Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание

- Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $p(x)$ называется число

$$M\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

- **Свойства 1-3**, доказанные для математического ожидания дискретной случайной величины , справедливы и для математического ожидания непрерывной случайной величины, а независимость непрерывных случайных величин X, Y для которых свойство 3 выполняется определяется условием

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = P(x_1 \le X < x_2)P(y_1 \le Y < y_2),$$

где $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ произвольные действительные числа.

Дисперсия

- Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется также, как и для дискретной случайной величины формулой

$$D\,X = M[\,X - MX\,]^2.$$

- которую, используя плотность распределения $p(x)$, можно записать в виде

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\, p(x)dx,$$

где $a = MX$

- **Свойства 1-4,** доказанные для дискретной случайной величины, справедливы и для непрерывной.

Три основные распределения непрерывных случайных величин

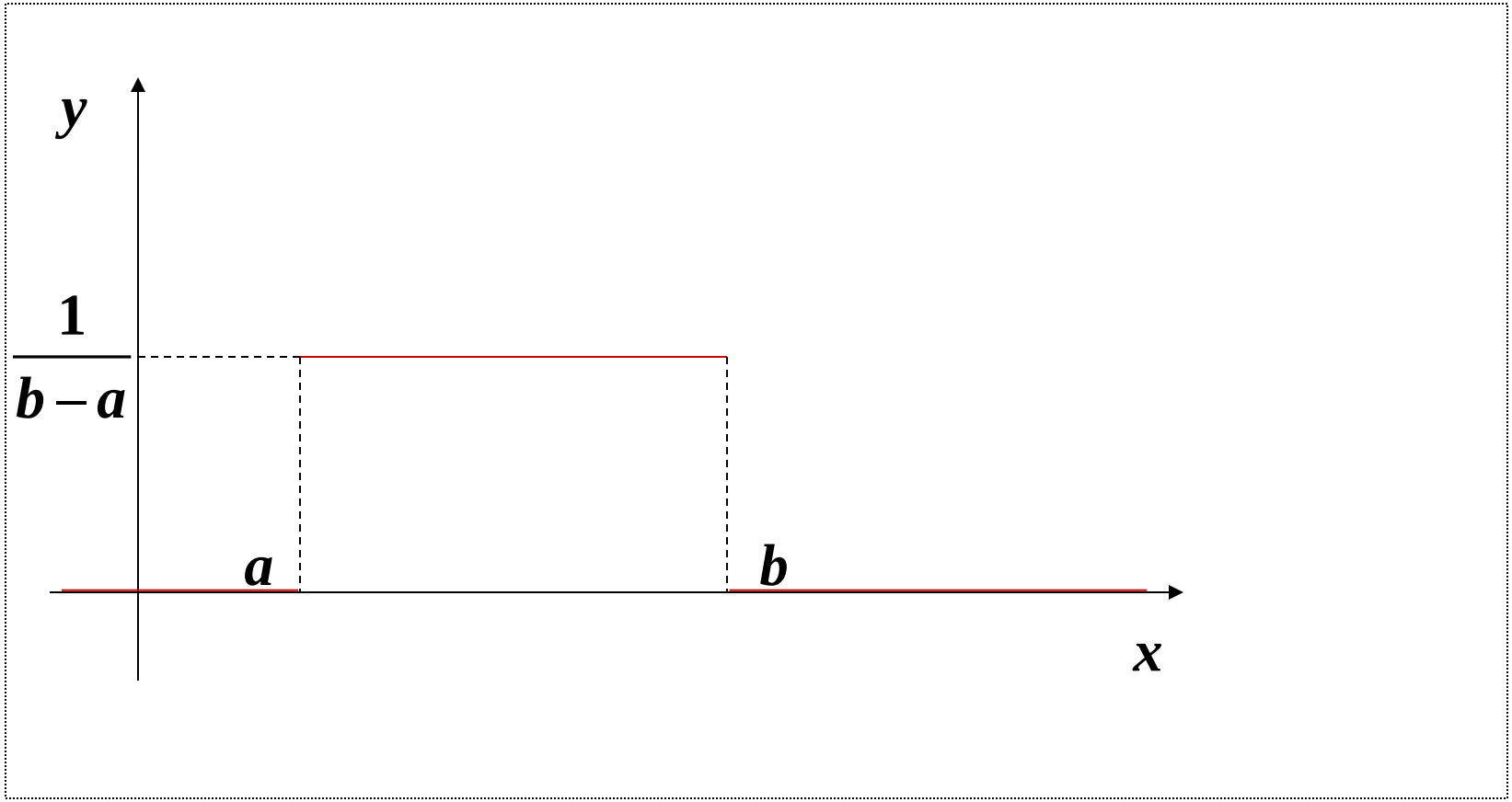
Равномерное распределение

- Если случайная величина X имеет плотность

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases},$$

- То говорят, что случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$.

График плотности равномерно распределённой случайной величины



Функция распределения равномерно распределённой случайной величины

- Вычислим функцию распределения равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$ случайной величины X.
- Если $x \in (-\infty, a]$, то

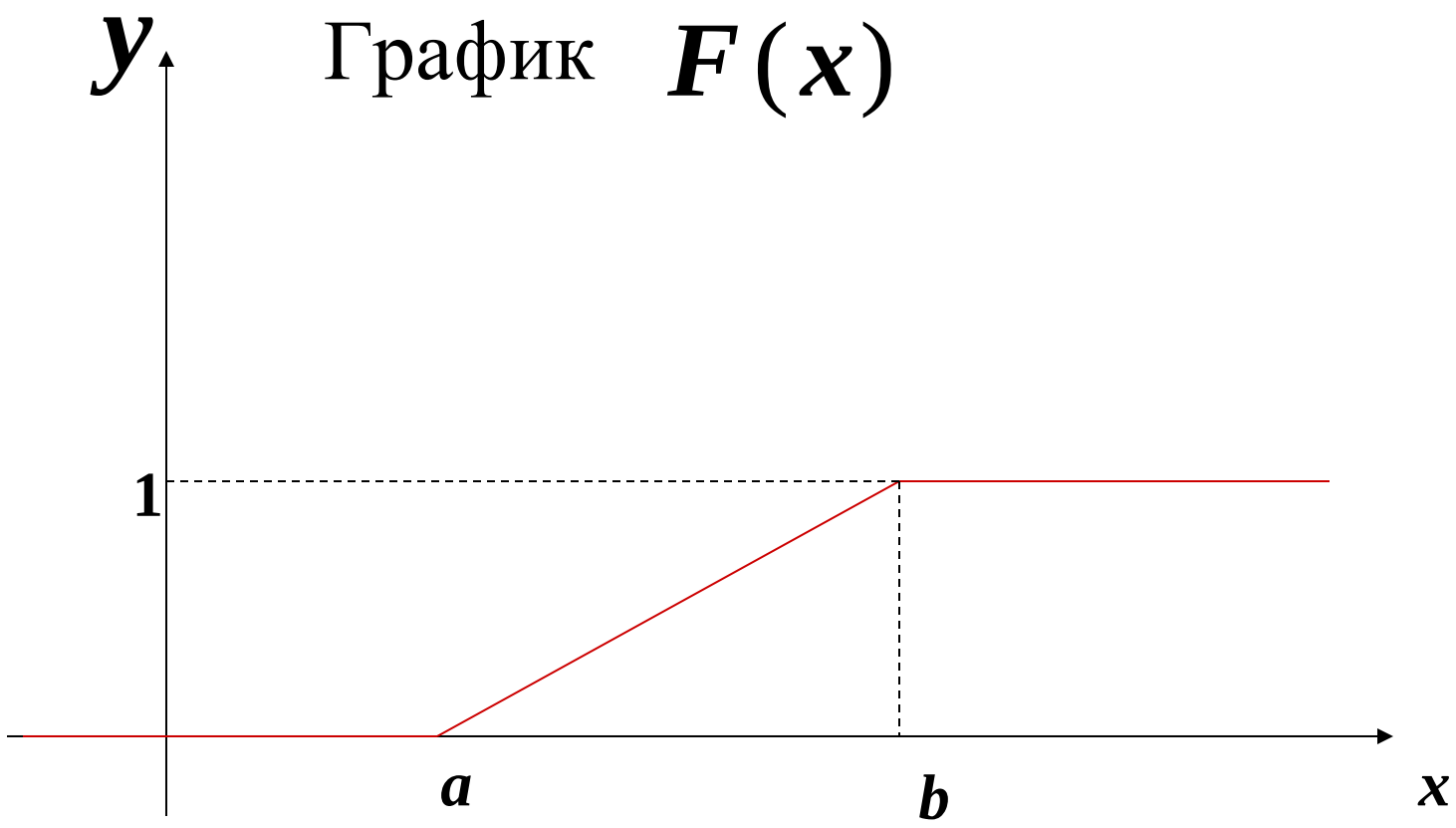
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

