ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА
им. И.М. ГУБКИНА

Кафедра высшей математики

Т.С. СОБОЛЕВА, Н.О. ФАСТОВЕЦ, В.Н. РУСЕВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Теория вероятностей

ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТА АиВТ IV семестр

Москва 2006

УДК 519.2
С 54

Рецензенты:

П. А. Виленкин, к.ф.-м.н., кафедра теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Н. Г. Гамкрелидзе, д.ф.-м.н., кафедра высшей математики факультета автоматики и вычислительной техники РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина

С 54 Соболева Т.С., Фастовец Н.О., Русев В.Н.
Методические рекомендации к практическим занятиям по высшей математике: Теория вероятностей. Для факультета АиВТ (IV семестр). – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2006. – 69с.

Пособие входит в серию учебно-методических изданий по курсу высшей математики. В сжатой форме изложены основные понятия и факты, связанные с классической вероятностью. Включено большое количество подробно решенных задач.

Для студентов факультета АиВТ, а также магистрантов, аспирантов, научных работников, занимающихся исследованиями, связанными с применением математических методов.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАНЯТИЕ 1. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И ФОРМУЛА БАЙЕСА.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ИСХОДОМ (ЭЛЕМЕНТАРНЫМ СОБЫТИЕМ) называется любой простейший исход опыта. Множество всех элементарных исходов данного опыта называется ПРОСТРАНСТВОМ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие условия:

– в результате опыта один из исходов обязательно происходит;

– появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;

– в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Пространство элементарных исходов обозначается Ω, сами элементарные исходы обозначают ω , снабженными, при необходимости, индексами.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

2. Любой набор элементарных исходов (произвольное подмножество пространства элементарных исходов) называется СОБЫТИЕМ и обозначается $A, B, ...$

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого подмножества (события), называются ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ИСХОДАМИ, БЛАГОПРИЯТСТВУЮЩИМИ данному СОБЫТИЮ, или ОБРАЗУЮЩИМИ это СОБЫТИЕ.

3. Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т. е. которое обязательно происходит в данном опыте, называется ДОСТОВЕРНЫМ СОБЫТИЕМ и обозначается Ω.

Событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называется НЕВОЗМОЖНЫМ СОБЫТИЕМ. Невозможное событие обозначается $\emptyset$.

4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ (ПРОИЗВЕДЕНИЕМ) двух событий A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B. Событие C состоит из тех и только тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A, и событию B.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ обозначается $C = A \cap B$ или $C = AB$.

5. События A и B называются НЕСОВМЕСТНЫМИ, или НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ, если их пересечение является НЕВОЗМОЖНЫМ СОБЫТИЕМ, т.е. $AB = \emptyset$.

6. ОБЪЕДИНЕНИЕМ (СУММОЙ) двух событий A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

ОБЪЕДИНЕНИЕ обозначается $A \cup B$ или $A + B$.

7. РАЗНОСТЬЮ двух событий A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

РАЗНОСТЬ обозначается $A \setminus B$ или $A - B$.

8. ДОПОЛНЕНИЕМ события A (обычно обозначается $\overline{A}$) называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда НЕ происходит событие A.

Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ также еще называется событием, ПРОТИВОПО-

ЛОЖНЫМ событию A.

9. Событие A ВКЛЮЧЕНО в событие B, (записывают это $A \subset B$), если появление события A обязательно влечет за собой наступление события B.

Часто удобно представлять события в виде ДИАГРАММЫ Эйлера–Венна.

10. СИГМА-АЛГЕБРОЙ ($\Re$) называется непустая система подмножеств некоторого множества, удовлетворяющая следующим условиям:

– если некоторое множество принадлежит $\Re$, то и его дополнение принадлежит $\Re$;

– если некоторые подмножества (в счетном числе) принадлежат $\Re$, то их объединение и пересечение тоже принадлежат $\Re$.

Каждому элементарному исходу ω в данном опыте можно поставить в соответствие некоторое действительное число $p(\omega)$ – вероятность осуществления этого исхода, потребовав выполнения следующих аксиом:

$$1)\quad 0 \leq p(\omega) \leq 1;$$

$$2)\quad \sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1;$$

$$3)\quad p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

В классическом определении вероятности исходят из того, что ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ Ω содержит конечное число элементарных исходов, причем все они равновозможны.

11. Пусть N – общее число равновозможных элементарных исходов в Ω, а N_A – число элементарных исходов, образующих событие A (число элементарных исходов, БЛАГОПРИЯТСТВУЮЩИХ событию A).

ВЕРОЯТНОСТЬЮ события A называется отношение

$$p(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Данное определение называется КЛАССИЧЕСКИМ ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТИ.

12. Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащему сигма-алгебре $\Re$) поставлено в соответствие число $p(A)$.

Числовую функцию p называют ВЕРОЯТНОСТЬЮ (или ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРОЙ, если она удовлетворяет аксиомам:

$$1)\ \ p(A) \geq 0;$$

$$2)\ \ p(\Omega) = 1;$$

$$3)\ \ p(A_1 + ... + A_n + ...) = p(A_1) + ... + p(A_n) + ...,$$

где события $A_1, A_2, ...$ попарно несовместны.

Вероятность удовлетворяет следующим свойствам:

1. Вероятность противоположного события

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

2. Вероятность невозможного события

$$p(\emptyset) = 0.$$

3. Если $A \subset B$, то

$$p(A) \leq p(B).$$

4. Вероятность заключена в пределах

$$0 \leq p(A) \leq 1.$$

5. Вероятность суммы двух событий

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Последнее свойство называется ТЕОРЕМОЙ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

13. УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ события A при условии (наступления) события B называется отношение вероятности ПЕРЕСЕЧЕНИЯ событий A и B к вероятности события B

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}, \quad (p(B) \neq 0).$$

События A и B называются НЕЗАВИСИМЫМИ, если

$$p(A/B) = p(A),$$

или

$$p(B/A) = p(B)$$

В противном случае события A и B ЗАВИСИМЫ.

Из определения условной вероятности следует формула УМНОЖЕНИЯ вероятностей.

$$p(AB) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A).$$

Для независимых событий эта формула имеет вид

$$p(AB) = p(A)p(B).$$

14. Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ являются

1) ПОПАРНО НЕСОВМЕСТНЫМИ, т.е.

$$H_iH_j = \emptyset, \ i \neq j,$$

2) хотя бы одно из них в результате опыта обязательно происходит, т.е.

$$H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega.$$

Такие события называются ГИПОТЕЗАМИ.

ТЕОРЕМА.

Пусть для некоторого события A и гипотез $H_1, H_2, ...H_n$ известны $p(H_1), ..., p(H_n)$ и $p(A/H_1), ..., p(A/H_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i) = 1$. Тогда вероятность $p(A)$ определяется по формуле

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + ... + p(H_n)p(A/H_n),$$

которую называют ФОРМУЛОЙ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ.

Пусть событие A может произойти вместе с одной из гипотез H_i, $i = 1, 2, ..., n$ и известны вероятности $p(H_1), ..., p(H_n)$ и вероятности $p(A/H_1), ..., p(A/H_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i) = 1$.

Тогда условные вероятности $p(H_i/A)$, $i = 1, 2, ..., n$ определяются формулой БАЙЕСА:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(H_1)p(A/H_1) + ... + p(H_n)p(A/H_n)}.$$

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i/A) = 1$.

15. Для вычисления вероятностей событий в задачах с применением классического определения вероятности иногда приходится использовать формулы комбинаторики.

Пусть множество X состоит из n элементов.

ПЕРЕСТАНОВКИ – линейно упорядоченные наборы из n элементов множества X, отличающиеся порядком элементов.

Таких различных наборов будет

$$P_n = n!$$

РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ – линейно упорядоченные наборы из k различных элементов множества X, причем важен их порядок. Таких различных наборов будет

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ – линейно упорядоченные наборы из k элементов множества X, причем важен их порядок, а элементы могут повторяться. Таких различных наборов будет

$$\widehat{A}_n^k = n^k.$$

СОЧЕТАНИЯ – линейно упорядоченные наборы из k различных элементов множества X, причем их порядок не важен. Таких различных наборов будет

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ЗАДАЧИ.

1. Даны события A, B, C. Выразить через эти события следующие события:

а) Произошло только событие A.

Ответ. $D = A\overline{B}\,\overline{C}$.

б) Произошло хотя бы одно событие.

Ответ. $E = A + B + C$ (или $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$.)

в) Не произошло ни одного события.

Ответ. $M = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

г) Найти вероятность того, что произошло хотя бы одно событие.

Ответ. $p(A+B+C) = 1 - p(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

2. Электрическая цепь состоит из 4-х узлов, соединенных последовательно, которые выходят из строя независимо друг от друга. Прибор выходит из строя, когда выходит из строя хотя бы один узел. Вероятность выхода из строя любого узла равна $p = 0,05$. Найти вероятность работы прибора и вероятность выхода прибора из строя.

Решение. События A, B, C, D – узлы 1-й, 2-й, 3-й, 4-й работают. Событие E – рабочее состояние системы: $E = ABCD$; $\overline{E}$ – система вышла из строя. События A, B, C, D независимы, следовательно $p(ABCD) = p(A)p(B)p(C)p(D)$. Вероятность работы узла $1 - p = 0,95$. Отсюда $p(E) = 0,95^4$. $p(\overline{E}) = 1 - 0,95^4$, т.к. $p(E) + p(\overline{E}) = 1$.

