Министерство образования и науки Российской Федерации
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА имени И.М. ГУБКИНА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

В.В. Калинин, А.Н. Филиппов,

Т.С. Филиппова

Lim и ты

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к изучению темы "Пределы"
(для студентов всех специальностей)

Утверждено
методической комиссией

МОСКВА 2017

Издание 5-е, переработанное и дополненное

Введение

Теория пределов входит в раздел "Введение в анализ" и представляет собой одну из важнейших тем курса высшей математики. Эта тема является своего рода ступенькой, соединяющей в значительной степени описательный подход, свойственный школьной элементарной математике, со строгим аналитическим подходом, характерным для вузовского курса. Теория пределов создает своего рода системную базу, на которой строится математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисление). Неоднородность уровня подготовки студентов в самом начале их обучения в вузе требует очень внимательного и тщательного индивидуального подхода. Как обычно, недостаток времени, неумение работать с литературой, да и просто дефицит доходчиво написанных учебных пособий, затрудняет полноценное усвоение студентом теории пределов, а значит, и всего курса высшей математики. В данном пособии, проводя подробное описание приемов вычисления пределов, авторы попытались компенсировать сложившийся дефицит учебной литературы. Большое количество разобранных примеров должно позволить студенту легко справится с любым контрольным заданием, руководствуясь этими примерами как образцами. Для студентов, обучающихся в группах с усиленными требованиями к математической подготовке, и просто для любознательных, добавлен раздел, традиционно выходящий за границы стандартного курса: сравнение бесконечно малых (так называемая, "о – символика"), и вычисление пределов на этой основе (тема 7). Таким образом, пособие практически полностью освещает все приемы вычисления пределов, и может быть использовано в качестве справочника при изучении дальнейших разделов курса высшей математики, в которых используются пределы. Приведено значительное количество примеров для самостоятельной работы. Рекомендуется после изучения теоретического материала и до начала проработки практических приемов вычисления пределов ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Дать определение предела функции в точке.
2. Дать определение односторонних пределов функции в точке.
3. Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, а предел $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ не существует. Существуют ли пределы $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$?

   Что можно сказать в этом случае о пределе $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$?
4. Пусть оба предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ не существуют. Могут ли существовать пределы $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$?
5. Пусть существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$? Верно ли обратное утверждение?
6. Найти (если они существуют), $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

   a) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$, $a=3$

   b) $f(x)=3^{\frac{2+x}{x+4}}$, $a=-4$

   c) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$, $a=1$

   d) $f(x)=\dfrac{4-x}{x^2-16}$, $a=4$

Тема 1. Определение предела функции в точке. Вычисление пределов на основе определения и теорем о пределах теорем о пределах

Пример 1. Пользуясь определением предела функции в точке, доказать, что $\lim\limits_{x\to 5}(3x-9)=6$.

Пусть дано некоторое положительное число ε. Согласно определению предела функции в точке, мы должны найти такое положительное число δ, чтобы для всех значений x, удовлетворяющих неравенствам $|x-5|<\delta, \quad x\neq 5$, было выполнено неравенство $|(3x-9)-6|<\varepsilon$. Преобразуем последнее выражение:

$$|3x-9-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |3x-15|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-5|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом, если при заданном значении числа ε, будет выбрано число $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, то из неравенства $|x-5|<\delta \quad (x\neq 5)$ будет следовать $|(3x-9)-6|<\varepsilon$, что и доказывает утверждение.

Заметим, что в более сложных случаях явный выбор числа δ по заданному числу ε может оказаться значительно более громоздким. Именно поэтому для вычисления пределов применяются теоремы о пределах, а также специальные приемы.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x\cos\frac{\pi}{x}+\frac{x-4}{x-2}\right)^5$.

