cos\varphi\sin\varphi + 4\sin^2\varphi) + x'y'(2\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$+ 4\cos^2\varphi - 4\sin^2 - 8\cos\varphi\sin\varphi) + x'(20\sin\varphi -$$
$$-16\cos\varphi) + y'(16\sin\varphi + 20\cos\varphi) = 0$$

Приравняем к нулю коэффициент перед $x'y'$ и найдем угол φ:

$$-6\cos\varphi\sin\varphi + 4\cos^2\varphi - 4\sin^2\varphi = 0$$

Разделим уравнение на $-2\cos^2\varphi$ и получим квадратное уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2\varphi + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2 = 0$$

Корнями уравнения являются углы $\varphi_1 = \mathrm{arctg}(-2)$, $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\,0,5$. В уравнении (19) переменная x^2 отсутствует, т.е. коэффициент при переменной x^2 равен нулю. Заметим, что коэффициент $\sin^2\varphi + 4\cos\varphi\sin\varphi + 4\cos^2\varphi$ при переменной $(x')^2$ равен нулю, если $\varphi = \mathrm{arctg}(-2)$. Следовательно, выберем поворот на угол φ_1.

Для вычисления $\cos\varphi_1$ и $\sin\varphi_1$ используем тригонометрическую формулу $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi$ и основное тригонометрическое тождество $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Учтем также, что угол φ_1 находится в четвертой четверти координатной плоскости, т.е. $-\pi/2 < \varphi_1 < 0$. Таким образом, получим:

$$\cos\varphi_1 = 1/\sqrt{5};\ \sin\varphi_1 = -2/\sqrt{5}$$

Подставим значения $\cos\varphi_1$ и $\sin\varphi_1$ в уравнение и выполним необходимые преобразования:

$$5\sqrt{5}(y')^2 - 56x' - 12y' = 0 \qquad (20)$$

Запишем связь между системами $O'x'y'$ и Oxy, подставив значение φ_1 в формулы (5):

$$x = x'/\sqrt{5} + 2y'/\sqrt{5}; \quad y = -2x'/\sqrt{5} + y'/\sqrt{5}$$

Дополним до полного квадрата уравнение (20).

$$5\sqrt{5}\left((y')^2 - 2\cdot 6/5\sqrt{5}y' + (6/5\sqrt{5})^2\right) - 5\sqrt{5}(6/5\sqrt{5})^2 - 56x' =$$

$$= 5\sqrt{5}\left(y' - 6/5\sqrt{5}\right)^2 - 56(x' + 9\sqrt{5}/350) = 0$$

Введем координаты X и Y, связанные со старыми координатами x' и y' следующим образом:

$$X = x' + 9\sqrt{5}/350 \Rightarrow x' = X - 9\sqrt{5}/350;$$
$$Y = y' - 6/5\sqrt{5} \Rightarrow y' = Y + 6/5\sqrt{5}$$

В системе $O''XY$ получили уравнение $5\sqrt{5}Y^2 - 56X = 0$, которое легко приводится к уравнению параболы в каноническом виде.

$$Y^2 = \frac{56}{5\sqrt{5}}X \qquad (21)$$

В уравнении (21) в соответствии с формулой (19) имеем $p = \dfrac{28}{5\sqrt{5}}$. Для удобства построения параболы установим связь между координатами X, Y и x, y, подставив соответствующие значения в формулу (5):

$$x = X/\sqrt{5} + 2Y/\sqrt{5} + 12/25 - 9\sqrt{5}/350;$$
$$y = -2X/\sqrt{5} + Y/\sqrt{5} + 6/25 + 9\sqrt{5}/350$$

Установим координаты начала системы $O''XY$. Подставляем $X = 0,\ Y = 0$ в уравнения связей между координатами и получаем $x = 12/25 - 9\sqrt{5}/350,\ y = 6/25 + 9\sqrt{5}/350$. Следовательно, начало системы координат $O''XY$ имеет координаты $(12/25-9\sqrt{5}/350, 6/25+9\sqrt{5}/350)$ в системе Oxy.

График параболы со всеми вспомогательными построениями, изображен на рисунке 15.

