

Числовые характеристики дискретных случайных величин



Математическое ожидание Expected Value (i.e. Mean)

- - характеризует **среднее весовое значение случайной величины** с учётом вероятности появлений значений случайной величины

- Пусть **дискретная** случайная величина принимает **конечное** число значений, и закон распределения случайной величины X имеет вид:

$$p_k = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}, k = 1, 2, \dots, n.$$

- **Математическим ожиданием** MX ($E(X)$) случайной величины X называется число равное

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математическое ожидание индикатора

- Из таблицы 2 математическое ожидание индикатора события A равно

$$M I_A = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

- В случае **счётного** числа значений дискретной случайной величины математическое ожидание задаётся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

- Если ряд **сходится абсолютно**, то его сумма называется математическим ожиданием.

$$M X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Теорема о вычислении математического ожидания

- Пусть пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

конечно, тогда справедливо равенство

$$M X = \sum_{j=1}^N X(\omega_j) P(\omega_j).$$

Доказательство. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что с.в. X принимает значение x_i ,

- т.е.
$$A_i = \left\{ \omega_{i_k} : x_i = X(\omega_{i_k}) \right\}.$$

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^n x_i P\left(\sum_{\omega_{i_k} \in A_i} \omega_{i_k}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\omega_{i_k} \in A_i} X(\omega_{i_k}) P(\omega_{i_k}) \right) = \sum_{j=1}^N X(\omega_j) P(\omega_j). \end{aligned}$$

- В последней сумме приведена сквозная нумерция **всех** элементов ω_j пространства Ω ($N(\Omega) = N$)

Свойства математического ожидания

- Случайная величина $X = C$ называется **константой**, если X принимает значение C с вероятностью равной 1.
- 1. Математическое ожидание константы равно этой константе, т.е.

$$M C = C.$$

Свойства математического ожидания

- 2. $M(\alpha X + \beta Y) = \alpha M X + \beta M Y.$
- Доказательство. По теореме о вычисл.мат ожид. имеем

$$\begin{aligned} M(\alpha X + \beta Y) &= \sum_{j=1}^N (\alpha X(\omega_j) + \beta Y(\omega_j)) P(\omega_j) = \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha X(\omega_j) P(\omega_j) + \sum_{j=1}^N \beta Y(\omega_j) P(\omega_j) = \alpha M X + \beta M Y. \end{aligned}$$

Аналогичное доказательство для счётного числа значений.

Независимые случайные величины

- Дискретные случайные величины X, Y называются **независимыми**, если выполняется равенство

$$P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$$

- Для **всевозможных значений** x_i, y_k случайных величин X, Y

Свойство математического ожидания для независимых случайных величин

- 3. Если случайные величины X, Y **независимы** , то

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

- 4. Если случайная величина $X \geq 0$, то математическое ожидание также является неотрицательным числом

$$MX \geq 0.$$

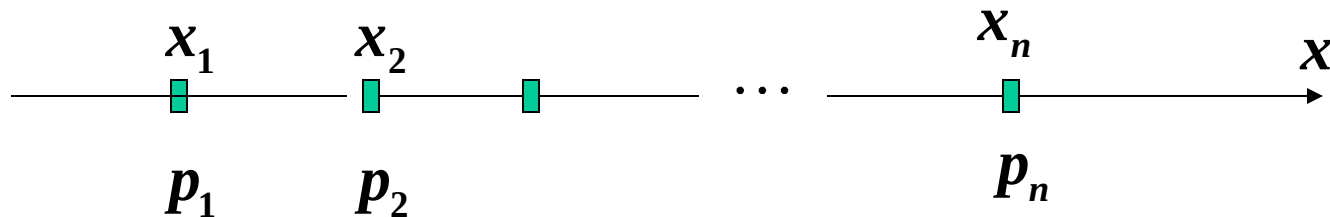
Доказательство

- Докажем свойство в случае конечного числа значений случайных величин. В случае счётного числа значений соответствующие равенства сохраняются.

$$\begin{aligned} M(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_i \cdot y_k P(X = x_i, Y = y_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_i \cdot y_k P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \cdot \sum_{k=1}^m y_k P(Y = y_k) = MX \cdot MY. \end{aligned}$$

Механическое истолкование математического ожидания

- Закон распределения дискретной случайной величины можно истолковать как **единичную массу**, распределённую по соответствующим точкам $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.