Используя теоремы о пределе произведения и о пределе суммы, получим

$$\lim_{x\to 3}\left(2x\cos\frac{\pi}{x}+\frac{x-4}{x-2}\right)^5=\left(\lim_{x\to 3}\left(2x\cos\frac{\pi}{x}+\frac{x-4}{x-2}\right)\right)^5=$$

$$=\left(2\cdot\lim_{x\to 3}x\cdot\lim_{x\to 3}\cos\frac{\pi}{x}+\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x-2}\right)^5$$

Но, в силу непрерывности элементарных функций в области их определения, знак предела и знак косинуса можно поменять местами:

$$\lim_{x\to 3}\cos\frac{\pi}{x}=\cos\lim_{x\to 3}\frac{\pi}{x}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

По теореме о пределе частного, попутно проверяя, что предел знаменателя отличен от нуля, получим:

$$\lim_{x\to3}\frac{x-4}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(x-4)}{\lim\limits_{x\to3}(x-2)}=\frac{\lim\limits_{x\to3}x-4}{\lim\limits_{x\to3}x-2}=\frac{3-4}{3-2}=-1.$$

И, окончательно, имеем для исходного предела

$$\lim_{x\to3}\left(2x\cos\frac{\pi}{x}+\frac{x-4}{x-2}\right)^5=\left(2\cdot3\cdot\frac{1}{2}-1\right)^5=2^5=32.$$

Задачи для самостоятельного решения

Доказать, используя определение предела, что

1.1 $\lim\limits_{x\to-2}(3x+14)=8$

1.2 $\lim\limits_{x\to3}(7-4x)=-5$

1.3 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-x-4}{x+1}=-7$

1.4 $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2}=5$

Вычислить пределы, используя теоремы о пределах:

1.5 $\lim\limits_{x\to3}(xe^x-2\cos\dfrac{\pi}{x})$

1.6 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+2}{x+3}$

1.7 $\lim\limits_{x\to-1}(x+\ln\operatorname{arctg}x)$

1.8 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+3}{x-7}\right)^5$

1.9 $\lim\limits_{x\to1}(\arcsin x)^{1+x}$

1.10 $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{arctg}x)^{\arccos x}$

Существуют ли следующие пределы:

1.11 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

1.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}$

1.13 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-5}{x-2}$

1.14 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$

1.15 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$

1.16 $\lim\limits_{x\to-1}2^{\frac{1}{1+x}}$

1.17 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x$

1.18 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x$

Тема 2. Пределы дробно-рациональных функций и иррациональных функций

функций

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-1}$. (Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

Разложим на множители многочлены, стоящие в числителе и знаменателе дробно – рациональной функции:

$$3x^2-x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{1\pm 5}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{2}{3},\quad x_2=1$$

Отсюда,

$3x^2-x-2=3(x+\dfrac{2}{3})(x-1)=(3x+2)(x-1)$, и

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

Тогда окончательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3\cdot 1+2}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{-1-x}}$.

(Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

В этом примере неопределенность связана с наличием иррациональности в знаменателе. Умножим числитель и знаменатель дроби на *сопряженное* иррациональное выражение (напомним, что сопряженными в элементарной математике называются выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$):

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{-1-x}}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x})}{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{-1-x})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x})}{(\sqrt{3x+7})^2-(\sqrt{-1-x})^2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x})}{(3x+7)-(-1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x})}{4x+8}.$$

После сокращения дроби на выражение $x+2$ неопределенность исчезает, и предел вычисляется простой подстановкой предельного значения $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x})}{4(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{3x+7}+\sqrt{-1-x}}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt[3]{x-4}-1}{\sqrt{x-4}-1}$.

Здесь для того, чтобы избавиться от иррациональности, удобно ввести новую переменную

$$x-4=y^6,\quad x\to5\Rightarrow y\to1$$

Тогда

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x-4}-1}{\sqrt{x-4}-1}=\lim_{y\to1}\frac{y^2-1}{y^3-1}=\lim_{y\to1}\frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=\lim_{y\to1}\frac{y+1}{y^2+y+1}=\frac{2}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x-4}{2x^2+x-1}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$

2.3 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-13x+15}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$

