Теория вероятностей

Лекция 1

Случайные события
Классическая схема

Литература

- Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. - 288 с.
- Теория вероятностей. В.А. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др. ; Под ред. В.С. Зарубина, А.П.Крищенко.- М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.- 456с
- Калинин В.В., Фастовец Н.О. Вероятность в примерах и задачах. – М.: Нефть и газ, 2004.
- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2002.
- Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2002.
- Вентцель Е.С. Теория вероятностей . – М.: Высшая школа, 2002.

Случайные события

- Предмет изучения теории вероятностей – математические модели **случайных экспериментов** т.е. испытаний со случайными исходами При этом предполагается, что испытания можно повторить при неизменном комплексе условий произвольное число раз.
- **Пространство** Ω **элементарных исходов** – совокупность взаимоисключающих исходов эксперимента таких, что в результате эксперимента обязательно появляется один и только один из исходов $\omega \in \Omega$.
- **Случайное событие** A – **подмножество** множества элементарных исходов $A \subset \Omega$.

Случайные события

- Если в результате эксперимента появляется элементарный исход $\omega \in A$, принадлежащий событию A, то говорят, что событие A произошло.

- Элементарные исходы $\omega \in A$, при наступлении которых событие A **происходит**, называются **исходами, благоприятствующие событию.**

- Событие $\bar{A}$, состоящее в том, что событие A не происходит, называется событием **противоположным** событию A.

Задача. Построить пространства элементарных исходов в испытаниях.

- Пример 1. Испытание состоит в однократном подбрасывании монеты.
- Пример 2. Испытание состоит в двукратном подбрасывании монеты.
- Пример 3. Испытание состоит в однократном подбрасывании игральной кости.
- Пример 4. Испытание состоит в подбрасывании 2-х игральных костей.
- Пример 5. Испытание состоит в выстреле по прямоугольной мишени.

Достоверные и невозможные события

- Событие Ω, совпадающее со всем множеством элементарных исходов Ω, называется **достоверным событием**. Таким образом, **достоверное событие** – это событие, **которое обязательно происходит в результате эксперимента.**

- Событие $\varnothing$, совпадающее с пустым множеством $\varnothing$, называется **невозможным событием**.

Классическое определение вероятности

- Предположим, что пространство элементарных исходов состоит из **конечного числа** $N(\Omega) = n$ **исходов**

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

- а событию A благоприятствуют $N(A)$ исходов

$$\boldsymbol{A} = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}, \boldsymbol{m} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}).$$

- **Классическая вероятность** события A определяется формулой
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n},$$
- **т.е. отношением благоприятствующего числа исходов к общему числу исходов .**

Свойства классической вероятности

$$1. \quad P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n},$$

- **т.е.** ни один из элементарных исходов не является более вероятным, чем другие. Таким образом элементарные исходы являются **равновозможными**.

$$2. \quad P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1,$$

- т.е. **вероятность достоверного события равна 1**.

$$3. \quad P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0,$$

- т.е. **вероятность невозможного события равна 0**.

$$4. \quad 0 \le P(A) \le 1 \qquad 5. \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Классическая схема

- Всякий случайный эксперимент с конечным числом равновозможных исходов называется **классической схемой** .
- Приведённые примеры 1-4 удовлетворяют этому требованию**.**
- Пример 5 не удовлетворяет. **Почему?**

Пример

- В букете имеется 5 гвоздик, 3 розы и 1 хризантема.
- Какова вероятность, что выбранный наудачу цветок окажется розой?
- Какова вероятность, что выбранный наудачу цветок не окажется розой?

Комбинаторный метод вычисления классической вероятности. Правило умножения

- Если из некоторого множества элементы множества A_1 можно выбрать n_1 способами, а после каждого такого выбора элементы множества A_2 можно выбрать n_2 способами, то пару таких элементов можно выбрать способами $n_1 \cdot n_2$.

- **Пример**. Сколько существует двузначных чисел?