3. Пусть теперь 4 узла электрической цепи соединены параллельно. Найти вероятность выхода из строя и вероятность работы цепи.

Ответ. Событие E – рабочее состояние системы. $p(\overline{E}) = p(\overline{A})p(\overline{B})p(\overline{C})p(\overline{D}) = 0,05^4$; $p(E) = 1 - 0,05^4$.

4. Пусть система 3-х узлов электрической цепи состоит из двух узлов, соединенных последовательно и одного узла, соединенных с первыми двумя параллельно. Пусть событие A состоит в том, что первый узел работает, B – работает второй узел, C – работает третий узел. Вероятности этих событий соответственно равны $p(A) = 0,9$, $p(B) = 0,8$, $p(C) = 0,7$.

Найти вероятность работы цепи.

Решение. Событие E – работа цепи – может быть представлено в виде $E = AB + C$. События A, B, C – независимы. Поэтому

$$p(E) = p(AB + C) = p(AB) + p(C) - p(ABC) =$$

$$= p(A)p(B) + p(C) - p(ABC) = 0,9 \cdot 0,8 + 0,7 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,916.$$

5. Составляется 7 - значный номер телефона. (Номер, состоящий целиком из нулей, считать возможным.) Найти вероятность того, что:

а) A – все цифры в номере будут различными;

б) B – все цифры в номере будут четными.

Ответ.

$$p(A) = \frac{A_{10}^7}{10^7}; \;\; p(B) = \frac{5^7}{10^7}$$

В данной задаче используется классическое определение вероятности, основанное на равновозможности всех исходов опыта.

6. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. Случайным образом отобрали 9 студентов. Какова вероятность: а) среди них 5 отличников? б) среди них не менее 5-ти отличников?

Ответ. а) Всего равновозможных исходов C_{12}^9; благоприятных исходов $C_8^5 \cdot C_{12-8}^4$.

Отсюда

$$p = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9}$$

.

б) Благоприятными будут: "или 5", "или 6", "или 7", "или 8". Поэтому искомая вероятность будет

$$p = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4 + C_8^6 \cdot C_4^3 + C_8^7 \cdot C_4^2 + C_8^8 \cdot C_4^1}{C_{12}^9}.$$

7. В ящике 30 красных шариков и 6 синих. Наугад вынимают 3 шарика. Какова вероятность, что все 3 красные? Какова вероятность, что хотя бы 1 красный?

Ответ.

$$p_1 = \frac{C_{30}^3}{C_{36}^3};\ p_2 = 1 - \frac{C_6^3}{C_{36}^3}.$$

8. В первой урне 2 белых и 10 черных шаров. Во второй урне 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули наугад по одному шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Ответ. Событие A – белый шар из 1-ой урны; событие B – белый шар из второй урны. События A и B независимы. Событие $C = AB$ – оба белые.

$$p(AB) = p(A)p(B) = \frac{2}{12}\frac{8}{12}$$

9. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Вынули один шар. Потом второй. Какова вероятность, что оба белые?

Ответ. Событие A - появление белого шара при первом опыте, $p(A) = \frac{6}{14}$. Событие B – появление белого шара при втором опыте. Событие $C = AB$ – оба шара белые. События A и B зависимы.

$$p(B/A) = \frac{6-1}{14-1}.$$

Отсюда

$$p(C) = p(A)p(B/A) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13}.$$

10. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее извлечен один шар. Найти вероятность того, что это белый шар, если равновозможны все предположения о первоначальном количестве белых шаров в урне.

Ответ. Гипотезы : H_1 – белых шаров не было, H_2 – один белый шар, H_3 – два белых шара.

$$p(H_1) = 1/3;\ \ p(H_2) = 1/3;\ \ p(H_3) = 1/3.$$

Событие C – извлечен белый шар.

$$p(C) = p(H_1)p(C/H_1) + p(H_2)p(C/H_2) + p(H_3)p(C/H_3) =$$

$$= 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 3/3.$$

11. На компрессорной станции магистрального газопровода установлено 6 газоперекачивающих агрегата. Каждый из них может выйти из строя за время T независимо от остальных с вероятностью 0,1. Если вышел из строя один ГПА, перебои в снабжении потребителей происходят с вероятностью 0,6.

Если два и более – с вероятностью 1. Какова вероятность, что за время T будут иметь место перебои в снабжении из-за неисправности агрегатов?

Ответ. Гипотезы: H_1 – все агрегаты работают; H_2 – вышел из строя один агрегат; H_3 – вышли из строя два и более агрегатов.

$$p(H_1) = (1 - 0,1)^6 = (0,9)^6; \quad p(H_2) = C_6^1 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^5;$$

$$p(H_3) = 1 - p(H_1) - p(H_2).$$

Событие C – перебои за время T.

$$p(C) = p(H_1)p(C/H_1) + p(H_2)p(C/H_2) + p(H_3)p(C/H_3) =$$

$$= (0,9)^6 \cdot 0 + 6 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^5 \cdot 0,6 + (1 - (0,9)^6 - 6 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^5) \cdot 1.$$

12. Два завода поставляют трубы для скважин. Первый завод поставил 30 процентов общего количества, и 95 процентов его продукции удовлетворяет стандарту. Второй завод поставляет 70 процентов общего количества, и 90 процентов его продукции удовлетворяет стандарту.

Взятая наудачу труба оказалась нестандартной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом заводе?

Ответ. Гипотезы: H_1 – труба с первого завода; H_2 – труба со второго завода. $p(H_1) = 0,3$; $p(H_2) = 0,7$. Событие C – нестандартная труба.

$$p(H_1/C) = \frac{0,3 \cdot (1-0,95)}{0,3 \cdot (1-0,95) + 0,7(1-0,9)}.$$

13. В первой урне 2 черных и 13 белых шаров. Во второй урне 11 шаров, из них 4 черные и остальные белые. Из первой урны переложили во вторую 2 шара. Потом наудачу из второй вынули шар. Он оказался черным. Какова вероятность, что из первой урны были переложены один черный и один белый шар?

Решение. H_1 – переложили 2 белых шара; H_2 – переложили 1 черный, один белый; H_3 – переложили два черных шара. C – вынули ровно один черный шар.

$$P(H_1) = \frac{C_{13}^2}{C_{15}^2}; \quad P(H_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_{13}^1}{C_{15}^2}; \quad P(H_3) = \frac{C_2^2}{C_{15}^2}; \quad \sum_{i=1}^{3} p(H_i) = 1$$

$$P(C/H_1) = 4/13; \quad P(C/H_2) = 5/13; \quad P(C/H_3) = 6/13;$$

$$P(C) = P(H_1)P(C/H_1) + P(H_2)P(C/H_2) + P(H_3)P(C/H_3);$$

$$P(H_2/C) = \frac{P(H_2)P(C/H_2)}{P(C)}.$$

ЗАНЯТИЕ 2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ называется функция $\xi = \xi(\omega)$, отображающая множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega\}$ на множество действительных чисел. Случайная величина в результате испытания принимает одно из своих возможных значений.

2. Случайная величина называется ДИСКРЕТНОЙ, если множество ее значений конечно или счетно.

3. Случайная величина называется НЕПРЕРЫВНОЙ, если множество ее значений несчетно и сплошь заполняет некоторый промежуток числовой прямой.

4. ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между значениями случайной величины и вероятностями этих значений.

5. ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ случайной величины называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина ξ принимает значение, меньшее x, где x – любое действительное число

$$F(x) = p\{\xi < x\}.$$

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

а). $0 \leq F(x) \leq 1$, т.к. $F(x)-$ вероятность;

b). $F(x)$ неубывающая функция, т.е. при $x_1 < x_2$ имеем $F(x_1) \leq F(x_2)$ – в силу накопительного (кумулятивного) характера $F(x)$;

c). $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

d). $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

e). $p\{\alpha \leq \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$.

6. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан РЯДОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:

ξ	x_1	x_2	x_3	...
p	p_1	p_2	p_3	...

$$\sum_i p_i = 1$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ дискретной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} p\{\xi = x_i\}.$$

7. Для непрерывной случайной величины вводится ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F^{'}(x),$$

поэтому функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

a). $f(x) \geq 0$;

b). $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;

c). $p\{\alpha \leq \xi \leq \beta\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

ЗАМЕЧАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

$p\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x)$

Для непрерывной случайной величины $p\{\xi = x\} = 0$, поэтому

$$p\{a \leq \xi \leq b\} = p\{a \leq \xi < b\} = p\{a < \xi \leq b\} = p\{a < \xi < b\}$$

8. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

8.1. МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ случайной величины (обозначается $M\xi$) называется величина, определяемая следующими формулами:

$$M\xi = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_i \text{ – для дискретной случайной величины;} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \text{ – для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины характеризует центр рассеивания случайной величины (среднее значение).