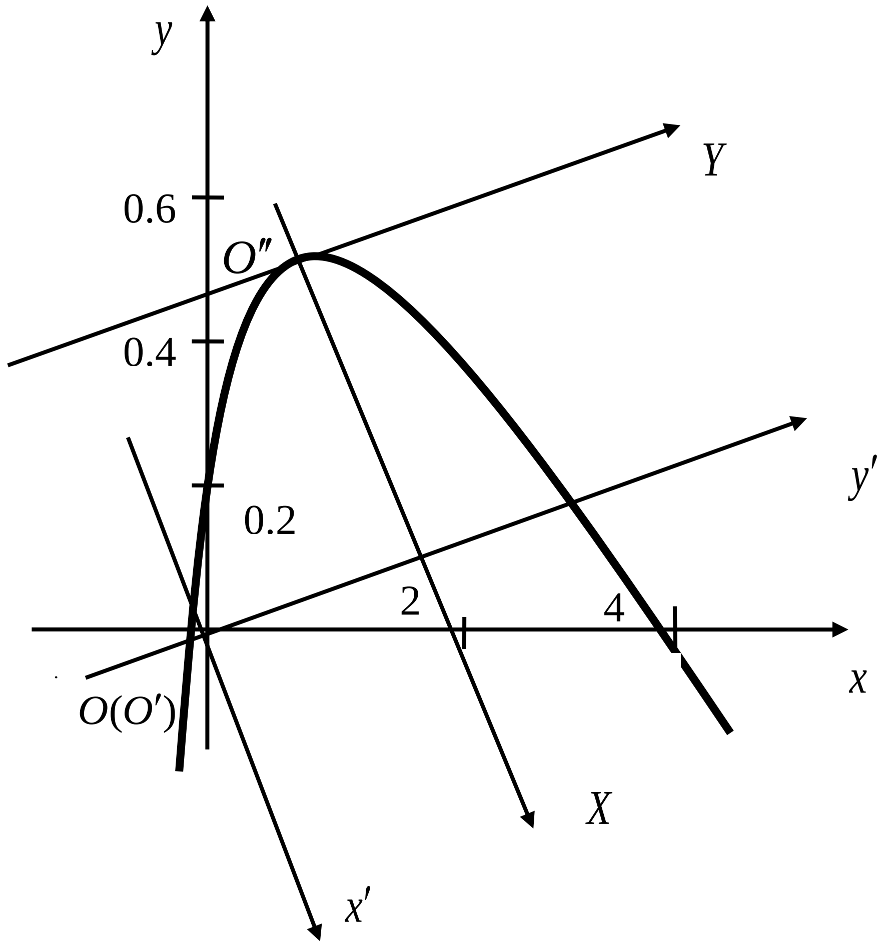

Рис.15. Построение параболы из примера №3.

На рисунке 16 изображена кривая, построенная системой компьютерной алгебры ***Mathematica***:

```
*    ImplicitPlot[4x^2+4x*y+y^2-16x+20y==0,{x,-1,4.5}]
```

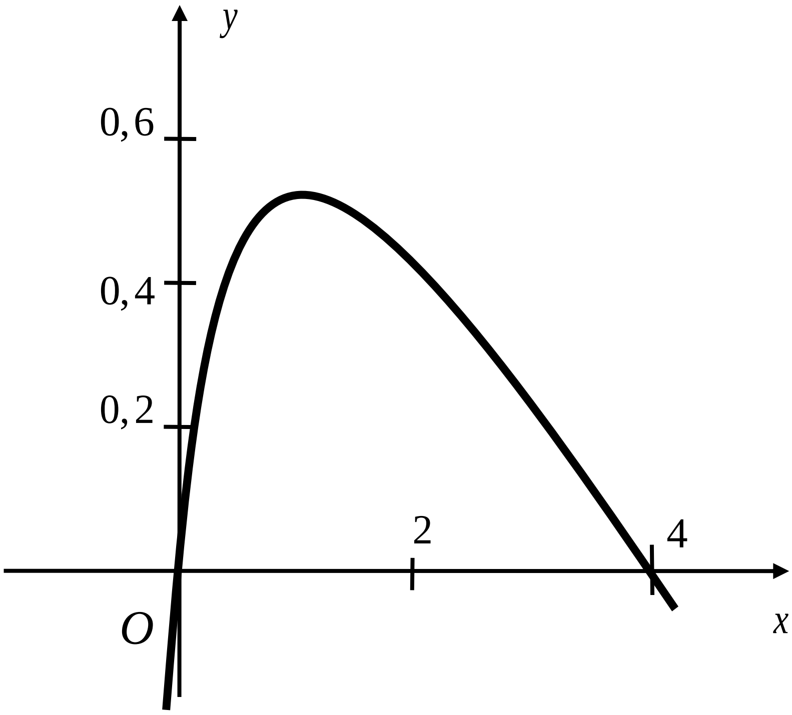

Рис.16. График функции $4x^2 + 4xy + y^2 - 16x + 20y = 0$
(построен с помощью системы ***Mathematica.***)