- Математическое ожидание совпадает с **центром тяжести** x_c системы, т.к.

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = x_c.$$

Дисперсия-Variance

- Дисперсией DX ($VarX$) случайной величины X называется число

$$DX = M[X - MX]^2.$$

- Свойства дисперсии**

- 1.** $DX \geq 0$. Если $X = C$ с вероятностью 1, то $DX = 0$.
- Справедливо и обратное утверждение. Если $DX = 0$, то $X = C$ с вероятностью 1.
- Действительно,
- Если $X = C$, то $M[X - MX]^2 = M[0] = 0$.

Свойства дисперсии

- 2. $DX = M[X]^2 - (M[X])^2.$

- Доказательство. Обозначим $a = MX$. Используя свойства математического ожидания получаем

$$\begin{aligned} DX &= M[X - a]^2 = M[X]^2 - 2aMX + a^2 = M[X]^2 - 2a^2 + a^2 = \\ &= M[X]^2 - (MX)^2. \end{aligned}$$

Свойства дисперсии

- **3.** Для любого действительного числа c справедливо равенство

$$D(cX) = c^2 DX.$$

- Доказательство. Применяя свойство 2 дисперсии, получаем

$$\begin{aligned} D[cX] &= M[cX]^2 - (M[cX])^2 = c^2 M[X]^2 - c^2 (MX)^2 = \\ &= c^2 (M[X]^2 - (MX)^2) = c^2 DX. \end{aligned}$$

Свойства дисперсии

- 4. Для любых независимых случайных величин X, Y справедливо равенство

$$D[X + Y] = DX + DY.$$

- Доказательство. Из независимости случайных величин X, Y легко видеть следует независимость случайных величин
- $X - MX, Y - MY$, так как математические ожидания не являются случайными величинами. Используя равенство
$$M[X - MX] = M[X] - M[MX] = M[X] - M[X] = 0,$$
- получаем

продолжение доказательства свойства 4 дисперсии

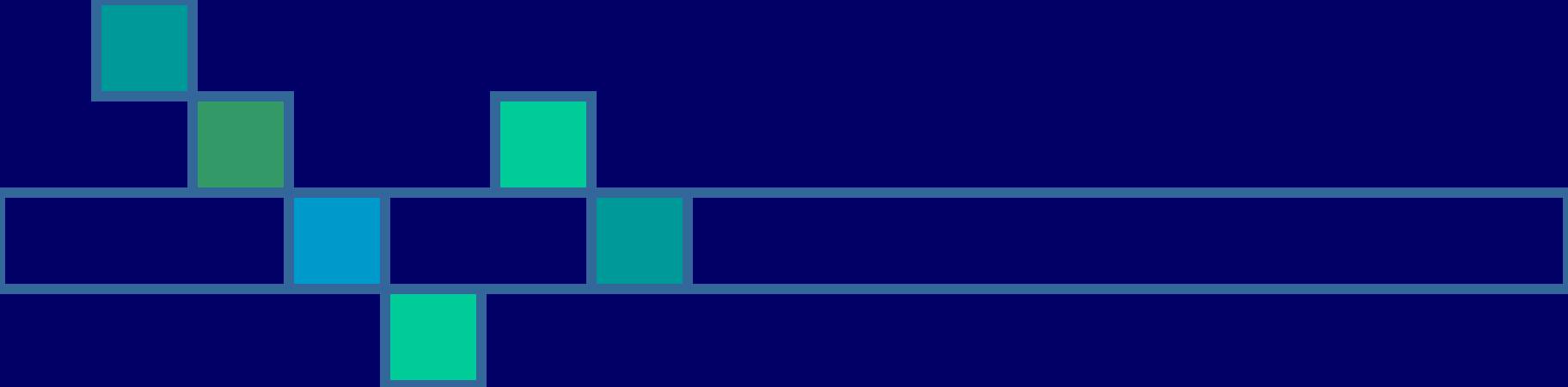
$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M[X + Y - (M(X + Y))]^2 = M[X - MX + Y - MY]^2 = \\ &= M[X - MX]^2 + 2M[X - MX]M[Y - MY] + M[Y - MY]^2 = \\ &= M[X - MX]^2 + M[Y - MY]^2 = DX + DY, \end{aligned}$$