2.5 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+5x-21}{2x^2-x-21}$

2.6 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2-x-6}{7x^2-x-8}$

2.7 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-x^2+2x+5}{x+1}$

2.8 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x^3+x^2-3x-14}$

2.9 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x-15}{x^2-x-6}$

2.10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-x^3-3x+2}{x^2+3x-4}$

2.11 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+5x-6}{x^4+7x-2}$

2.12 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^5-2x-7}{7x^4+x-6}$

2.13 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{3x+7}-1}{x^2-4}$

2.14 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+10}-5}$

2.15 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+1+\sqrt{x^2-5}}$

2.16 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt[3]{8x^2-5}}{3x^2-x-10}$

2.17 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-1}-x\right)$

2.18 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2-x+6}}{x^2-3x-4}$

2.19 $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7}-2x\right)$

2.20 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+6x-1}-x+2\right)$

2.21 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

2.22 $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

2.23 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2}{x-1}$

2.24 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

2.25 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{1-\sqrt[3]{4-x}}$

2.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{\sqrt[4]{x^2+1}-4\sqrt{x^2+1}+3}$

Тема 3. Пределы функций на бесконечности

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{5x^2+x-3}$. (Неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$).

Оба многочлена, стоящие в числителе и знаменателе дроби, имеют одинаковую степень 2. Разделим почленно числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{5x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{5}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x-3}-x)$. (Неопределенность $[\infty-\infty]$). (Заметим, что при $x\to-\infty$ пример не представляет собой случай неопределенности, а дает $+\infty+\infty=+\infty$).

Для того, чтобы избавиться от неопределенности в иррациональном выражении, домножим и разделим его на *сопряженное* выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x-3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x-3}-x)(\sqrt{x^2+5x-3}+x)}{(\sqrt{x^2+5x-3}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-3}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-3-x^2}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}$$

Старшая степень переменной x и числителе, и в знаменателе функции – первая. (В силу тождества $\sqrt{x^2}=|x|$ квадратный трехчлен под знаком квадратного корня ведет себя при $x\to\infty$ как первая степень переменной x.) Теперь можно числитель и знаменатель разделить на $x>0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+5x-3}{x^2}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{5}{\sqrt{1}+1}=\frac{5}{2}.$$

Здесь, при внесении переменной x под знак квадратного корня, было использовано тождество

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & \text{при} \quad x\ge 0\\ -x, & \text{при} \quad x<0\end{cases}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+12}{4x^2-8x+1}$

3.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-5x+12}{4x^5-8x+1}$

3.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+12}{4x^5-8x+1}$

3.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-5x+12}{4x^6-8x+1}$

3.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x^5-4}+x}{\sqrt{x^3-x}+2x^2-4}$

3.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3-\sqrt[3]{x^6+5x}}{4x^2-\sqrt{x^4-2}-x}$

3.7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-1}-x\right)$

3.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7}-2x\right)$

3.9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x-1}-x+2\right)$

3.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x+2}+2x\right)$

Тема 4. Второй замечательный предел и пределы, с ним с ним связанные

Пример 1. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-4}\right)^{7x+5}$. (Неопределенность

вида $[1^{\infty}]$).

Если у дроби, стоящей в основании степени выделить целую часть, и использовать свойства степеней, то задача может быть сведена ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x-4}\right)^{7x+5} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x-4})^{(7x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x-4})^{\frac{3x-4}{2}\cdot\frac{2}{3x-4}\cdot(7x+5)} = \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{2}{3x-4})^{\frac{3x-4}{2}}\right)^{\frac{2}{3x-4}\cdot(7x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{2}{3x-4})^{\frac{3x-4}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot(7x+5)}{3x-4}}$$

Здесь в основании степени возник 2[й] замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x-4})^{\frac{3x-4}{2}} = \left|\begin{array}{l}\dfrac{3x-4}{2}=t\\ x\to\infty\Rightarrow t\to\infty\end{array}\right| = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t} = \mathrm{e}$$

Предел, стоящий в показателе степени, легко находится:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(7x+5)}{3x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{14x+10}{3x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{14+\dfrac{10}{x}}{3-\dfrac{4}{x}} = \frac{14}{3}$$