8.2. ДИСПЕРСИЕЙ случайной величины (обозначается $D\xi$) называется математическое ожидание квадрата отклонения ξ от $M\xi$:

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2]$$

Определяется $D\xi$ формулами:

$$D\xi = \sigma_\xi^2 = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M\xi)^2 p_i \text{ – для дискретной случайной величины;} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x) dx \text{ – для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ называется СРЕДНИМ КВАДРАТИЧЕСКИМ ОТКЛОНЕНИЕМ.

Дисперсия случайной величины характеризует ее разброс относительно среднего значения.

8.3. СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

a). $MC = C, \ \ C = const$;

b). $M(C\xi) = C \cdot M\xi$;

c). $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$;

d). $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$, если ξ и η – независимые случайные величины.

СЛЕДСТВИЯ.

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0;$$

$$M(a\xi + b) = aM\xi + b.$$

8.4. СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

a). $DC = 0$;

b). $D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$;

c). $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$, если ξ и η независимые случайные величины.

СЛЕДСТВИЯ.

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi;$$

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2] = M[\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2] =$$

$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi \ + \ (M\xi)^2 \ = \ M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

8.5. НАЧАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ μ_k порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание ξ^k, т.е. $M[\xi^k]$. Величина μ_k определяется формулами:

$$\mu_k = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i \text{ – для дискретной случайной величины;} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \text{ – для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

8.6. ЦЕНТРАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ ν_k порядка k называется $M[(\xi \ - \ M\xi)^k]$ и определяется формулами:

$$\nu_k = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M\xi)^k p_i \text{ – для дискретной случайной величины;} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f(x)dx \text{ – для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Математическое ожидание $M\xi$ является начальным моментом первого порядка ($k = 1$), $M\xi = \mu_1$, а дисперсия $D\xi$ - центральным моментом второго порядка, $D\xi = \nu_2 = \mu_2 - (\mu_1)^2$.

ЗАДАЧИ.

1. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины, равной числу очков, выпадающих на грани игральной кости при одном бросании.

2. Может ли функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,\ 1 < x < 2, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

быть а) плотностью распределения; б) быть функцией распределения?

Ответ. а) нет, б) нет.

3. Для случайной величины ξ задана плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ kx, & 0 \le x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

а) Чему равен коэффициент k?

б) Построить функцию распределения этой случайной величины.

в) Нарисовать графики плотности распределения и функции распределения для

$\eta_1 = \xi + 1, \quad \eta_2 = (-\xi), \quad \eta_3 = 2\xi.$

4. Три лампы перегорают независимо за время T с вероятностями

$$p_1 = 0,2,\ \ p_2 = 0,4,\ \ p_3 = 0,1$$

соответственно. Случайная величина ξ равна числу ламп, перегоревших за время T. Найти ряд распределения и функцию распределения этой случайной величины. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что $\xi \le 1$. Найти $M\xi$.

Указание. $p\{\xi = 0\} = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,9;$

$p\{\xi = 1\} = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,1;$

$p\{\xi = 2\} = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,1;$

$p\{\xi = 3\} = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,1.$

$p\{\xi \le 1\} = p\{\xi = 0\} + p\{\xi = 1\}$.

5. Амплитуда сигнала на входе усилителя имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 2; \\ 0, & x < 0,\, x > 2. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $p\{\xi > 1\}$;

г) $M\xi$ и $D\xi$.

Указание. $p\{\xi > 1\} = 1 - p\{\xi < 1\} = 1 - F(1)$.

6. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M\xi$.

7. Дискретная случайная величина ξ принимает значения x_1 и x_2, причем известно, что $x_1 < x_2$. Вероятность, с которой эта случайная величина принимает значение x_1, равна $p_1 = 0,6$. Известно, что $M\xi = 1,4$, а $D\xi = 0,24$. Найти ряд распределения этой случайной величины, построить функцию распределения.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

8. Даны две случайные величины ξ_1 с плотностью вероятности

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/2, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & x < -1,\, x > 1; \end{cases}$$

и ξ_2 с плотностью вероятности

$$f_2(x) = \begin{cases} 1/3, & -1 \le x \le 2, \\ 0, & x < -1,\, x > 2. \end{cases}$$

Не проводя вычислений, установить какая из этих случайных величин имеет большее значение:

а) математического ожидания;

б) дисперсии.

Ответ. а) $M\xi_1 < M\xi_2$; б) $D\xi_1 < D\xi_2$.

Указание. Выводы делать на основании графиков плотностей.

ЗАНЯТИЕ 3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. РАВНОМЕРНОЕ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Дискретная случайная величина ξ распределена по БИНОМИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ, если она принимает значения $0, 1, 2, ..., n$ с вероятностями

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n,$$

где $0 < p,\ q < 1, \quad p + q = 1$, а C_n^k – число сочетаний из n по k.

Биномиальное распределение есть распределение числа успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $q = 1 - p$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону, соответственно, равны

$$M\xi = np, \quad D\xi = npq.$$

2. Дискретная случайная величина ξ распределена по ЗАКОНУ ПУАССОНА, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P\{\xi = k\} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k = 0, 1, ...$$

$$M\xi = np, \quad D\xi = npq.$$

Распределение Пуассона обычно применяют там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых событие происходит с малой вероятностью, например, когда число испытаний n по схеме Бернулли велико, а вероятность p и значение np малы ($np \leq 10$). Тогда полагают $a = np$, и вероятность приближенно определяют по формуле Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

3. Случайная величина ξ имеет ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЗАКОН распределения, если она принимает значения $0, 1, 2, ...$ с вероятностями равными

$$P\{\xi = k\} = p\, q^k,$$

где p – вероятность успеха, $q = 1 - p$ – вероятность неудачи.

Здесь случайная величина ξ – число испытаний в схеме Бернулли, которое необходимо провести, прежде чем появится первый успех (до первого успеха).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей геометрический закон, равны

$$M\xi = \frac{q}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

4. Случайная величина ξ имеет РАВНОМЕРНОЕ распределение на отрезке $[a; b]$, если все ее возможные значение принадлежат этому отрезку, и плотность распределения на нем постоянна.

Легко видеть, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, \ x > b. \end{cases}$$

и

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины, очевидно, равно

$$M\xi = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия данной случайной величины равна

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. Случайная величина ξ распределена по ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ (ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ) закону, если она имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр экспоненциального распределения.

Функция распределения в данном случае имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной экспоненциально, равно

$$M\xi = \frac{1}{\lambda},$$

дисперсия

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

ЗАДАЧИ.

1. Выяснить, что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из 4-х, или 5 партий из 8-ми?

Ответ. Противник равносильный, следовательно $p = q = 1/2$. Тогда

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = 4(1/2)^4 = 1/4; \quad P_8(5) = C_8^5 (1/2)^5 (1/2)^3 = 7/32.$$

2. Найти вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит:

а) цифры "5";

б) двух и более "пятерок";

в) ровно двух "пятерок"?

(Все номера трехзначные, неповторяющиеся, равновозможные, номер "000"возможен тоже).

Решение. Пусть ξ – количество "пятерок"в номере. ξ может принимать значения $0, 1, 2, 3$. Вероятность успеха (т.е. "пятерки") на месте одной цифры номера $p = \frac{1}{10} = 0,1$, тогда $q = 0,9$.

а)$P\{\xi = 0\} = q^3 = 0,9^3$

б)$P\{\xi \leq 1\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 0,9^3 + C_3^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2$

в)$1 - P\{\xi = 2\} = 1 - C_3^2 (0,1)^2 \cdot (0,9)$.

3. В течение часа коммутатор в среднем получает 60 вызовов. Какова вероятность, что за 30 сек., в течение которых телефонистка отлучалась, не будет ни одного вызова?

Решение. Плотность потока (среднее число вызовов в минуту) равна

$$\lambda = \frac{60}{60} = 1 \text{ выз./мин.}$$

Вероятность того, что за время T произойдет ровно m вызовов, равна

$$P\{\xi = m\} = \frac{(\lambda T)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda T}.$$

Искомая вероятность того, что за время $T = 0,5$ мин. (30 сек.) не будет ни одного вызова $P\{\xi = 0\} = e^{-0,5}$.

4. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа:

а) двух элементов в год;

б) не менее двух элементов в год?

Решение. Здесь ξ – количество отказов за год, n велико, p и np малы. Следовательно, можно применить закон Пуассона с параметром $a = np = 1$. Отсюда

а) $P\{\xi = 2\} = \dfrac{(np)^2}{2!}e^{-np} = 0,5e^{-1} = \dfrac{1}{2e}$,

б) $P\{\xi \geq 2\} = 1 - P\{\xi = 0\} - P\{\xi = 1\} = 1 - 2/e$.

5. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна $p = 0,01$. Сколько надо купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному с вероятностью $p \geq 0,95$?

Решение. Здесь ξ – количество выигравших билетов. Применим распределение Пуассона с параметром $a = np$.

"Ни один билет не выиграл" $\quad P\{\xi = 0\} = e^{-a}$.

"Хотя бы один выиграл" $\quad P\{\xi \geq 1\} = 1 - e^{-a} \geq 0,95$.

Следовательно,

$$e^{-a} \leq 0,05,$$

откуда $a = np \geq 3$ и $n \geq 3/0,01 = 300$.

6. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения любого изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено а) хотя бы одно изделие; б) ровно три изделия; в) более трех

изделий.