Среднеквадратическое отклонение Standard Deviation (Mean Square Deviation)

- Характеристикой разброса случайной величины является также числовая характеристика

$$\sigma X = \sqrt{DX},$$

которая называется *среднеквадратическим отклонением*.



Числовые характеристики основных дискретных случайных величин



Математическое ожидание биномиального распределения случайной величины $\mu_n = \mu_n(A)$

- Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что событие A произойдёт в i -ом испытании, а I_{A_i} - индикатор события A_i . Справедливо равенство

$$\mu_n = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}.$$

- Индикаторы I_{A_i} имеют один и тот же закон распределения

$$P(I_{A_i} = 1) = P(A) = p, P(I_{A_i} = 0) = P(\bar{A}) = q.$$

с математическим ожиданием $MI_{A_i} = p$. Отсюда

$$M\mu_n = MI_{A_1} + MI_{A_2} + \dots + MI_{A_n} = p + p + \dots + p = np.$$

Дисперсия биномиального распределения

- Вычислим дисперсию индикатора I_{A_i}

$$DI_{A_i} = MI_{A_i}^2 - (MI_{A_i})^2 = p - p^2 = pq.$$

- Далее в силу независимости событий A_i

$$D\mu_n = DI_{A_1} + DI_{A_2} + \dots + DI_{A_n} = pq + pq + \dots + pq = npq.$$

- Итак, числовые характеристики биномиального распределения имеют вид

$$M\mu_n = np, \quad D\mu_n = npq.$$

Математическое ожидание пуассоновского распределения

- Покажем, что

$$M\mu = \lambda.$$

- Действительно,

$$\begin{aligned} M\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Дисперсия пуассоновского распределения

- Для вычисления $D\mu$ представим $\mu^2 = \mu(\mu - 1) + \mu$.
- Вычислим

$$\begin{aligned} M\mu(\mu - 1) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2. \end{aligned}$$

- Отсюда $M\mu^2 = M\mu(\mu - 1) + M\mu = \lambda^2 + \lambda$.

- Поэтому $D\mu = M\mu^2 - (M\mu)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Математическое ожидание и дисперсия геометрического распределения

- Можно показать, что в случае геометрического распределения с.в. X равной числу опытов в схеме независимых испытаний до первого «успеха» справедливы формулы:

$$MX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{q}{p^2}.$$

Функция распределения

Cumulative Distribution
Function (c.d.f.)

- Рассмотрим случайную величину $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на **произвольном** пространстве элементарных событий Ω с заданной σ -алгеброй событий Ψ и вероятностью P .
- В дальнейшем будем предполагать, что **события вида** $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$, где $x \in \mathbb{R}$ – произвольное число, **принадлежат** алгебре событий Ψ .
- Следовательно, для таких событий определена вероятность. В силу определения алгебры событий вероятность определена и для событий вида $\{\omega \in \Omega : x_1 \leq X(\omega) < x_2\}$.

Определение функции распределения

- Функцией распределения $F(x)$ случайной величины $X = X(\omega)$ называется функция, определённая для любого $x \in \mathbb{R}$ равенством

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\}.$$

Функция распределения индикатора

- Найдём функцию распределения индикатора I_A .