- Если $x \in (a,b]$, то $F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$

- Наконец, для $x \in (b, \infty]$

$$F(x) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{\infty} 0dx = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

График функции распределения равномерно распределённой случайной величины



Числовые характеристики равномерно распределённой случайной величины

- Если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$ то математическое ожидание имеет вид

$$M\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

- Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

- После интегрирования получаем $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma X = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Показательное (экспоненциальное) распределение

- Если функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

- то говорят, что X имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром λ.
- Плотность показательного распределения

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Числовые характеристики показательного распределения

- Вычислим математическое ожидание.

$$MX = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{c} u = x, du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx, v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right| =$$

$$= \lambda \left(x\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

- Аналогично
- $MX^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$ Поэтому $DX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$

Пример

- Время безаварийной работы газопровода имеет показательное распределение. Среднее время безаварийной работы равно 24 месяцам. Какова вероятность, что в течении года не будет аварий?

Решение примера

- Пусть T - время безаварийной работы газопровода. По условию $M[T]=2$ года, следовательно, параметр показательного распределения равен

$$\lambda=\frac{1}{M[T]}=0,5.$$

$$P(T>1)=1-P(T<1)=1-F(1)=1-(1-e^{-0.5})=\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0,6$$

Нормальное (гауссово) распределение

- Если плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$

- то говорят, что X имеет **нормальное (гауссово)** распределение с параметрами a и σ. Кратко обозначается

$$X \in N(a, \sigma^2).$$

- Функция распределения имеет вид

$$F_{a,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Стандартное нормальное распределение

- Нормальное распределение с параметрами 0 и 1 называется **стандартным**. Плотность стандартного нормального распределения обозначается через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty.$$

- Функция распределения стандартного нормального распределения распределения обозначается $F_s(x)$ имеет вид

$$F_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- И называется **функцией нормального распределения**.

- **Замечание.** Известно, что неопределённый интеграл от функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ является интегралом «не берущемся» в
- элементарных функциях , но **несобственый интеграл** вычисляется без непосредственного применения формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

- Поэтому в учебниках по теории вероятностей даются таблицы значений функции $F_s(x)$. Отметим, что

$$F_s(-x) = 1 - F_s(x).$$

Функция Лапласа

- Имеются таблицы также функции **Лапласа ,**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Свойства функции Лапласа.
- 1) **Нечётность** ,

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

- 2) **Возрастание** на всей числовой прямой, причём $\Phi(+\infty) = 0,5.$ $\Phi(-\infty) = -0,5.$
- 3) $$F_s(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}.$$

Вычисление вероятности попадания в интервал нормально распределённой с.в.