Таким образом, окончательно, исходный предел равен

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x-4})^{7x+5} = \mathrm{e}^{\frac{14}{3}}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to -3}(2x+7)^{\frac{1}{x+3}}$. (Неопределенность $[1^{\infty}]$).

$$\lim_{x\to -3}(2x+7)^{\frac{1}{x+3}}=\left(\begin{array}{l} x+3=t, \\ x\to -3\Rightarrow t\to 0\end{array}\right(=\lim_{t\to 0}(2(t-3)+7)^{\frac{1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left((1+2t)^{\frac{1}{2t}}\right)^{2}=\mathrm{e}^{2}.$$

Здесь мы воспользовались другой формой записи второго замечательного предела:

$$\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

Пример 3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{2-x}{8x+3}}$.

Несмотря на то, что предел похож на второй замечательный, здесь нет неопределенности. Действительно, предел основания степени равен:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{2}{2}=1,$$

а предел показателя степени

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{8x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-1}{8+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{8}.$$

Теперь исходный предел находится элементарно:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{2-x}{8x+3}}=1^{-\frac{1}{8}}=1.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+4}{x+6}\right)^{x+7}$

4.2 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{2x-1}\right)^{2x+6}$

4.3 $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{2-7x}{x}}$

4.4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x+4}{4-7x}\right)^{\frac{3-2x}{6x}}$

4.5 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x+3}\right)^{\frac{2}{x-6}}$

4.6 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{3-2x}$

4.7 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-9x}{5-9x}\right)^{3x+5}$

4.8 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+x-3}\right)^{2x+4}$

4.9 $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4-x}{x}}$

4.10 $\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{3+x}{4-x}}$

Тема 5. Вычисление пределов с использованием эквивалентности бесконечно малых функций. функций.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x \arccos 5x}{\left(e^{3x}-1\right)\cos 6x}$.

Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$: $\arcsin 2x \sim 2x,\ e^{3x}-1\sim 3x$. Предел не изменится, если бесконечно малые сомножители заменить им эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x \arccos 5x}{\left(e^{3x}-1\right)\cos 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\arccos 5x}{3x\cos 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\arccos 0}{3\cos 0}=\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{3\cdot 1}=\frac{\pi}{3}$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 7x)\cdot \operatorname{ctg} 2x}{\left(\sqrt[5]{1-4x}-1\right)\ln(e+3x)}$.

Воспользуемся вначале тригонометрическим тождеством $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, а затем таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 7x)\cdot \operatorname{ctg} 2x}{\left(\sqrt[5]{1-4x}-1\right)\ln(\mathrm{e}+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 7x)\cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}}{\left((1-4x)^{0.2}-1\right)\ln(\mathrm{e}+3x)} =$$

$$\left| \begin{array}{l} 1-\cos 7x \sim \dfrac{(7x)^2}{2} \\ \operatorname{tg} 2x \sim 2x \\ (1-4x)^{0.2}-1 \sim \dfrac{1}{5}(-4x) \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{49x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2x}}{-\dfrac{4x}{5}\ln(\mathrm{e}+3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{49\cdot 5}{-4\cdot 4\cdot \ln(\mathrm{e}+3x)} = \frac{49\cdot 5}{16\ln \mathrm{e}} = \frac{245}{16}.$$

Замечание. Обратим внимание на три важных обстоятельства:

1) Можно заменить эквивалентными функциями только те бесконечно малые, которые представляют собой <u>сомножители</u> выражения, предел которого вычисляется. Если бесконечно малая является слагаемым, то для вычисления предела должен применяться более развитый математический аппарат, изложенный в теме 7.
2) Многие выражения, по виду схожие с приведенными в таблице, не являются бесконечно малыми, и их предел находится простой подстановкой предельного значения переменной.
3) Если необходимо вычислить предел функции при $x \to a, \quad a \neq 0$, то для бесконечно малых сомножителей удобно ввести новую переменную $y = x - a, \quad y \to 0$, а затем воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых.