Ответ. а) $a = np = 500 \cdot 0,002 = 1$; $P\{\xi \geq 1\} = 1 - P(0) = 1 - e^{-1}$;

б) $P(3) = \dfrac{e{-1}}{3!}$;

в) $P\{\xi > 3\} = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3))$.

7. Участок газопровода между двумя компрессорными станциями имеет длину 100 км. Появление утечки газа равновероятно в любой точке участка. Зарегистрирована утечка. Какова вероятность, что утечка произошла ближе, чем за 10 км от какой-либо станции ?

Решение. Случайная величина ξ – место утечки имеет равномерное распределение на интервале $[0; 100]$. Искомая вероятность

$$P = P\{0 \leq \xi < 10\} + P\{90 \leq \xi \leq 100\} = 2 \cdot \frac{10}{100} = 0,2.$$

8. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, большая 0,05.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что ошибка распределена равномерно на интервале $[0; 0,2]$. Ошибка ξ превысит 0,05, если она будет лежать в интервале $(0,05; 0,2 - 0,05) = (0,05; 0,15)$. Плотность распределения ошибки

$$f(x) = \frac{1}{0,2},$$

поэтому искомая вероятность равна

$$P = \int\limits_{0,05}^{0,15} f(x)dx = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

9. Число отказов за год на участке магистрального трубопровода подчинено закону Пуассона с параметром $\lambda = 0,8$ (1/год). Найти среднее

время безотказной работы участка. Через какой промежуток времени вероятность появления отказа превысит 0,5? Найти вероятность того, что в течение трех лет будет не менее двух отказов.

Решение. Время безотказной работы η имеет экспоненциальное распределение с плотностью $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность потока отказов (среднее число отказов в год). Среднее время безотказной работы

$$M\eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,8} = 1,25(\text{год}).$$

Промежуток времени, через который вероятность отказа превысит $0,5$, найдем из соотношения

$$P\{\eta > t_0\} > 0,5,$$

т.е.

$$P = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t_0} > 0,5,$$

отсюда

$$t_0 > \frac{\ln 0,5}{-\lambda} = \frac{\ln 0,5}{-0,8} \approx 0,86 \text{ (год)}.$$

Вероятность того, что в течение трех лет (T) будет не менее двух отказов, найдем с помощью закона Пуассона с параметром

$$a = \lambda T = \lambda \cdot 3 = 0,8 \cdot 3 = 2,4 :$$

$$P\{\xi \geq 2\} = 1 - P\{\xi < 2\} = 1 - e^{-2,4}(1 + 2,4).$$

10. Среднее время безотказной работы прибора 2 года. Найти вероятность того, что за 5 лет произойдет не более трех отказов?

Решение. Пусть ξ – время безотказной работы прибора. Среднее время безотказной работы связано с интенсивностью отказов λ соотношением

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}$$

откуда получаем

$$\lambda = \frac{1}{M\xi} = \frac{1}{2} = 0,5\ (\frac{1}{\text{год}}).$$

Случайная величина η – количество отказов за 5 лет имеет распределение Пуассона с параметром $a = \lambda \cdot 5 = 0,5 \cdot 5 = 2,5$, поэтому искомая вероятность равна

$$P\{\xi \leq 3\} = \sum_{k=0}^{3} \frac{(2,5)^k}{k!} \cdot e^{-2,5}.$$

11. Средняя продолжительность телефонного разговора 3 мин. Найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 мин.

Решение. Пусть η – продолжительность телефонного разговора имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Среднее время

$$M\eta = \frac{1}{\lambda} = 3,$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$P\{\eta \leq 9\} = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 9} = 0,95.$$

12. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы имеет показательное распределение со средними значениями: для первого – 20 часов; для второго – 25 часов. Найти вероятность того, что за 10 часов а) оба элемента не откажут; б) откажет только один элемент.

Указание. $1/\lambda_1 = 20, \quad \lambda_1 = 1/20 = 0,05;\ 1/\lambda_2 = 25,\ \lambda_2 = 0,04$. Безотказная работа за 10 часов для первого элемента

$$P_1 = e^{-0,05 \cdot 10},$$

для второго

$$P_2 = e^{-0,04 \cdot 10}.$$

а) оба не откажут: $p = P_1 \cdot P_2$.

б) откажет только один: $p = P_1(1 - P_2) + P_2(1 - P_1)$.

13. Плохо успевающий студент может сдать экзамен по высшей математике с вероятностью 0,4. Будем считать, что количество попыток сдать такой экзамен неограниченно. Пусть ξ случайная величина, равная количеству попыток до первого успеха (т.е., количество неудач). Построить ряд распределения такой случайной величины и найти вероятность того, что студент сдаст экзамен с третьей попытки.

Ответ. Дискретная случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0,4$; $q = 0,6$. Следовательно,

$$P\{\xi = n\} = p \cdot q^{n-1}$$

и

$$P\{\xi = 2\} = 0,4 \cdot (0,6)^2.$$

ЗАНЯТИЕ 4. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ. ТЕОРЕМЫ МУАВРА – ЛАПЛАСА.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Случайная величина имеет НОРМАЛЬНОЕ или ГАУССОВСКОЕ распределение, если ее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (-\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0).$$

Здесь μ и σ – числовые параметры; μ – математическое ожидание, а $\sigma = \sqrt{D\xi}$ – среднее квадратическое отклонение.

Нормальное распределение с параметрами μ, σ обозначают $N(\mu;\sigma^2)$.

Если $\mu = 0$, а $\sigma = 1$, то такой нормальный закон называют СТАНДАРТНЫМ:

$$N(0;1).$$

Функция распределения случайной величины, имеющей нормальное распределение, имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Для закона $N(0;1)$

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

составлены таблицы.

Существуют различные ВАРИАНТЫ ТАБЛИЦ, отвечающих стандартному нормальному закону распределения.

1.

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$F^*(-x) = 1 - F^*(x);$$

$$P\{a \le \xi < b\} = F^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

2.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x);$$

$$P\{a \le \xi < b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Функция $\Phi(x)$ называется ФУНКЦИЕЙ ЛАПЛАСА.

3.

$$\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$\Phi^*(-x) = -\Phi^*(x);$$

$$P\{a \le \xi < b\} = \frac{1}{2}\left[\Phi^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

Отметим очевидные связи между указанными выше функциями:

$$F^*(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x); \qquad \Phi^*(x) = 2\Phi(x)$$

Если случайная величина ξ распределена нормально, то вероятность отклонения ξ от ее математического ожидания $M\xi$ по абсолютной величине не больше, чем на ε, может быть найдена по формуле

$$P\{|\xi - M\xi| \leq \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2F^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

2. ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ.

Отклонение случайной величины от ее математического ожидания больше, чем на 3σ, практически невозможно, то есть

$$P\{|\xi - \mu| > 3\sigma\} = 0,0027....$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ МУАВРА – ЛАПЛАСА.

Напомним, что число появлений события A в n испытаниях по схеме Бернулли есть дискретная величина с биномиальным распределением и

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \ (q = 1 - p).$$

Если n велико, то пользоваться этой формулой неудобно. В этих случаях можно применять асимпотические формулы.

1) Пусть n велико, p мало ($p < 0,1$ и $np \leq 10$).

Тогда удобно использовать асимптотическую формулу Пуассона

$$P\{\xi = k\} \approx \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad a = np,$$

которую мы применяли на предыдущем занятии.

2) Пусть n велико ($n \gg 1;\ 0 < p < 1$).

Тогда биномиальное распределение близко к нормальному, а именно справедлива локальная теорема МУАВРА–ЛАПЛАСА

$$P\{\xi = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Если требуется вычислить вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал, то удобно применять интегральную теорему МУАВРА–ЛАПЛАСА:

$$P\{m \le \xi \le k\} = P\{\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\xi-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\} \cong$$

$$\cong F^*\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - F^*\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

в силу того, что при $n \to \infty$ имеет место

$$P\left\{\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

ЗАДАЧИ.

1. Случайная величина ξ распределена нормально: $\xi \in N(1;2)$. Не пользуясь таблицами, определить, какое из событий более вероятно:

$$-1 < \xi < 0 \text{ или } 3 < \xi < 4?$$

Указание. Использовать график плотности ξ.

2. Суточный дебит скважины на газовом промысле можно рассматривать как случайную величину ξ, имеющую нормальное распределение с параметрами $\mu = 1$ (млн. кубометров/сут.), $\sigma = 0,2$ (млн. кубометров/сут.) Найти вероятности событий:

а) A – суточный дебит не превзойдет 0,9 млн.кубометров/сут.;

б) B – суточный дебит превысит 1,5 млн.кубометров/сут.;

в) C – суточный дебит заключен в пределах (0,8-1,2) млн. кубометров/сут.?

Ответ.

$$P(A) = F^*\left(\frac{0,9-1}{0,2}\right) = 1 - F^*(0,5) \approx 0,309;$$

$$P(B) = 1 - p\{\xi \le 1,5\} = 1 - F^*(2,5) \approx 0,006;$$

$$P(C) = F^*\left(\frac{1,2-1}{0,2}\right) - F^*\left(\frac{0,8-1}{0,2}\right) \approx 0,682.$$

3. Давление в газопроводе измеряется манометром. Погрешность показаний прибора можно считать случайной величиной ξ, распределенной по нормальному закону, причем математическое ожидание погрешности (систематическая ошибка) равно нулю.