Размещения с повторениями

- Если производится выбор m **упорядоченных** элементов из n элементов **с возвращением**, то элементарными исходами являются упорядоченные наборы из m элементов исходного множества, которые называются **размещениями с повторениями из n элементов по m**.
- **Число размещений с повторениями** вычисляется по формуле

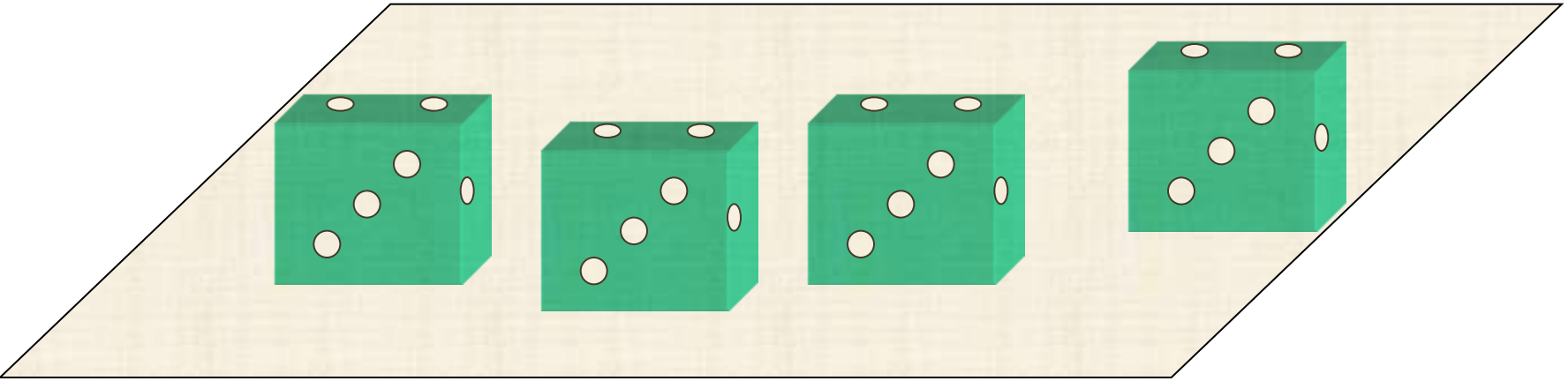
$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

Пример α

- В урне имеется 6 шаров с номерами 1,2,3,4,5,6. Наудачу по одному (с возвращением) вынимаются 4 шара, номер шара записывается, затем шар возвращается обратно.
- Найти вероятность того, что в записанном числе не будет цифры 6.
- Найти вероятность того, что все записанные цифры будут различны.

Пример β

- Подбрасываются 4 игральные кости. Какова вероятность, что хотя на одной из них выпадет 6 очков?



Размещения

- Если производится выбор m **упорядоченных** элементов из n элементов **без возвращения**, то элементарными исходами являются упорядоченные наборы из m элементов исходного множества, которые называются **размещениями из n элементов по m**.
  - Число размещений вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

- В частном случае $m = n$ размещения называются **перестановками**. Число перестановок вычисляется по формуле $P_n = n!$

Пример 1

- На 5 карточках написаны цифры от 1 до 5.

1	2	3	4	5

- 1) Какова вероятность, что при случайном выборе **3-х** карточек появится число 123, если карточки раскладываются слева направо .

- 2) Какова вероятность, что третья цифра будет 3 при случайном выборе 3-х карточек:

$$123,\ 143,\ 153,\ \ldots$$

*	*	3

Пример 2

- Одному ребёнку дали карточки разрезной азбуки с буквами А, Н ,Я, другому – с буквами А, Н, Н, А и предложили наудачу сложить слова. Появление какого слова более вероятно - АНЯ или АННА?

Пример 3

- Студент N написал 5 писем знакомым девушкам Любе, Ире, Кате, Вере и Марине . Вложил их в конверты, перемешал и подписал наудачу.
- 1. Какова вероятность, что все адреса написаны верно?
- 2. Какова вероятность, что адрес Иры написан верно?
- 3. Какова вероятность, что адреса писем Ире и Кате написаны верно?

Сочетания

- Общее число элементарных исходов в некотором испытании, состоящем в выборе наудачу m элементов из n элементов исходного множества можно вычислить, используя формулы комбинаторики.
- **Выбор, приводящий к сочетаниям**.
- Если производится выбор m **неупорядоченных** элементов из n элементов **без возвращения**, то элементарными исходами являются подмножества из m элементов исходного множества, которые называются **сочетаниями из** n **элементов по** m. Число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример

- В букете имеется 5 гвоздик, 1 роза и 3 нарцисса
- 1) Какова вероятность, что среди выбранных наудачу 3-х цветов все будут нарциссы?
- 2) Какова вероятность, что среди выбранных наудачу 5-ти цветов окажется ровно 1 роза?
- 3) Какова вероятность, что среди выбранных наудачу 5-ти цветов окажется ровно 2 нарцисса и 3 гвоздики?