Задачи для самостоятельного решения

5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)\cos 2x}{\operatorname{arctg}6x\cdot\operatorname{arcctg}4x}$

5.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\ln(1+6x)^3}$

5.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos 2x-1)}{\sin 4x\arcsin 5x}$

5.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\sqrt{1-5x^2}-1}$

5.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-1}{2^x-1}$

5.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-x}}{\arcsin 3x\cos 2x}$

5.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos 2x\operatorname{tg}4x}{4^{2x}-1}$

5.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x+x^2)-\ln(5x-x^3)}{\sin 3x\operatorname{arcctg}6x}$

5.9 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln\dfrac{x}{2}}$

5.10 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{\cos\dfrac{\pi}{2x}}$

Тема 6. Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$.

(Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

Вычисление этого предела с использованием эквивалентности бесконечно малых невозможно, так как для приведенной функции они представлены не как множители, а как слагаемые. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\ln(1+x))'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\ln(1+x))'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x-1}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x-1}{2x}\cdot 1$$

Заметим, что в процессе преобразований множитель $\frac{1}{1+x}$, имеющий при $x \to 0$ конечный и отличный от нуля предел, удобно было отсоединить, воспользовавшись теоремой о пределе произведения. Однако, неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ сохранилась. Для окончательного вычисления предела применяем правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)\cos x-1\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)'\cos x+(1+x)(\cos x)'}{(2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\cos x-(1+x)\sin x}{2}=\frac{1\cdot\cos 0-1\cdot\sin 0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln\sin x)$. (Неопределенность $[0\cdot\infty]$).

Функция представляет собой произведение двух сомножителей. Для того, чтобы можно было воспользоваться правилом Лопиталя, представим ее в виде частного. К полученной неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-1/x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=\left|\sin x\sim x\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{x}=-\lim_{x\to 0}x\cos x=0.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{10x}-(1+x)^{10}}{x^2}$.

Пример представляет собой неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, поэтому к нему применимо правило Лопиталя (поскольку после этого опять возникает неопределенность такого же типа, правило Лопиталя применяется еще один раз).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{10x}-(1+x)^{10}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{10x}-(1+x)^{10}\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{10e^{10x}-10(1+x)^9}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(10e^{10x}-10(1+x)^9\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{100e^{10x}-10\cdot 9(1+x)^8}{2}=\frac{100-10\cdot 9\cdot 1}{2}=5.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$. (Неопределенность $[\infty-\infty]$).

Вначале преобразуем выражение и заменим бесконечно малые сомножители на эквивалентные.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}=\left|\sin x\sim x\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}$$

Получившийся предел представляет собой неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, и для ее раскрытия можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x))}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\cdot\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

Пример 4. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}$ (Неопределенность $[0^0]$).

Найдем вначале вспомогательный предел, а именно, $\ln A$:

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\ln(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}x\cdot\ln(\sin x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{(\operatorname{arctg}x)^{-1}}$$

Теперь возникла неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, к которой применимо правило Лопиталя:

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(\sin x)\right)'}{\left((\operatorname{arctg} x)^{-1}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\operatorname{arctg}^{-2} x \cdot \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x \cdot \cos x \cdot (1+x^2)}{\sin x} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\sin x \sim x \\ \operatorname{arctg} x \sim x\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \cos x \cdot (1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \cos x \cdot (1+x^2) = 0$$

Таким образом, $\ln A = 0$, а значит, может быть найден искомый предел

$$A = \mathrm{e}^{\ln A} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Тема 7*. Сравнение бесконечно малых; o - символика и вычисление пределов

Эквивалентность бесконечно малых представляет собой удобный математический аппарат, значительно облегчающий процесс вычисления пределов. На его основе после простейших преобразований целый класс примеров на нахождение пределов сводится к выражениям, не содержащим неопределенности. Сама идея метода, как уже обсуждалось выше, состоит в том, что стремящиеся к нулю функции (бесконечно малые) заменяются на другие, более простые функции (степени независимой переменной), стремящиеся к нулю "аналогичным", или *эквивалентным*, образом. (Само понятие эквивалентности при этом строго определяется, *см. справочный материал*). Достаточно воспользоваться заранее составленной таблицей эквивалентных бесконечно малых, и любой участвующий в выражении предела бесконечно малый сомножитель можно заменить на эквивалентный. Предел при этом не изменится.

