# Предельные теоремы

# Неравенства Чебышёва

**Теорема**.

- 1. Если случайная величина $X \geq 0$ **неотрицательна** и имеет **конечное математическое ожидание** $MX$, то для любого числа $\delta > 0$ справедливо **первое неравенство Чебышёва**

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{MX}{\delta}.$$

- 2. Если случайная величина $X$ имеет **конечную дисперсию**, то для любого числа $\delta > 0$ справедливо **второе неравенство Чебышёва**

$$P(|X - MX| \geq \delta) \leq \frac{DX}{\delta^2}.$$

# Доказательство

- Обозначим $I_{A_\delta}$ индикатор события $A_\delta = \{\omega : X(\omega) \geq \delta\}$ Очевидно, справедливы неравенства $X \geq X\, I_{A_\delta} \geq \delta I_{A_\delta}$.
- Поэтому

$$MX \geq M\delta I_{A_\delta} = \delta M I_{A_\delta} = \delta P(A_\delta) = \delta P\{X \geq \delta\}.$$

- Отсюда

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{MX}{\delta}.$$

- Для доказательства второго неравенства применим первое неравенство к случайной величине $(X - MX)^2$

$$P(|X - MX| \geq \delta) = P\{(X - MX)^2 \geq \delta^2\} \leq \frac{M(X - MX)^2}{\delta^2} = \frac{DX}{\delta^2}.$$

# Закон больших чисел. Теорема Чебышёва.

- Рассмотрим последовательность случайных величин

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$$

Обозначим $$\eta_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- **Теорема.** Если случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ **независимы** , а их **дисперсии ограничены одним и тем же числом** $DX_n \le c$ , то для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\eta_n - M\eta_n\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$$

# Доказательство

- Применим второе неравенство Чебышёва и свойства дисперсии

$$P\left\{\left|\eta_n - M\eta_n\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2} = \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} DX_i}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{cn}{n^2\varepsilon^2}.$$

Отсюда $$P\left\{\left|\eta_n - M\eta_n\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0$$

при $n \to \infty.$

# Следствие

- **Предельное равенство в теореме Чебышёва называется законом больших чисел**.
- В частном случае теоремы, когда случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ имеют одно и то же математическое ожидание

$$MX_1 = MX_2 = \cdots M\,X_n = \cdots = m,$$

получаем по теореме Чебышёва $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\eta_n - m\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0.$

- В этом случае будем говорить, что последовательность $\eta_n$ **арифметических средних сходится по вероятности к математическому ожиданию** $m$.

# Теорема Бернулли

- Если $\mu_n$ - число появления события $A$ в $n$ независимых испытаниях, $p = P(A) -$ вероятность появления события $A$ в одном испытании, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0.$$

- Т.е. **относительная частота события** $A$ равная $\frac{\mu_n}{n}$ **стремится по вероятности** к **вероятности события** $A$.

# Доказательство.

- Обозначим $\xi_i = I_{A_i}$ случайную величину, принимающую значение 1, если событие $A$ появляется в $i-$ ом испытании и 0, если не появляется. Тогда $M\xi_i = p, i = 1, 2, \cdots$ . Полагая

$$\mu_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

учитывая, что $\eta_n = \dfrac{\mu_n}{n}$,

по следствию теоремы Чебышёва получаем

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\eta_n - p\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0.$$

# Центральная предельная теорема

- **Общая форма** центральной предельной теоремы утверждает: **Каковы бы ни были распределения случайных величин**

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$$

**при достаточно общих условия функция распределения суммы**

$$\zeta_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

**стремится при** $n \to \infty$ **к функции распределения нормальной случайной величины.**

- Дадим точную формулировку частного случая центральной предельной теоремы.

# Центральная предельная теорема.Частный случай

- Если случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ **независимы, одинаково распределены** , то при $n \to \infty$ для любого $x \in R$

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_s(x),$$

- где $a = MX_i, \sigma^2 = DX_i, i = 1, 2, \cdots.$

## Следствие. Случай биномиального распределения

- Если $\mu_n$ - число появления события $A$ в $n$ независимых испытаний, $p = P(A) -$ вероятность появления события $A$ в одном испытании $q = 1 - p$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

- Говорят, что биномиальная случайная величина $\mu_n$ имеет **асимптотически нормальное распределение**.

## Интегральная теорема Муавра - Лапласа

- Справедлива формула

$$P\left(\alpha \le \mu_n \le \beta\right) = P\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

- Отсюда по центральной предельной теореме:

$$P\left(\alpha \le \mu_n \le \beta\right) \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

# Пример

- Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,05. Какова вероятность, что количество брака окажется в партии из 1000 изделий будет не более 70.
- **Решение**. По условию

$$\boldsymbol{n = 1000;\ p = 0{,}05;\ np = 50;\ npq = 50 \cdot 0{,}95 = 47{,}5.}$$

- Обозначим через $\mu$ число бракованных изделий в партии.

Продолжение решения примера

- **По интегральной теореме Муавра – Лапласа**

имеем

$$P\left(0 \le \mu \le 70\right) = \Phi\left(\frac{70-50}{\sqrt{47,5}}\right) - \Phi\left(\frac{0-50}{\sqrt{47,5}}\right)$$

## Локальная теорема Муавра-Лапласа.

- Если $\mu_n$ число появления события $A$ в $n$ независимых испытаний, а величина

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \infty < a \le x_m \le b < \infty,$$

- ограничена при $n \to \infty$, то справедлива формула

$$P(\mu_n = m) = \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}(1 + \alpha_n), \quad n \to \infty,$$

- где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - плотность стандартного нормального распределения, а $|\alpha_n| \le \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad C > 0$