а) В предположении, что среднеквадратическое отклонение погрешности $\sigma = 0,2$ (кгс/ см^2), определить вероятность того, что погрешность измерения не превысит 0,2.

б) При каком значении σ измеренное давление отличается от истинного не более, чем на 0,1 кгс/ см^2 с вероятностью 0,99?

Ответ.

а)

$$P\{|\xi - 0| \le 0,2\} = 2\Phi\left(\frac{0,2}{0,2}\right) = 2\Phi(1) \approx 0,68.$$

б)

$$P\{|\xi| < 0,1\} = 2\Phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,99, \quad \Phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,495.$$

По таблицам

$$\frac{0,1}{\sigma} = 2,58;\ \sigma = \frac{0,1}{2,58} \approx 0,04.$$

4. Случайная величина ξ распределена нормально с $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно μ, в котором с вероятностью 0,9973 окажется случайная величина ξ в результате испытания?

Ответ.

$$P\{|\xi - \mu| < \varepsilon\} = 0,9973 = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right); \quad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,4986.$$

По таблицам

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} \approx 3; \quad \varepsilon = 3\sigma = 15\text{мм}.$$

Длина интервала $(\mu - \varepsilon < \xi < \mu + \varepsilon)$ равна $2\varepsilon = 30$ мм.

5. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону $\xi \in N(0; 25)$, $\sigma = 5$ мм. Сколько процентов годных деталей изготовляет автомат?

Ответ.

$$p\{|\xi| < 10\} = 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 0,4772 \cdot 2 \approx 0,95.$$

Следовательно, примерно 95 процентов.

6. Случайная величина ξ распределена нормально, $\xi \in N(10; \sigma^2)$. Известно, что $P\{10 \le \xi < 20\} = 0,3$. Найти $P\{0 \le \xi < 10\}$.

Ответ. $P = 0,3$, т.к. в силу симметричности распределения относительно $\mu = 10$, $P\{10 \le \xi < 20\} = P\{0 \le \xi < 10\}$.

7. Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 100 раз герб появится ровно 60 раз.

Решение. Случайная величина ξ – количество гербов при $n = 100$ подбрасываниях имеет биномиальное распределение с $p = 1/2$, $q = 1/2$, поэтому

$$P\{\xi = 60\} = C_{100}^{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

Эту вероятность можно оценить с помощью локальной теоремы Муавра – Лапласа

$$P\{\xi = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

При $k = 60$ находим значение функции

$$\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = \varphi\left(\frac{60-50}{\sqrt{25}}\right) = \varphi(2),$$

по соответствующей таблице определяем $\varphi(2) \approx 0,054$ и тогда

$$P\{\xi = 60\} \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi(2) = \frac{0,054}{5} \approx 0,01.$$

8. Вероятность рождения мальчика 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно половина мальчиков.

Ответ.

$$n = 100;\ k = \frac{100}{2} = 50;\ p = 0,51;\ np = 51.$$

$$P\{\xi = 50\} \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \cdot \varphi(x);$$

$$x = \frac{50 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx -1/5 = -0,2.$$

т.к. функция $\varphi(x)$ четная, то

$$\varphi(-x)=\varphi(x);\ \varphi(-0,2)=\varphi(0,2)\approx 0,391,$$

и поэтому,

$$P\{\xi=50\}\approx\frac{1}{5}\cdot 0,391\approx 0,078.$$

9. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что в серии из 600 выстрелов цель будет поражена от 200 до 250 раз.

Решение. ξ – количество поражений цели подчиняется биномиальному закону распределения с числом испытаний $n=600$, вероятностью "успеха"$p=0,4$, поэтому

$$P\{200\le\xi\le 250\}=\sum_{k=200}^{250}C_{600}^{k}(0,4)^{k}(0,6)^{600-k}.$$

Эту вероятность можно оценить с помощью интегральной теоремы Муавра – Лапласа: $np=240,\ npq=144$,

$$P\{200\le\xi\le 250\}\approx\Phi\left(\frac{250-240}{\sqrt{144}}\right)-\Phi\left(\frac{200-240}{\sqrt{144}}\right)=$$

$$=\Phi(0,83)+\Phi(3,33)\approx 0,8.$$

10*. "Театр начинается с вешалки"(Задача повышенной сложности).

Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, чтобы в среднем в 99 случаев из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли?

Предполагается, что зрители приходят поодиночке и каждый из них независимо от других выбирает с вероятностью 0,5 любой из входов. Предполагается также, что каждый зритель воспользуется услугами гардероба. Зритель будет обслужен в гардеробе, если имеются свободные места.

Насколько изменится число мест в гардеробе, если зрители будут приходить парами, и каждая пара будет выбирать любой из входов с равной вероятностью независимо друг от друга?

Решение. Математической моделью данной задачи является схема независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,5 с использованием предельной теоремы Муавра – Лапласа.

Пусть k – число мест в каждом из гардеробов, которое в силу симметрии задачи (равновероятности выбора зрителем входа в театр) будет одинаково для каждого из гардеробов, $n = 1000$ – количество всех зрителей, которые, как предполагается, все придут. Обозначим через S_n количество зрителей, вошедших в театр через первый вход, тогда $(n-S_n)$ – это количество зрителей, которые вошли в театр через второй вход. Очевидно, что S_n является случайной величиной, соответствующей схеме n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха, равной $p = 0,5$, тогда $q = 1 - p = 0,5$. Событие, состоящее в том, что все зрители, вошедшие в театр через первый вход, будут обслужены, можно описать так: $\{S_n \leq k\}$. Аналогично, для второго выхода – $\{n - S_n \leq k\}$.

Таким образом, событие, означающее, что все зрители смогут раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли, можно описать следующим образом: $\{n - k \leq \ S_n \leq k\}$. Следовательно, вероятностное условие нашей задачи можно записать так:

$$P\{n - k \leq S_n \leq k\} = 0,99.$$

Итак, мы получили уравнение на k. Как его решить? Так как $n = 1000$

(число испытаний) очень велико, можно применить предельную теорему Муавра – Лапласа. Преобразуем выражение $\{n-k<S_n<k\}$ следующим образом:

$$\left\{\frac{n-k-np}{\sqrt{npq}}<\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}<\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right\}.$$

Тогда наше уравнение будет иметь вид:

$$P\left\{\frac{n-k-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right\}=0,99.$$

В силу интегральной теоремы Муавра – Лапласа:

$$P\left\{\frac{n-k-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right\}\approx F^*\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)-F^*\left(\frac{n-k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

По условию $n=1000,\ p=q=0,5$. Поэтому

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{k-500}{\sqrt{250}},\ \text{а}\ \frac{n-k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{500-k}{\sqrt{250}}.$$

Следовательно,

$$F^*\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)-F^*\left(\frac{n-k-np}{\sqrt{npq}}\right)=F^*\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)-F^*\left(\frac{500-k}{\sqrt{250}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)-\Phi\left(\frac{500-k}{\sqrt{250}}\right)=2\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)\approx0,99$$

в силу четности функции $\Phi(x)$.

Таким образом,

$$\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)\approx0,495.$$

Отсюда, согласно таблице значений для $\Phi(x)$, получаем, что

$$\frac{k-500}{\sqrt{250}} \approx 2,58.$$

Итак, окончательно имеем

$$k \approx 500 + 2,58\sqrt{250} \approx 541.$$

Случай с парами рассмотреть самостоятельно.

ЗАНЯТИЕ 5. СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЁВА. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В ФОРМЕ ЧЕБЫШЁВА И БЕРНУЛЛИ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ сходится по вероятности к числу a, если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi_n - a| \geq \varepsilon\} \to 0,\ (n \to \infty),$$

или

$$P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} \to 1,\ (n \to \infty).$$

2. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЁВА.

Пусть случайная величина ξ имеет конечные $M\xi$ и $D\xi$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

или

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В ФОРМЕ ЧЕБЫШЁВА.

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ последовательность НЕЗАВИСИМЫХ случайных величин, математические ожидания которых $M\xi_i$ конечны, а дисперсии ограничены одной и той же константой $(D\xi_i \leq C),\ i = 1, ..., n, ...$.

Тогда среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0,\ (n \to \infty).$$

4. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ.

Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A, вероятность которого в каждом опыте равна p. Тогда при неограниченном увеличении числа опытов n частота $\frac{m}{n}$ события A сходится по вероятности к его вероятности p : для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1,\ (n \to \infty),$$

или

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0,\ (n \to \infty).$$

ЗАДАЧИ.

1. В среднем 70 процентов саженцев приживаются после посадки. Сколько нужно посадить саженцев, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9 ожидать, что отклонение числа прижившихся саженцев от их математического ожидания не превышает по модулю 40?