Парабола, как эллипс и гипербола, обладает некоторыми интересными свойствами.

Выберем на оси Ox точку $F = (p/2, 0)$ и построим прямую, перпендикулярную оси Ox и проходящую через точку $(-p/2, 0)$. Отметим на плоскости все точки $M(x, y)$, равноудаленные от точки F и построенной прямой (рис.17), т.е. таким что $MK = MF$. Применим теорему Пифагора для треугольника MFN, и запишем расстояние MK через координаты точек M и K, а затем приравняем полученные выражения.

$$MK^2 = (x + p/2)^2;\ MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + p^2/4 + px = y^2 + p^2/4 - px + x^2 \Rightarrow$$
$$y^2 = 2px$$

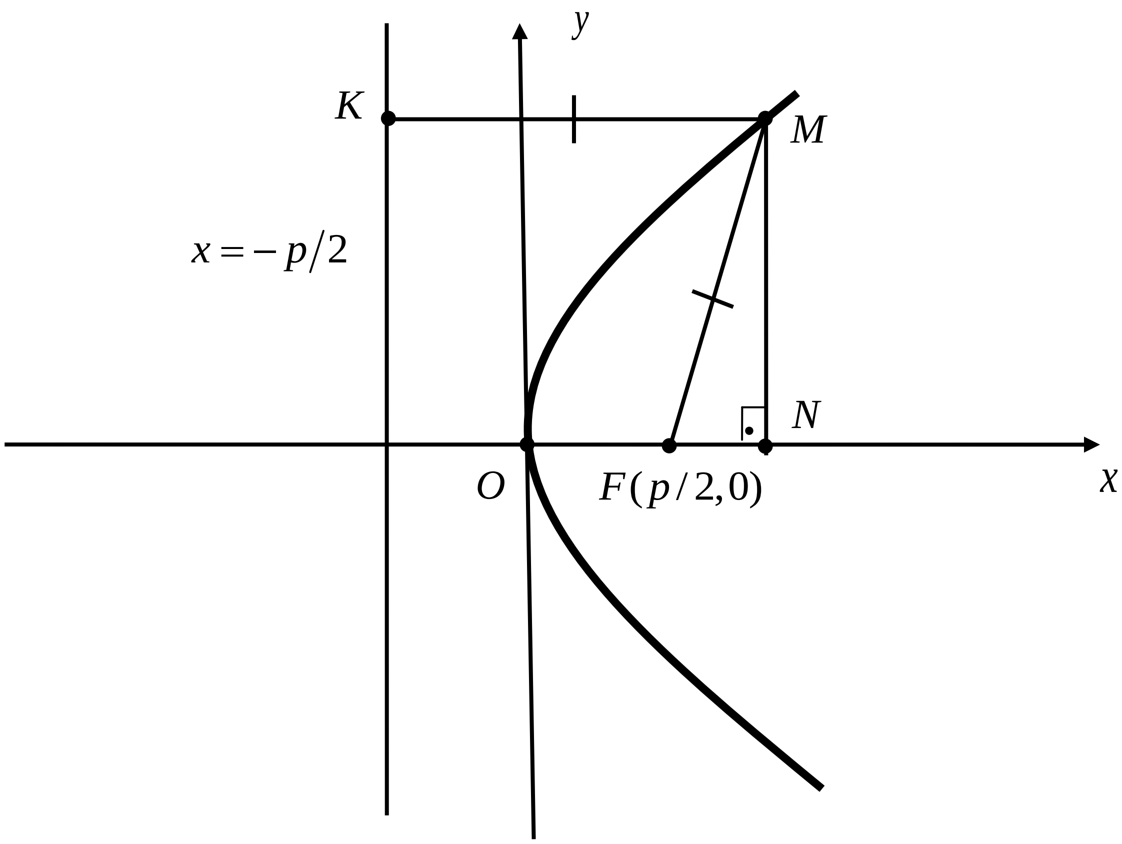

Рис.17. Директриса и полюс параболы

Следовательно, множество рассмотренных точек M порождает параболу, удовлетворяющую уравнению $y^2 = 2px$.

