Схема независимых испытаний

Повторные испытания Бернулли

Схема независимых испытаний

- Предположим, что производятся ***независимые*** испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p = P(A)$ (вероятность **«успеха»)** и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. (вероятность **«неудачи»)**
- **Вопрос 1**. Какова вероятность , что **«успех»** наступит **только в** k **-ом** испытании ?
- ***Вопрос 2*** : Какова вероятность , что событие A в n испытаниях появится **ровно** k раз? $P_n(k) = ?$

Формула Бернулли

- При $k = n$ эта вероятность $P_n(n)$, в силу независимости появления события A в каждом испытании, равна $\underbrace{p \cdot p \cdots p}_{n} = p^n$,
- а при $k = 0$, $P_n(0) = q^n$.
- В общем случае искомая вероятность вычисляется по **формуле Бернулли**

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.}$$

Комментарий к формуле Бернулли

- Коэффициенты C_n^k в формуле Бернулли называются биномиальными, в силу их совпадения с коэффициентами бинома Ньютона
- Замечание. Справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1,$$

- которое следует из формулы бинома Ньютона

$$1 = (p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пример

- Какова вероятность выпадении герба при бросании трёх монет?

Решение

- Решение. Бросание трёх монет можно рассматривать как бросание одной монеты 3 раза. Вероятность выпадения герба $\boldsymbol{p = P(A) = 1/2}$.
- Вероятность противоположного события
$$\boldsymbol{q = 1 - p = 1/2}.$$
- Искомая вероятность вычисляется по формуле Бернулли
$$\boldsymbol{P_3(1) = C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3!}{1!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}}.$$

Формула Пуассона

- Вычисление вероятности $P_n(k)$ по формуле Бернулли при больших значениях n, k затруднительно. Поэтому применяют асимптотические формулы. Рассмотрим формулу **Пуассона**:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- где $n \cdot p \to \lambda.$
- Формула Пуассона применяется, когда вероятность «успеха»в одном испытании мала, а количество испытаний велико, так что число $\lambda = n \cdot p$ незначительно $\boxed{\lambda < 10.}$

Пример

- Вероятность выхода из строя станка за смену равна 0,02. Найти вероятность, что за смену произойдёт отказ более двух станков, если работает 100 станков.

Испытания до первого «успеха»

- Рассмотрим схему ***независимых испытаний*** с вероятностью «успеха» p в одном испытании. Обозначим через τ величину равную ***номеру первого успешного испытания***.
- ***Теорема.*** Вероятность того , что ***первый успех*** произойдёт в испытании с номером $k \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, равна

$$\boxed{P\{\tau = k\} = q^{k-1} p.}$$

Пример

- Монета бросается до первого выпадения герба. Какова вероятность, что будет сделано не более трёх испытаний?

Случайные величины
Random Variables

Дискретные случайные величины

Discrete Random Variables

Определение случайной величины

- Пусть Ω - пространство элементарных исходов с заданной алгеброй событий Ψ и вероятностью P.
- **Функция** $X(\omega), \omega \in \Omega$ **, определённая на пространстве элементарных исходов,** называется **случайной величиной.**
- Таким образом**,** случайная величина **это неизвестное заранее число,** которое **появляется** в результате испытания**.**

Индикатор события

- Пусть $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\Psi}$ - событие из алгебры $\boldsymbol{\Psi}$.
- Случайная величина $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}}$, принимающая значение 1, если событие $\boldsymbol{A}$ **появляется**, и 0, если событие $\boldsymbol{A}$ не появляется, называется **индикатором** события . Таким образом

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{1}, \omega \in \boldsymbol{A} \\ \mathbf{0}, \omega \notin \boldsymbol{A} \end{cases}.$$

Дискретные случайные величины

- Случайная величина, принимающая **конечное число значений или последовательность значений** с положительной вероятностью называется **случайной величиной, имеющей дискретное распределение или дискретной случайной величиной**
- Случайная величина, определённая на **конечном пространстве элементарных исходов**, является **дискретной случайной величиной.**

Закон распределения
Probability Distribution

- Пусть дискретная случайная величина X принимает значения

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots.$$

- **Дискретным законом распределения** случайной величины X называется совокупность **всевозможных значений случайной величины и вероятностей их появления, т.е.**

$$p_k = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}, k = 1, 2, \cdots.$$

Закон распределения дискретной случайной величины (табличная запись)

- Закон распределения дискретной случайной величины удобно задавать в виде таблицы, у которой $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$
- Таблица 1.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Закон распределения индикатора событий

- Таблица 2.

I_A	0	1
P	q	p

$$p = P(A), \quad q = 1 - p.$$

Биномиальное распределение

- Рассмотрим случайную величину $\mu_n = \mu_n(A)$ **равную числу появлений события** A в серии n независимых испытаний. Распределение вероятностей значений этой случайной величины можно вычислить по формуле Бернулли :

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k};\ k = 0, 1, \cdots, n;\ p + q = 1,$$

- Такой закон распределения называется **биномиальным**, так как вероятности появления с.в. μ_n совпадают с членами разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n.$$

Пример

- Игральная кость бросается 3 раза. Найти закон распределения выпадения 6 очков.

Распределение Пуассона

- Рассмотрим случайную величину μ, принимающую счётное число значений $\mathbf{0, 1, \cdots, k, \cdots}$ с вероятностями

$$\boldsymbol{P}(\mu = \boldsymbol{k}) = \frac{\lambda^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{e}^{-\lambda}.$$

- Такой закон распределения называется пуассоновским с параметром λ.
- Закон распределения Пуассона можно считать предельным для биномиального распределения, когда вероятность появления события $\boldsymbol{A}$ мала, а число испытаний велико $\boldsymbol{n} \to \infty$, принимая $\lambda = \mathrm{np}$.

Пример

- Вероятность поставки бракованного прибора равна 0.02.?
- Написать закон распределения числа бракованных изделий в партии из 100 изделий.
- Какова вероятность, что в партии из 100 приборов более двух приборов будет бракованных.

Геометрическое распределение

- Рассмотрим схему независимых испытаний, в которой $p = P(A)$ вероятность "успеха": появления события A в одном испытании. Испытания будем проводить до тех пор, пока произойдёт непоявление события A, говорят что ***испытания прекращаются с появлением первой "неудачи***". Пусть η число успехов до первой неудачи. Закон распределения случайной величины η имеет вид

η	0	1	…	k	…	
P	q	pq	…	$p^k q$	…	

- Такое распределение называется **геометрическим**.

Пример

- Бросается игральная кость. «Успех» состоит в выпадении 6 очков. Написать закон распределения числа «успехов», если испытания прекращаются после первой «неудачи».
- Какова вероятность, что число испытаний будет более двух?