Метод, однако, имеет одно существенное ограничение: если бесконечно малая величина в вычисляемом пределе является не сомножителем, а слагаемым, то заменять ее эквивалентной нельзя. Скажем, если бы в примере 1 темы 5 мы попытались произвести замену бесконечно малых на эквивалентные: $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, то получили бы заведомо неверный результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^2} = 0$$

(Напомним, что "честно" вычисленный предел давал значение 0,5)

Правило Лопиталя для неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$, естественно, дает верный результат, однако, зачастую приводит к громоздким выкладкам. Скажем, для вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \ln(1+\frac{x^3}{6})}{x^5}$ правило Лопиталя пришлось бы применить пять (!!!) раз, и при этом иметь дело с малоприятными алгебраическими выкладками.

Существует теория, лишь незначительно обобщающая уже известный по стандартному курсу высшей математики материал, которая позволяет вычислять подобные пределы без громоздких выкладок. Эта теория, хотя и не сложна для понимания, тем не менее, требует введения некоторых новых понятий. Изучение этой теории, приводимой ниже, может быть рекомендовано для студенческих групп, обучающихся по специальностям с углубленным изучением математических дисциплин, а также всем студентам, интересующимся данной проблемой.

Определение 1. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины при $x \to a$. Будем говорить, что $\alpha(x)$ имеет **более высокий порядок малости**, чем $\beta(x)$ если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Этот факт будем записывать в виде

---

*Дополнительная тема для групп с усиленными требованиями к математической подготовке.

$$\alpha = o\left(\beta\right),$$

что произносится как "бесконечно малая α есть o -малое от бесконечно малой β при x, стремящемся к a ".

Пример 1. Докажем, что $x^5 = o(x^2)$ при $x \to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$.

Пример 2. Докажем, что $1 - \cos x = o(x)$ при $x \to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left| 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0$$

Свойства o – малых (при $x \to a$):

1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то

$$f(x) \cdot o(\alpha) = o(\alpha)$$

В частности, для постоянной функции $f(x)$,

$$C \cdot o(\alpha) = o(\alpha), \quad C = \text{const}$$

2. Если функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$, т.е. $|f(x)| \le C$, то

$$f(x) \cdot o(\alpha) = o(\alpha)$$

3. Сумма и разность двух o – малых от одной и той же функции также представляет собой o – малое от этой функции:

$$o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$$
$$o(\alpha) - o(\alpha) = o(\alpha)$$

4. Если $\beta = o(\alpha)$ и $\alpha = o(\gamma)$, то $\beta = o(\gamma)$.

5. Если $\beta = o(\alpha)$ и $\gamma = o(\delta)$, то $\beta + \gamma = o(\alpha + \delta)$.

Примеры:

1. При $x \to 0$ имеем $x^4 = o(x^3)$ и $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+5) = 5$. Следовательно, $x^4(3x^2+5) = o(x^3)$.
2. При $x \to 0$ имеем $x^5 = o(x^2)$ и $x^3 = o(x^2)$. Следовательно, по свойствам 1 и 3 имеем $2x^5 - 8x^3 = o(x^2)$.
3. При $x \to 0$ имеем $x^6 = o(x^5)$ и $x^5 = o(x^4)$. Отсюда, как утверждает свойство 4: $x^6 = o(x^4)$.

Замечание 1. Чаще всего приходится проводить сравнение с бесконечно малыми, представляющими собой степенные функции с натуральными показателями: $(x-a)^n$ при $x \to a$. В этом случае удобно запомнить, что степень с большим показателем есть бесконечно малая более высокого порядка, или o – малое от степени с меньшим показателем:

$$n > m \Rightarrow \begin{cases} (x-a)^n = o((x-a)^m) & \text{при} \quad x \to a \\ x^n = o(x^m) & \text{при} \quad x \to 0 \end{cases}$$

Замечание 2. Если величина α представляет собой o – малое от степени переменной x с бóльшим показателем, то она одновременно является o – малым от степени с меньшим показателем:

$$\alpha = o(x^n), \quad n > m \Rightarrow \alpha = o(x^m), \ (n, m > 0).$$

Например, $\alpha = o(x^3) \Rightarrow a = o(x^2)$. Но обратное утверждение, вообще говоря, неверно: $\alpha = o(x^2) \not\Rightarrow a = o(x^3)$.