Теперь дадим определение параболы.

Параболой называется геометрическое место таких точек плоскости, которые находятся на одинаковых расстояниях от некоторой фиксированной точки и от данной прямой.

Ось Ox называется ***осью параболы***, точка O – ***вершиной,*** точка $F = (p/2, 0)$ – ***фокусом***, построенная прямая с уравнением $x = -p/2$ – ***директрисой,*** величина p – ***фокальным параметром,*** характеризующим расстояние от фокуса директрисы.

На рис. 18 изображена касательная к параболе, проведенная в произвольной точке M. Проведем луч ML с началом в точке M и параллельный оси OX. Можно доказать, что отмеченные на рисунке углы, образованные касательной и прямыми MF и ML, равны. Это свойство параболы называется ***оптическим свойством.***

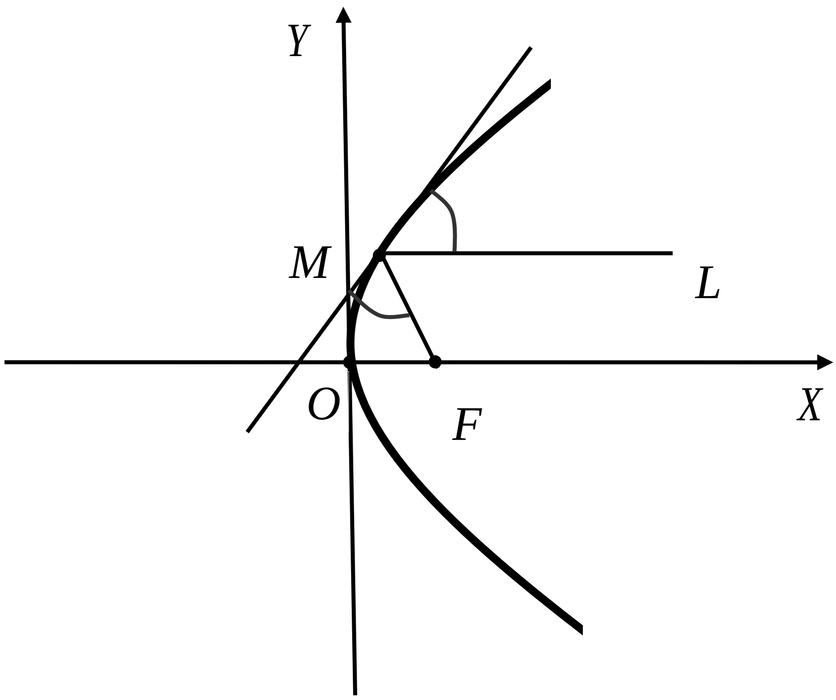

Рис.18. Оптическое свойство параболы

Уравнение параболы можно записать в полярных координатах.

Выберем в качестве полюса фокус F, в качестве директрисы – прямую l, и построим параболу (рис.19). Для получения уравнения параболы запишем условие равенства отрезков MF и MK, учитывая, что расстояние от фокуса до директрисы равно p:

$$MK = p - \rho\cos\varphi,\ MF = \rho \Rightarrow p - \rho\cos\varphi = \rho$$

В результате получили уравнение параболы в полярных координатах.