Решение. Пусть ξ – число прижившихся саженцев из n. Считая, что каждый саженец приживается с вероятностью $p = 0,7$ независимо от других, запишем математическую формулировку задачи

$$P\{|\xi - M\xi| \leq 40\} \geq 0,9,$$

Из этого соотношения надо определить n. Воспользуемся неравенством Чебышёва

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

В нашем случае

$$M\xi = np = n \cdot 0,7, \quad D\xi = npq = n \cdot 0,7 \cdot 0,3 = n \cdot 0,21, \quad \varepsilon = 40,$$

поэтому

$$1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{n \cdot 0,21}{(40)^2} = 0,9,$$

откуда $n \approx 761$.

2. Монета бросается 1000 раз. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частоты появления герба от вероятности появления герба $(p = 1/2)$ по абсолютной величине будет меньше, чем на 0,1 .

Указание. Пусть герб появился m раз. Частота появления герба $\frac{m}{1000}$, тогда по неравенству Чебышёва

$$P\left\{\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0,1\right\} > 1 - \frac{D_\xi}{(0,1)^2} = 1 - \frac{p\,q}{n(0,1)^2} = \frac{39}{40} = 0,975.$$

При этом

$$\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0,1; \;\; 0,4 < \frac{m}{1000} < 0,6; \;\; 400 < m < 600.$$

3. Найти количество опытов n, при которых относительная частота появления случайной величины отклонится от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше, чем на 0,01 с вероятностью $p = 0,8$.

Решение. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - M\left[\frac{m}{n}\right]\right| < 0,01\right\} = 0,8,$$

где

$$M\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{1}{n}M[m] = \frac{np}{n} = p.$$

Применим неравенство Чебышёва

$$1-\frac{D\left[\frac{m}{n}\right]}{(0,01)^2}=0,8,$$

где

$$D\left[\frac{m}{n}\right]=\frac{1}{n^2}D[m]=\frac{np\,q}{n^2}=\frac{p\,q}{n}.$$

Так как p нам неизвестно, то воспользуемся тем, что

$$p\,q\le\frac{1}{4}$$

($\max\limits_p\{p(1-p)\}$ находим из условия $\{p(1-p)\}'_p=0$; $1-2p=0$; $p=\frac{1}{2}$)

Теперь

$$1-\frac{1}{(0,01)^2 4n}\ge 0,8,$$

откуда

$$n\ge\frac{1}{(0,01)^2\cdot 4\cdot 0,2}=12500.$$

Неравенство Чебышёва дает грубые оценки (очень завышенные). В данной задаче можно воспользоваться тем, что относительная частота $\frac{m}{n}$ имеет приближенно нормальное распределение

$$N(p;\frac{pq}{n}).$$

Тогда

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,01\right\}\approx 2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=0,8,$$

Полагая $p\,q=\frac{1}{4}$, получим

$$\Phi\left(0,02\cdot\sqrt{n}\right)=0,4,\ \ 0,02\cdot\sqrt{n}\approx 1,28,\ \ n\approx\left(\frac{1,28}{0,02}\right)^2=4096.$$

4. В урне 1000 белых 2000 черных шаров. Вынули с возвращением 300 шаров. Оценить снизу вероятность того, что число m извлеченных белых шаров, удовлетворяет неравенству $80\le m\le 120$.

Решение. Т.к. шары вынимаются с возвращением, то вероятность достать белый шар в каждом из $n = 300$ опытов одна и та же

$$p = \frac{1000}{1000 + 3000} = \frac{1}{3}.$$

Пусть m – число вынутых белых шаров, тогда

$$M[m] = np = 300 \cdot \frac{1}{3}.$$

Неравенство

$$80 \leq m \leq 120$$

можно переписать в виде

$$80 - np \leq m - np \leq 120 - np,$$

т.е.

$$-20 \leq m - np \leq 20$$

или

$$|m - np| \leq 20.$$

Оценим вероятность этого неравенства с помощью неравенства Чебышёва.

$$P\{|m - np| \leq 20\} \geq 1 - \frac{np\,q}{20^2} = 1 - \frac{300 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{400} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

5. При производстве трубопроводной арматуры в среднем 95 процентов изделий удовлетворяет стандарту. Сколько образцов арматуры надо взять, чтобы с вероятностью 0,99 отклонение частоты стандарта от 0,95 по абсолютной величине не превосходило 0,06?

Указание. Частота $\dfrac{m}{n}$, где m – количество стандартных изделий, n – искомое количество необходимых изделий.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,95\right|<0,06\right\}=$$

$$=2F^*\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)-1=2F^*\left(\frac{0,06}{\sqrt{\frac{0,95\cdot 0,05}{n}}}\right)-1=2\Phi\left(\frac{0,06\sqrt{n}}{\sqrt{0,95\cdot 0,05}}\right)=0,99.$$

Отсюда по таблицам находим аргумент функции и искомое $n\approx 32450$.

6. Даны независимые случайные величины $\xi_1,...,\xi_n$. Дисперсия каждой из них $D\xi_i\leq 5$. Найти число n этих величин, при котором вероятность отклонения их среднего арифметического от среднего арифметического их математических ожиданий менее, чем на 0,1, превысит 0,9.

Указание.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|<0,1\right\}>0,9$$

По неравенству Чебышёва

$$1-\frac{D\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right]}{(0,1)^2}=0,9$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i\leq\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot 5=\frac{5}{n},\ \text{ т.к. }\ D\xi_i\leq 5,\ \ \forall i$$

поэтому

$$1-\frac{5}{n(0,1)^2}>0,9;$$

откуда

$$n>\frac{5}{(0,1)^3}=5000.$$

7. Имеется некоторая случайная величина ξ, для которой известны $M\xi=a$; $D\xi=1$. Выполнены n независимых замеров и получены значения $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$. В качестве оценки a берется среднее арифметическое

полученных измерений.

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Определить, сколько замеров нужно сделать, чтобы отклонение η от a по абсолютной величине более чем на 0,1, было с вероятностью менее 0,05.

Указание. $P\{|\eta - a| \geq 0,1\} < 0,05$

Используя неравенство Чебышёва, получаем

$$\frac{D\eta}{(0,1)^2} < 0,05;\ \ D\eta = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = \frac{n\cdot 1}{n^2} = \frac{1}{n};$$

поэтому

$$\frac{1}{(0,1)^2\,n} < 0,05,$$

откуда $n > 2000$.

8. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что при бросании 10 игральных костей сумма очков отклонится от математического ожидания меньше, чем на 8.

Указание. Пусть ξ – сумма очков при бросании 10 игральных костей. Легко понять,что $\xi = \sum\limits_{i=1}^{10}\xi_i$, где ξ_i – количество очков, выпавших при i-том бросании.

$$M\xi = \sum_{i=1}^{10} M\xi_i,\quad M\xi_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5;\ \ \forall i$$

$$M\xi = 10\cdot M\xi_i = 35;$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{10} D\xi_i,\ \text{ т.к. } \xi \text{ – независимы}$$

$$D\xi_i = M(\xi_i)^2 - (M\xi_i)^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - (3,5)^2 = \frac{35}{12};\ \ \forall i$$

$$D\xi = 10 \cdot D\xi_i = \frac{175}{6}$$

$$P\{|\xi - 35| < 8\} \geq 1 - \frac{175}{6 \cdot 8^2} = 0,5443.$$

ЗАНЯТИЕ 6. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ называется совокупность случайных величин ξ и η — СЛУЧАЙНЫЙ ВЕКТОР (ξ, η).

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ пары случайных величин (двумерного случайного вектора) определяется следующим образом

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}.$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

a). $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

b). $F(x, y)$ – неубывающая по каждой переменной.

c). $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$.

d). $F(+\infty, +\infty) = 1$.

e). $F(x, +\infty) = F_\xi(x)$; $F(+\infty, y) = F_\eta(y)$, где $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ – функции распределения координат случайной величины (ξ, η).

Случайные величины ξ и η называются НЕЗАВИСИМЫМИ, если для всех x и y имеет место

$$F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y).$$

3. ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ – возможные значения случайной величины ξ , а $y_1, y_2, ..., y_n$ – возможные значения случайной величины η.

Пусть $p_{ij} = P\{\xi = x_i; \eta = y_j\}$. Очевидно, $p_{ij} \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Закон распределения такой двумерной случайной величины (ξ, η) задается таблицей (матрицей):

$x_i \diagdown y_j$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$	p_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\cdots$	p_{mn}

Причем

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i = P\{\xi = x_i\} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_j = P\{\eta = y_j\}$$

Дискретные случайные величины ξ и η будут НЕЗАВИСИМЫМИ, если выполняется условие

$$p_{ik} = P\{\xi = x_i, \eta = y_k\} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_k\} = p_i \cdot p_k$$

для любых $i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n.$

4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Закон распределения непрерывной двумерной случайной величины может быть задан ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

$$f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y},$$

или ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $F(x, y)$.

Плотность вероятности и функция распределения связаны соотношениями

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ.

1. $f(x, y) \geq 0$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$;

3. $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy,\ f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx.$

4. Вероятность попадания случайной величины в некоторую область D есть

$$P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Для независимых случайных величин $f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$

5. УСЛОВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ распределения случайной величины η при условии, что случайная величина ξ приняла значение x называется функция

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_\xi(x)}.$$

Аналогично,

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$$

– условная плотность распределения случайной величины ξ при условии, что η приняла значение y.