<u>**Определение 2**</u>. Пусть $\alpha\,(x)$ и $\beta\,(x)$ – бесконечно малые величины при $x \to a$. Будем говорить, что $\boldsymbol{\alpha(x)}$ имеет **тот же порядок малости**, **что и** $\boldsymbol{\beta(x)}$ если существует конечный и не равный нулю предел

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0.$$

Этот факт будем записывать в виде

$$\beta = O(\alpha)\ ,$$

что произносится как "бесконечно малая β есть О – большое от бесконечно малой α при x, стремящемся к a ".

Пример 1. Докажем, что $\sin 4x = O(x)$ при $x \to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x} = 4 \neq 0$.

Пример 2. Докажем, что $2x^3 + 3x^5 = O(x^3)$ при $x \to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 + 3x^5}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0}\left(2 + 3x^2\right) = 2 \neq 0$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка n включительно, то она может быть представлена в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

где остаточный член R_n может быть записан в виде (форма Пеано):

$$R_n = o((x - x_0)^n)$$

В случае $x_o = 0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Приведем наиболее часто встречающиеся разложения основных элементарных функций:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

4') $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + o(x^n)$

4") $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

6) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$

Замечание 1. Если в формулах 1) – 6) сохранить один – два первых члена, из них легко может быть получены соотношения из таблицы эквивалентных бесконечно малых.

Замечание 2. Для функций $\arcsin x$ и $\operatorname{tg} x$ разложение в ряд Тейлора выглядит громоздко, и мы приведем в дополнение к формулам 1) – 6) лишь несколько их начальных членов:

7) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^8)$

8) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$

Формулы 7) и 8) могут быть оборваны и на меньшем количестве членов разложения. При этом остаточный член будет представлять o – малое от такой степени переменной x, которая следует за степенью последнего из оставленных членов. Например, можно использовать разложение

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\ , \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Пример 1. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \ln(1 + \frac{x^3}{6})}{x^5}$.

Имеем по формулам 2) и 5):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$\ln(1 + \frac{x^3}{6}) = \frac{x^3}{6} - \frac{(x^3/6)^2}{2} + o((x^3/6)^2) = \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \ln(1 + \frac{x^3}{6})}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^5)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{5!} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{5!} + 0 = \frac{1}{120}$$

Здесь были использованы свойства o – малых, согласно которым

$$o(x^5) + o(x^6) = o(x^5) + o(x^5) = o(x^5).$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \operatorname{tg} x - x - x^2}{x^3}$.

По формулам 1) и 8) имеем разложение

$$\mathrm{e}^x \operatorname{tg} x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \cdot (x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) + x^2 + \frac{x^4}{3} + x \cdot o(x^4) + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^2}{2} o(x^4) + o(x^2) \cdot o(x^4)$$

Но

$$x \cdot o(x^4) = o(x^5) = o(x^3),$$
$$x^2 \cdot o(x^4) = o(x^6) = o(x^3),$$
$$o(x^2) \cdot o(x^4) = o(x^6) = o(x^3),$$
$$o(x^4) = o(x^3),$$
$$x^4 = o(x^3), \quad x^5 = o(x^3).$$

Тогда $\mathrm{e}^x \operatorname{tg} x = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$, и предел легко находится:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \operatorname{tg} x - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{5}{6}.$$

Пример 3. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x} - \sqrt[3]{1 + 3\arcsin x}}{x^2}$.