I_A	0	1
P	q	p

- Для $x \in (-\infty, 0]$, $F(x) = P(I_A < x) = P(\emptyset) = 0$, так как первое значение, которое принимает случайная величина, равно 0. Для следующего интервала $x \in (0; 1]$ получаем

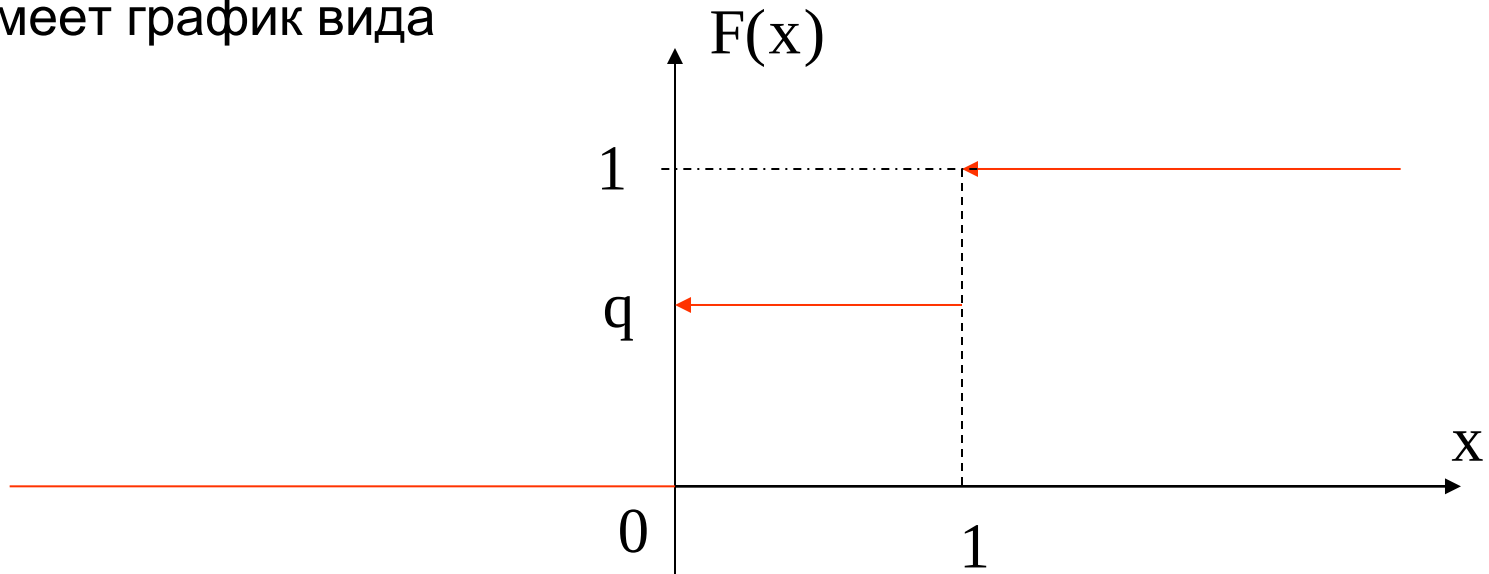
$$F(x) = P(I_A < x) = P(I_A = 0) = q.$$

Продолжение примера. Функция распределения индикатора

- Наконец, для интервала $x \in (1; +\infty]$ получаем

$$F(x) = P(I_A \in (-\infty, x)) = P(I_A = 0) + P(I_A = 1) = q + p = 1.$$

- Таким образом, функция распределения индикатора разрывная и имеет график вида



Свойства функции распределения

- 1. $0 \leq F(x) \leq 1$. Причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- Неравенство, очевидно, следует из соответствующего свойства вероятности.
- Обоснуем предельный переход, в котором используется σ – аддитивность алгебры событий.

Обоснование предельного перехода, в котором используется σ – **аддитивность** алгебры событий

- Действительно,

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [F(1) + (F(2) - F(1)) + \dots + (F(n) - F(n-1))] = \\ &\triangleq \lim_{n \rightarrow +\infty} [P\{X \in (-\infty, 1)\} + P\{X \in [1, 2)\} + \dots + P\{X \in [n-1, n)\}] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{X \in (-\infty, 1) \cup [1, 2) \cup \dots \cup [n-1, n)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{X \in (-\infty, n)\} = \\ &= P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = 1 \end{aligned}$$

- Равенство $\triangleq$ будет доказано позже (Теорема 1).