Для дискретных случайных величин условные вероятности по определению равны

$$P(\xi = x_i/\eta = y_k) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_k)}{P(\eta = y_k)}, \ \ \forall i$$

6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

По известным плотностям $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ можно найти математические ожидания и дисперсии ξ и η.

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx;$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx.$$

Аналогично для $M\eta$ и $D\eta$.

Иногда удобнее использовать следующие формулы

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy;$$

$$M\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy;$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy - (M\xi)^2$$

$$D\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 f(x,y)dxdy.$$

Интегрирование ведется по областям возможных значений системы $(\xi,\, \eta)$.

Кроме математического ожидания и дисперсии рассматривают еще и другие числовые характеристики всей системы.

НАЧАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ k-го порядка $\alpha_{l,m}$ системы случайных величин $(\xi,\, \eta)$ называется математическое ожидание произведения $\xi^l \cdot \eta^m$, где $l + m = k$

$$\alpha_{l,m} = M[\xi^l \cdot \eta^m].$$

ЦЕНТРАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ k-го порядка $\beta_{l,m}$ системы называется

$$M[(\xi - M\xi)^l \cdot (\eta - M\eta)^m], \;\; l + m = k.$$

Таким образом, для дискретных случайных величин

$$\alpha_{l,m} = \sum_i \sum_j x_i^l \cdot y_j^m \cdot p_{ij};$$

$$\beta_{l,m} = \sum_i \sum_j (x_i - M_\xi)^l (y_j - M_\eta)^m \cdot p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$\alpha_{l,m} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^l y^m f(x,y)dxdy;$$

$$\beta_{l,m} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M_\xi)^l (y - M_\eta)^m f(x,y)dxdy.$$

С помощью этих числовых характеристик можно выразить основные числовые характеристики координат системы $(\xi,\, \eta)$

$$M\xi = \alpha_{1,0} = M(\xi^1 \cdot \eta^0) = \mu_\xi;$$

$$M\eta = \alpha_{0,1} = M(\xi^0 \cdot \eta^1) = \mu_\eta;$$

$$D\xi = \beta_{2,0} = M[(\xi - M\xi)^2 \cdot (\eta - M\eta)^0] = \sigma_\xi^2;$$

$$D\eta = \beta_{0,2} = M[(\xi - M_\xi)^0 \cdot (\eta - M\eta)^2] = \sigma_\eta^2.$$

Второй смешанный центральный момент

$$\beta_{1,1} = M[(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta)] = K_{\xi,\eta} = cov(\xi,\eta),$$

называется КОРРЕЛЯЦИОННЫМ МОМЕНТОМ, или КОВАРИАЦИЕЙ.

Для дискретных случайных величин

$$cov(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j (x_i - M\xi)(y_j - M\eta)p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$cov(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)(y - M\eta)f(x,y)dxdy.$$

Ковариация является характеристикой зависимости между случайными величинами.

Если ξ и η НЕЗАВИСИМЫ, то $cov(\xi, \eta) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, если ξ и η имеют двумерное нормальное распределение, то из условия $cov(\xi, \eta) = 0$, следует независимость ξ и η.

Величина

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

называется КОЭФФИЦИЕНТОМ КОРРЕЛЯЦИИ

$$-1 \leq r_{\xi,\eta} \leq 1.$$

Если $r_{\xi,\eta} = 0$, то говорят, что случайные величины ξ и η НЕКОРРЕЛИРОВАННЫ.

Коэффициент корреляции характеризует степень приближения зависимости между случайными величинами к ЛИНЕЙНОЙ.

ЗАДАЧИ.

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной величины (ξ, η)

$x_i \backslash y_j$	3	10	12
4	$0,17$	$0,13$	$0,25$
5	$0,10$	$0,30$	$0,05$

Составить законы распределения ξ и η. Найти $P\{\eta \geq 4\}$ и $M\eta$.

Ответ. Законы распределения ξ и η:

x_i	4	5
p_i	$0,55$	$0,45$

y_j	3	10	12
p_j	$0,27$	$0,43$	$0,30$

$$P\{\eta \geq 4\} = P\{\eta = 10\} + P\{\eta = 12\} = 0,73,$$

$$M\eta = 3 \cdot 0,27 + 10 \cdot 0,43 + 12 \cdot 0,3 = 8,71.$$

2. Задана двумерная непрерывная случайная величина (ξ, η). Известно, что

$$0 \leq x \leq 1; \;\; 0 \leq y \leq 1; \;\; f(x,y) = const.$$

Найти плотность распределения $f(x,y)$, плотности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, проверить независимость ξ и η.

Решение. Т.к. $f(x,y) = c$ – постоянная, то (ξ, η) имеет двумерное равномерное распределение в области $0 \leq x \leq 1;\;\; 0 \leq y \leq 1:$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \;\; 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \int\limits_0^1 f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy = 1, \;\; 0 \leq x \leq 1; \\ 0, \quad x < 0, x > 1. \end{cases}$$

аналогично

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & y < 0, y > 1. \end{cases}$$

$f(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, значит ξ и η независимы.

3. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η)

$$
f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 5e^{-5x}, & x \geq 0. \end{cases}
$$

и

$$
f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 2e^{-2y}, & y \geq 0. \end{cases}
$$

Найти плотность распределения и функцию распределения системы.

Ответ.

$$
f(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) = \begin{cases} 10e^{-5x-2y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}
$$

$$
F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ (1 - e^{-5x})(1 - e^{-2y}), & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}
$$

4. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$
F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & (x > 0,\ y > 0); \\ 0, \quad \text{при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0. \end{cases}
$$

Найти двумерную плотность распределения $f(x,y)$.

Ответ.

$$
f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y},
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} (\ln 3)^2 \cdot 3^{-x-y}, & x \geq 0;\ \ y \geq 0; \\ 0, \quad \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}
$$

5. Случайная величина (ξ, η) распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,8)$, $B(8,0)$.

Найти $f(x,y),\ f_\xi(x),\ f_\eta(y),\ f(x/y),\ f(y/x)$.

Решение. Т.к. (ξ,η) имеет двумерное равномерное распределение в треугольнике OAB, ограниченном прямыми: $x=0,\ y=0,\ y=8-x$, то

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{32}, & 0\le x\le 8;\ 0\le y\le 8-x;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\int\limits_0^{8-x} f(x,y)dy=\dfrac{1}{32}(8-x),\ 0\le x\le 8;\\ 0, \quad x<0, x>8.\end{cases}$$

аналогично,

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{32}(8-y), & 0\le y\le 8;\\ 0, & y<0,\ y>8.\end{cases}$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{8-y}, & x<8-y;\\ 0, & x>8-y\end{cases}$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{8-x}, & y<8-y;\\ 0, & y>8-x.\end{cases}$$

6. Задана дискретная двумерная случайная величина (ξ,η)

$x_i \backslash y_j$	2	5	8
$0,4$	$0,15$	$0,30$	$0,35$
$0,8$	$0,05$	$0,12$	$0,03$

Найти условный закон распределения случайной величины η при условии, что ξ приняла значение $x=0,4$.

Ответ.

$y_j/\xi=0,4$	2	5	8
q_j	$\dfrac{0,15}{0,8}$	$\dfrac{0,30}{0,8}$	$\dfrac{0,35}{0,8}$

$$q_j = P\{\eta = y_j / \xi = 0,4\} = \frac{P\{\eta = y_j\,,\,\xi = 0,4\}}{P\{\xi = 0,4\}}, \quad \sum_{i=1}^{3} q_j = 1,$$

$$P\{\xi = 0,4\} = 0,15 + 0,30 + 0,35 = 0,8.$$

7. Задана двумерная случайная величина (ξ, η)

$x_i \diagdown y_j$	-1	0	1
-2	$0,05$	$0,14$	$0,01$
-1	$0,10$	$0,17$	$0,03$
0	$0,15$	$0,29$	$0,06$

Являются ли ξ и η зависимыми?

Решение. Ответ на этот вопрос можно получить разными методами. Рассмотрим два из них.

I. Найдем одномерные законы распределения ξ и η и проверим равенства

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_j\}$$

для всех i и j. Если для каких-либо i и j равенство не имеет места, то ξ и η зависимы. Найдем, например,

$$P\{\xi = -1\} = 0,3; \;\; P\{\eta = -1\} = 0,3; \;\; P\{\xi = -1, \eta = -1\} = 0,1$$

$$0,1 \neq 0,3 \cdot 0,3$$

значит, ξ и η зависимы.

II. Если условное распределение случайной величины не совпадает с её безусловным распределением, то случайные величины зависимы.

Например, найдем безусловное распределение η

y_j	-1	0	1
p_j	$0,3$	$0,6$	$0,1$

и условное распределение η при условии, что ξ приняла значение $x = -1$:

$y_j/\xi = -1$	-1	0	1
q_j	$\frac{0{,}1}{0{,}3}$	$\frac{0{,}17}{0{,}3}$	$\frac{0{,}03}{0{,}3}$

$$(P\{\xi = -1\} = 0,3)$$

Из сравнения полученных законов видно,что они не совпадают, следовательно, ξ и η зависимы.

8. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет закон распределения с плотностью $f(x, y) = Axy$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Найти: а) величину A; б) $M\xi$ и $M\eta$; в) $D\xi$ и $D\eta$; г) $cov(\xi,\, \eta)$; д) $r_{\xi\eta}$.

