

Нулевой вариант контрольной работы № 3 по теме
«Уравнения параболического и эллиптического типа.
Уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа» (25
баллов)

Контрольная работа № 3 состоит из двух заданий по следующим темам:

- 1) Однородное уравнение теплопроводности. Метод Фурье;
- 2) уравнение Лапласа в полярных координатах в круговом секторе, или задача Дирихле для уравнения Лапласа на круге. Обе задачи для случая двух независимых переменных.

1. Решить уравнение $u'_t = 11u''_{xx}$ с граничными условиями $u'_x(0, t) = u(1, t) = 0$ и начальным условием

$$u(x, 0) = 8 \cos \frac{3\pi x}{2} + 12 \cos \frac{7\pi x}{2}. \quad (12 \text{ баллов}).$$

2. а) Решить уравнение $\Delta u = 0$ в круговом секторе при $0 < r < 2, 0 < \varphi < 3\pi/2$ с граничными условиями $u'_\varphi(r, 0) = u'_\varphi(r, 3\pi/2) = 0, u(2, \varphi) = 128 \cos 6\varphi$ (13 баллов).

или

2. б) Решить уравнение $\Delta u = 0$ в круге при $0 \leq r < 4, 0 \leq \varphi < 2\pi$ с граничным условием $u(4, \varphi) = 16 \sin \varphi + 128 \cos 3\varphi$

Продолжительность контрольной работы – 45 минут.

Ответы:

$$1. u(x, t) = 8e^{-\frac{99\pi^2 t}{4}} \cos \frac{3\pi x}{2} + 12e^{-\frac{539\pi^2 t}{4}} \cos \frac{7\pi x}{2}$$

$$2. \text{ а) } u(r, \varphi) = 2r^6 \cos 6\varphi; \text{ б) } u(r, \varphi) = 4r \sin \varphi + 2r^3 \cos 3\varphi$$