СВОЙСТВО 2

- 2. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- Действительно:

$$\begin{aligned} F(x_2) &= P(X \in (-\infty, x_2)) = P\{X \in (-\infty, x_1) \cup [x_1, x_2)\} = \\ &= P\{X \in (-\infty, x_1)\} + P\{X \in [x_1, x_2)\} \geq P\{X \in (-\infty, x_1)\} = F(x_1). \end{aligned}$$

Вычисление вероятности попадания случайной величины в полуинтервал

- **Теорема 1.** Если $F(x)$ -функция распределения случайной величины X , то для любых чисел $x_1 < x_2$ справедливы формулы

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1), \quad P\{X = x_1\} = F(x_1 + 0) - F(x_1).$$

- Доказательство. Для чисел $x_1 < x_2$ справедливо равенство

$$\{X \in (-\infty, x_2)\} = \{X \in (-\infty, x_1)\} + \{X \in [x_1, x_2)\}.$$

- Отсюда

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \leq X < x_2\},$$

доказывает первую формулу.

- Переходя к пределу, получаем

$$\begin{aligned} P\{X = x_1\} &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1 + 0} P\{x_1 \leq X < x_2\} = \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1 + 0} F(x_2) - F(x_1) = F(x_1 + 0) - F(x_1). \end{aligned}$$

Непрерывные случайные величины

Continuous Random Variables

- Наша следующая задача – ограничить класс функций, с которыми можно иметь дело. Понятие произвольной функции слишком общо, чтобы быть полезным.

Феллер В.

Определение

- Случайная величина X называется **непрерывной**, **(имеющей непрерывное распределение)**, если существует неотрицательная, интегрируемая на всей оси функция
- $p(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$, такая, что функция распределения представима в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt.$$

- Подынтегральная функция $p(x), x \in \mathbb{R}$, называется **плотностью распределения** случайной величины X .
- **Probability Density Function (p.d.f.)**

Замечание

- . Из свойств интеграла с переменным верхним пределом следует, что **функция распределения введённой непрерывной случайной величины непрерывна**. В отличие от дискретной с.в., у которой функция распределения **разрывна**

Свойства плотности распределения непрерывной случайной величины

- 1. $p(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Действительно, первая часть утверждения следует из определения, вторая – из свойства функции распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = F(+\infty) = 1.$$

- 2. В точках $x \in \mathbb{R}$, в которых функция $p(x)$ непрерывна, справедливо равенство

$$p(x) = F'(x).$$

- т.е. функция распределения есть первообразная плотности.

Парадокс. Свойство непрерывной случайной величины

- Если X - **непрерывная** случайная величина, то для **любого** числа $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$P\{X = a\} = 0.$$

- Действительно, из равенства

$$P\{X = a\} = F(a + 0) - F(a),$$

доказанного в теореме 1, в силу непрерывности функции распределения, следует

$$P\{X = a\} = F(a) - F(a) = 0.$$

Вычисление вероятности попадания **непрерывной случайной величины** в произвольный промежуток

Для непрерывной случайной величины справедливы равенства

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq X < x_2\} &= P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \\ &= P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \end{aligned}$$

- **Теорема 2.** Если X непрерывная случайная величина и плотность распределения $p(x)$ имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[a, b]$, то справедливо равенство

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)dx.$$

- причём **строгие неравенства можно заменить на нестрогие.**
- Доказательства теоремы вытекает из формулы Ньютона-Лейбница и замечания, высказанного выше.

Пример

- Дана плотность распределения случайной величины

$$p(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ cx, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x < +\infty. \end{cases}, x \in \mathbb{R},$$

- Найти c ;
- вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1; 1)$; вероятность, что в 2-х опытах случайная величина хотя бы один раз попадёт в интервал $(-1; 1)$;
- функцию распределения.