Решение. а) Из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

получаем

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} A\,x\,y\,dx\,dy = A\int\limits_0^1 x\,\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{A}{24} = 1,$$

откуда $A = 24$;

б)

$$M\xi = 24\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} x\,x\,y\,dx\,dy = \frac{2}{5},$$

$$M\eta = 24\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y} y\,x\,y\,dx\,dy = \frac{2}{5};$$

в)

$$D\xi = 24\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 x\, y\, dx\, dy = \frac{1}{25},$$

$$D\eta = 24\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y} \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 x\, y\, dx\, dy = \frac{1}{25};$$

г)

$$cov(\xi,\, \eta) = 24\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left(x - \frac{2}{5}\right)\left(y - \frac{2}{5}\right) x\, y\, dx\, dy = -\frac{2}{75};$$

д)

$$r_{\xi\eta} = \frac{cov(\xi,\, \eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}} = -\frac{2 \cdot 25}{75} = -\frac{2}{3}.$$

Коэффициент корреляции отрицательный, значит с ростом одной случайной величины другая уменьшается.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно использовать для вычисления ковариации более удобную формулу:

$$cov(\xi,\, \eta) = \beta_{1,1} = M[(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta)] = M[\xi \cdot \eta] - M\xi \cdot M\eta = \alpha_{1,1} - \mu_\xi \cdot \mu_\eta$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1977.

2. Фастовец Н.О. Элементы теории вероятностей и математической статистики. М.: МИНХиГП, 1991.

3. Теория вероятностей. Вып. XVI. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.

4. Калинин В.В., Фастовец Н.О. Вероятность в примерах и задачах (для нефтегазового образования) М.: ФГУП Изд-во "Нефть и газ" РГУ нефти и газа им.И.М. Губкина, 2004.

5. Писаревский Б.М., Сухарев М.Г., Фастовец Н.О. Задачи и упражнения по применению теории вероятностей в нефтегазовой промышленности. М.: МИНХиГП им И.М. Губкина, 1981.

6. Высшая математика. Специальные разделы: Решебник; Под ред. А.И.Кириллова, М.: Физматлит, 2001.

7. Сборник задач по высшей математике. Т.2./ К.Н.Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный и др. М.: Айрес Пресс, 2004.

Плотность стандартного нормального распределения $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,399	0,399	0,399	0,399	0,399	0,398	0,398	0,398	0,398	0,397
0,1	0,397	0,397	0,396	0,396	0,395	0,394	0,394	0,393	0,393	0,392
0,2	0,391	0,390	0,389	0,389	0,388	0,387	0,386	0,385	0,384	0,383
0,3	0,381	0,380	0,379	0,378	0,377	0,375	0,374	0,373	0,371	0,370
0,4	0,368	0,367	0,365	0,364	0,362	0,361	0,359	0,357	0,356	0,354
0,5	0,352	0,350	0,348	0,347	0,345	0,343	0,341	0,339	0,337	0,335
0,6	0,333	0,331	0,329	0,327	0,325	0,323	0,321	0,319	0,317	0,314
0,7	0,312	0,310	0,308	0,306	0,303	0,301	0,299	0,297	0,294	0,292
0,8	0,290	0,287	0,285	0,283	0,280	0,278	0,276	0,273	0,271	0,268
0,9	0,266	0,264	0,261	0,259	0,256	0,254	0,252	0,249	0,247	0,244
1,0	0,242	0,240	0,237	0,235	0,232	0,230	0,227	0,225	0,223	0,220
1,1	0,218	0,215	0,213	0,211	0,208	0,206	0,204	0,201	0,199	0,197
1,2	0,194	0,192	0,190	0,187	0,185	0,183	0,180	0,178	0,176	0,174
1,3	0,171	0,169	0,167	0,165	0,163	0,160	0,158	0,156	0,154	0,152
1,4	0,150	0,148	0,146	0,144	0,141	0,139	0,137	0,135	0,133	0,131
1,5	0,130	0,128	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,115	0,113
1,6	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,101	0,099	0,097	0,096
1,7	0,094	0,092	0,091	0,089	0,088	0,086	0,085	0,083	0,082	0,080
1,8	0,079	0,078	0,076	0,075	0,073	0,072	0,071	0,069	0,068	0,067
1,9	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055
2,0	0,054	0,053	0,052	0,051	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045
2,1	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,040	0,039	0,038	0,037	0,036
2,2	0,035	0,035	0,034	0,033	0,032	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029
2,3	0,028	0,028	0,027	0,026	0,026	0,025	0,025	0,024	0,023	0,023
2,4	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018	0,018
2,5	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014
2,6	0,014	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011	0,011
2,7	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008
2,8	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,006	0,006	0,006
2,9	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
3,0	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003

Функция распределения стандартного нормального закона $F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Функция e^{-x}

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	0,8958	0,8869	0,8781	0,8694	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270
0,2	0,8187	0,8106	0,8025	0,7945	0,7866	0,7788	0,7711	0,7634	0,7558	0,7483
0,3	0,7408	0,7334	0,7261	0,7189	0,7118	0,7047	0,6977	0,6907	0,6839	0,6771
0,4	0,6703	0,6637	0,6570	0,6505	0,6440	0,6376	0,6313	0,6250	0,6188	0,6126
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0,5886	0,5827	0,5769	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0,6	0,5488	0,5434	0,5379	0,5326	0,5273	0,5220	0,5169	0,5117	0,5066	0,5016
0,7	0,4966	0,4916	0,4868	0,4819	0,4771	0,4724	0,4677	0,4630	0,4584	0,4538
0,8	0,4493	0,4449	0,4404	0,4360	0,4317	0,4274	0,4232	0,4190	0,4148	0,4107
0,9	0,4066	0,4025	0,3985	0,3946	0,3906	0,3867	0,3829	0,3791	0,3753	0,3716
1,0	0,3679	0,3642	0,3606	0,3570	0,3535	0,3499	0,3465	0,3430	0,3396	0,3362
1,1	0,3329	0,3296	0,3263	0,3230	0,3198	0,3166	0,3135	0,3104	0,3073	0,3042
1,2	0,3012	0,2982	0,2952	0,2923	0,2894	0,2865	0,2837	0,2808	0,2780	0,2753
1,3	0,2725	0,2698	0,2671	0,2645	0,2618	0,2592	0,2567	0,2541	0,2516	0,2491
1,4	0,2466	0,2441	0,2417	0,2393	0,2369	0,2346	0,2322	0,2299	0,2276	0,2254
1,5	0,2231	0,2209	0,2187	0,2165	0,2144	0,2122	0,2101	0,2080	0,2060	0,2039
1,6	0,2019	0,1999	0,1979	0,1959	0,1940	0,1920	0,1901	0,1882	0,1864	0,1845
1,7	0,1827	0,1809	0,1791	0,1773	0,1755	0,1738	0,1720	0,1703	0,1686	0,1670
1,8	0,1653	0,1637	0,1620	0,1604	0,1588	0,1572	0,1557	0,1541	0,1526	0,1511
1,9	0,1496	0,1481	0,1466	0,1451	0,1437	0,1423	0,1409	0,1395	0,1381	0,1367
2,0	0,1353	0,1340	0,1327	0,1313	0,1300	0,1287	0,1275	0,1262	0,1249	0,1237
2,1	0,1225	0,1212	0,1200	0,1188	0,1177	0,1165	0,1153	0,1142	0,1130	0,1119
2,2	0,1108	0,1097	0,1086	0,1075	0,1065	0,1054	0,1044	0,1033	0,1023	0,1013
2,3	0,1003	0,0993	0,0983	0,0973	0,0963	0,0954	0,0944	0,0935	0,0926	0,0916
2,4	0,0907	0,0898	0,0889	0,0880	0,0872	0,0863	0,0854	0,0846	0,0837	0,0829
2,5	0,0821	0,0813	0,0805	0,0797	0,0789	0,0781	0,0773	0,0765	0,0758	0,0750
2,6	0,0743	0,0735	0,0728	0,0721	0,0714	0,0707	0,0699	0,0693	0,0686	0,0679
2,7	0,0672	0,0665	0,0659	0,0652	0,0646	0,0639	0,0633	0,0627	0,0620	0,0614
2,8	0,0608	0,0602	0,0596	0,0590	0,0584	0,0578	0,0573	0,0567	0,0561	0,0556
2,9	0,0550	0,0545	0,0539	0,0534	0,0529	0,0523	0,0518	0,0513	0,0508	0,0503
3,0	0,0498	0,0493	0,0488	0,0483	0,0478	0,0474	0,0469	0,0464	0,0460	0,0455

Учебно-методическое пособие

СОБОЛЕВА Татьяна Сергеевна
ФАСТОВЕЦ Нинель Олеговна
РУСЕВ Владимир Николаевич

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Теория вероятностей

ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТА АиВТ IV семестр

Редактор *В.В. Калинин*
Компьютерный набор и верстка *В.Н. Русев*

Подписано в печать 12.07.2006. Формат 60x90 1/16.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п.л. 4,4
Тираж 300 экз. Заказ №

Отдел оперативной полиграфии РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина
119991, Москва, Ленинский просп., 65