- Если случайная величина X **имеет нормальное распределение с параметрами** a , σ , то справедливы формулы

$$P(\alpha < X < \beta) = F_s\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_s\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

- Доказательство первой формулы следует из равенства

$$F_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = F_s\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Числовые характеристики нормального распределения

- Если X случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами a и σ, то **математическое ожидание совпадает с параметром** a, **дисперсия с** σ^2.

$$M\,X = a,\ D\,X = \sigma^2,\ \sigma[X] = \sigma.$$

Пример

- Давление на выходе газопровода можно рассматривать как случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами

$$a = 50 кгс/см^2 \quad , \sigma = 2 кгс/см^2$$

- Какова вероятность, что давление не превысит $47\, кгс/см^2$?
- Каким с вероятностью 0,995 может быть максимальное давление?

Решение. Обозначим через X давление на выходе газопровода. По условию $X \in N(50, 2^2)$. $P(X \le 47) =$

$$= F_s\left(\frac{47-50}{2}\right) = \Phi\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\Phi\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= -0,43 + 0,5 = 0,07$$

Решение примера

- Найдём с вероятностью 0,995 максимальное давление. Обозначим через x_m максимальное давление, которое возможно с вероятностью 0,995

$$P(X \le x_m) = 0,995$$

- С другой стороны $P(X \le x_m) = F_s\left(\frac{x_m - 50}{2}\right).$
- Поэтому

$$F_s\left(\frac{x_m - 50}{2}\right) = 0,995 \Rightarrow \Phi\left(\frac{x_m - 50}{2}\right) = 0,495.$$

- По таблицам функции Лапласа $\frac{x_m - 50}{2} = 2,6.$
- Отсюда

$$x_m = 2,6 \cdot 2 + 50 = 55,2.$$

Симметричный интервал.

- Вычислим вероятность попадания в симметричный интервал относительно математического ожидания

$$\boldsymbol{P}(\left|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}\right|<\delta)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}-\delta<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{a}+\delta)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}-\delta<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{a}+\delta)=\boldsymbol{F_s}(\frac{\boldsymbol{a}+\delta-\boldsymbol{a}}{\sigma})-\boldsymbol{F_s}(\frac{\boldsymbol{a}-\delta-\boldsymbol{a}}{\sigma})=\mathbf{2}\boldsymbol{F_s}(\frac{\delta}{\sigma})-\mathbf{1}.$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}-\delta<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{a}+\delta)=\boldsymbol{\Phi}(\frac{\boldsymbol{a}+\delta-\boldsymbol{a}}{\sigma})-\boldsymbol{\Phi}(\frac{\boldsymbol{a}-\delta-\boldsymbol{a}}{\sigma})=\mathbf{2}\boldsymbol{\Phi}(\frac{\delta}{\sigma}).$$

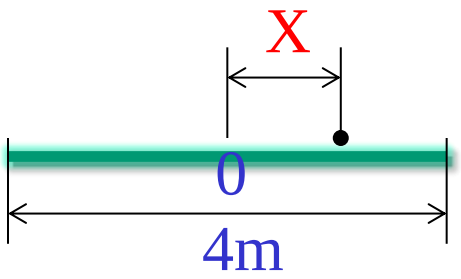
Правило 3-х сигм.

- В случае $\delta = 3\sigma$ вероятность отклонения случайной величины на величину больше, чем 3σ мала . Действительно,

$$P(|X-a|>3\sigma)=1-P(|X-a|<3\sigma)=$$

$$=1-2\Phi(3)\approx 1-2\cdot 0,4987=0,0026.$$

- Таким образом, **значениями** случайной величины, которые отклоняются от математического ожидания **больше, чем на** 3σ, часто **пренебрегают**, **как маловероятными**.

Пример

- При артиллерийской стрельбе по полосе шириной 4 м, перпендикулярной направлению стрельбы случайное отклонение X от средней линии полосы не превышает 30 м. Найти вероятность попадания в полосу, если отклонение X подчиняется нормальному закону с нулевым средним.