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}} \qquad (22)$$

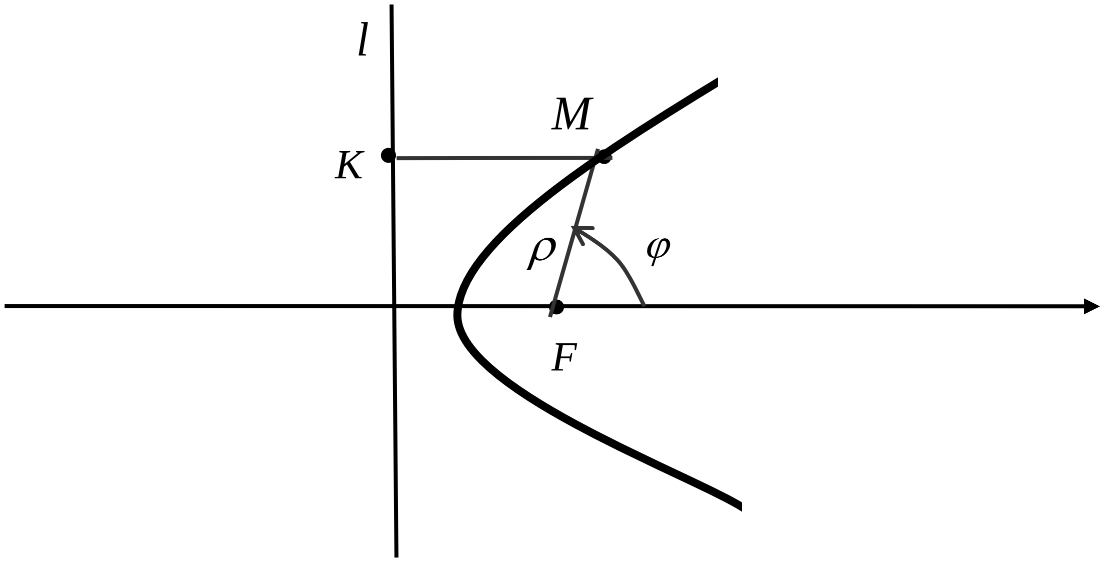

Рис.19.Парабола в полярных координатах

Заметим, что ранее полученное уравнение $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$ является при $e < 1$ уравнением эллипса и при $e > 1$ уравнением гиперболы в полярных координатах. Поэтому можно положить $e = 1$ в уравнение (22) и считать, что эксцентриситет параболы равен единице.

6. Заключение.

Мы полностью изучили кривые второго порядка, удовлетворяющие уравнению (1). Рассмотрены все типы линий, определяемых этим уравнением. Это точка, одна или пара прямых, и, наконец, три основных линии: эллипс, гипербола, парабола, которые построены с помощью системы компьютерной алгебры ***Mathematica.*** Заметим, что построение графиков в системе не требует написания громоздких программ, а также первоначальных знаний и навыков в программировании. В системе ***Mathematica*** графики легко модефицируются. Можно определить поведение графика функции на любом промежутке как ее области определения, так и области значений. Также легко изменяется масштаб, а также точки, через которые проводятся оси декартовой системы координат. Таким образом, использование системы ***Mathematica*** весьма облегчает задачу построения не только кривых второго порядка, но и других кривых.

6.Задачи по теме «Кривые второго порядка».

1. Найти координаты фокусов эллипса в примере №1.

2. Найти координаты фокусов гиперболы в примере №2.

3. Найти координаты фокуса параболы и уравнение директрисы в примере №3.

4. Вывести уравнение касательной в произвольной точке $M(x,y)$, лежащей на кривой, заданной:

а) уравнением из примера №1; б) уравнением из примера №2; в) уравнением из примера №3;

5. Доказать оптическое свойство для эллипса, гиперболы, параболы.

6. Даны координаты двух точек A и B в декартовой системе координат. Известно, что расстояние между ними равно некоторому значению C. Что представляет собой геометрическое место таких точек плоскости, сумма расстояний которых до A и B равен C?

7. Даны координаты двух точек A и B в декартовой системе координат. Известно, что расстояние между ними равно некоторому значению C. Что представляет собой геометрическое место таких точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до A и B равен C?

8. Найти геометрическое множество точек, равноудаленных от фокуса и директрисы, при условии, что директриса проходит через фокус.

9. Могут ли совпадать координаты фокусов: а) эллипса; б) гиперболы?

10. Дано каноническое уравнение гиперболы: $x^2 - y^2 = a^2$. Как расположены по отношению к друг другу асимптоты рассматриваемой гиперболы?

11. Запишите уравнение произвольной гиперболы, для которой асимптотами являются прямые $x=0,\ y=0$.

12. Запишите каноническое уравнение кривой 2-ого порядка, заданной параметрически: а) $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$;

б) $x = a(e^t + e^{-t})/2,\ \ y = b(e^t - e^{-t})/2,\ \ -\infty \le t \le \infty$.