Выпишем разложения функций, входящих в выражение для предела, по формулам Тейлора, сохраняя члены до x^2 включительно:

$$\mathrm{e}^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2!} + o(\sin^2 x) = 1 + x + o(x^2) + \frac{1}{2}(x + o(x))^2 + o(x^2) =$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x \cdot o(x) + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sqrt[3]{1 + 3\arcsin x} = 1 + \frac{1}{3}(3\arcsin x) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2!}(3\arcsin x)^2 + o(\arcsin^2 x) =$$
$$= 1 + (x + o(x^2)) - (x + o(x))^2 + o(x^2) = 1 + x - x^2 - 2x \cdot o(x) + o(x^2) =$$
$$= 1 + x - x^2 + o(x^2)$$

Тогда искомый предел равен

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}-(1+x-x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+x^2+o(x^2)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4}$

7.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\sin x-\ln(1+\sin x)}{x^2}$

7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^2}-\sqrt[7]{1-5x^2}}{x^2}$

7.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcctg}2x-\arccos 2x}{x^3}$

7.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x^2}-\sqrt[6]{1+8x^2}}{x^4}$

7.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-x\cos 3x}{x^5}$

7.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-\mathrm{e}^{2x-4x^2}}{x^3}$

7.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(\mathrm{e}-x)-\cos 2\sqrt{\dfrac{x}{e}}}{x^2}$

7.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+\dfrac{x^3}{2})-\arcsin x}{x^4}$

7.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\dfrac{x^3}{2})-\operatorname{tg}x}{\mathrm{x}^5}$

7.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{(1+x^2)^5}-\dfrac{1}{(1+x^2)^8}\right)$

7.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{\sin x\cdot\ln x}$

Типовые варианты контрольной работы по теме "Пределы"

№1

1.*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7-x^2-5}{x^7+3x^5+1}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-8x+4}$

3.*а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 3x)\,\mathrm{e}^{4x}}{\ln(1-7x)\,\cos 8x}$

б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x\cdot\arccos(x/2)}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4x}\arcsin(1-x)}$

в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-e^{2x}}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+2}\right)^{4-x}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-0} 6^{\frac{2}{3-2x}}$

№2

1.*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-2x+4}{5x^6+x^2-1}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-3}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2-4}$

3. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)\ln(\mathrm{e}+x)}{\mathrm{arctg}3x\arccos 3x}$

б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(x/4)\cdot\mathrm{e}^{x-4}}{\arccos 3\mathrm{x}\cdot\mathrm{tg}(4-x)}$

в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)-x\sin 2x}{x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{5-x}\right)^{3x+8}$

5. $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{x+1}{x+2}$

Справочный материал

Символы:

$\forall$ (квантор общности) – "для любого ".

$\exists$ (квантор существования) – "существует".

: – "такой, что".

Определение предела функции в точке:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

Определение предела справа функции в точке:

$$\lim_{x\to a+0} f\left(x\right) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$$

Определение предела слева функции в точке:

$$\lim_{x\to a-0} f\left(x\right) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : 0 > x - a > -\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$$

Определение предела функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists M > 0 : \ |x| > M \Rightarrow \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$$

Определение бесконечного предела:

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall L > 0 \exists\delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f\left(x\right) > L$$

Определение бесконечно малой при $x \to a$:

$\alpha = \alpha\left(x\right)$ – бесконечно малая при $x \to a \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to a} \alpha\left(x\right) = 0$

1й замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2й замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},$$

$$\mathrm{e} = 2{,}18281828459045\ldots$$

Определение эквивалентных бесконечно малых при $x \to a$:

$$\alpha\left(x\right) \sim \beta\left(x\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)} = 1$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых (при $x \to 0$):

1. $\sin x \sim x$

2. $\mathrm{tg}x \sim x$

3. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

4. $\arcsin x \sim x$

5. $\mathrm{arctg}x \sim x$

6. $(1+x)^a - 1 \sim ax$

7. $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$

8. $a^x - 1 \sim x \ln a$

9. $\ln(1+x) \sim x$

10. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$

1^ое^ правило Лопиталя (неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$):

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2^ое^ правило Лопиталя (неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$):

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$