Перестановки с повторениями

- Если производится выбор n **упорядоченных** элементов из n элементов **без возвращения**, среди которых имеется k различных (первый элемент повторяется n_1 раз, второй n_2 …, k -й элемент- n_k раз) , то элементарными исходами являются упорядоченные наборы, которые называются **перестановками с повторениями**. Число **перестановок с повторениями** вычисляется по формуле

$$P_n(n_1,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}.$$

Лекция 2

Статистическое определение вероятности

- Предположим что в результате серии из n испытаний событие A появилось $\mu_n(A)$ раз.
- Отношение $\dfrac{\mu_n(A)}{n}$
- Называется **относительной частотой события** A .
- В дальнейшем будет показано, что при $n \to \infty$ **относительная частота мало отличается от вероятности** события A , т.е.

$$\frac{\mu_n(A)}{n} \to P(A)$$

- Такое свойство **называется устойчивостью относительных частот.**

Пример.

- Колоду карт, состоящую из 36 карт, наудачу делят на **2 равные** части. Какова вероятность события A, состоящего в том , что в **обеих частях будет равное количество красных** и **чёрных** карт?
- Вычислим вероятность по классической формуле. Общее число исходов – число наборов, которыми колода карт делится на 2 равные части равно C_{36}^{18} . Благоприятствующие исходы – это такие наборы из 18 карт, которые содержат 9 красных карт и 9 чёрных. Число таких наборов

$$C_{18}^{9} \cdot C_{18}^{9}.$$

- Искомая вероятность равна

$$p = \frac{C_{18}^{9} \cdot C_{18}^{9}}{C_{36}^{18}} \approx 0,26$$

Результаты испытаний. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.:Наука.1988

номер испытания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
число красных карт в испытании	8	**9** ***A***	11	**9** ***A***	11	8	7	12	10	**9** ***A***	13	12	10	**9** ***A***	13
$\mu_n(A)$ – *число появления A в n испытаниях*	0	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
$\nu_n = \dfrac{\mu_n(A)}{n}$	**0**	**0,5**	**0, 33**	**0. 5**	**0,4**	**0, 33**	**0, 29**	**0, 37**	**0, 33**	**0, 3**	**0, 27**	**0, 25**	**0, 31**	**0 ,29**	**0,27**

Алгебра событий. Аксиомы А.Н.Колмогорова

Действия над событиями. Сумма и произведение событий

- **Сумма событий** $A+B$ состоит в том, что происходит **хотя бы одно** из событий A или B.
- Т.е., сумма событий состоит из элементарных событий, благоприятствующих **хотя бы одному из событий.**

- **Произведение** событий $A \cdot B$ состоит в том, что
- **происходят оба события** A и B.

- Т.е, произведение событий состоит из элементарных событий, благоприятствующих **одновременно** событиям A и B

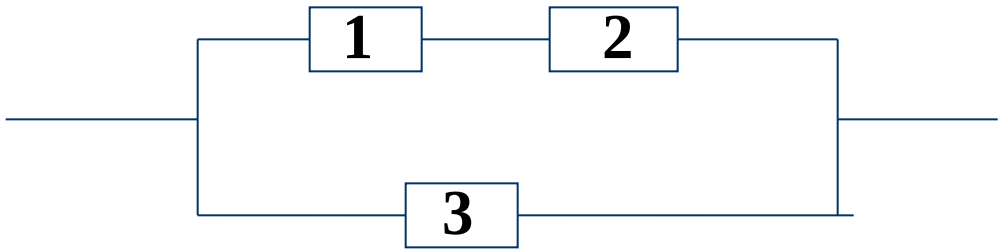
Противоположное событие

- **Противоположное событие** $\bar{A}$ состоит в том, что событие A **не происходит**.

- Таким образом, событие $\bar{A}$ происходит, если происходят элементарные события, **не благоприятствующие** A .

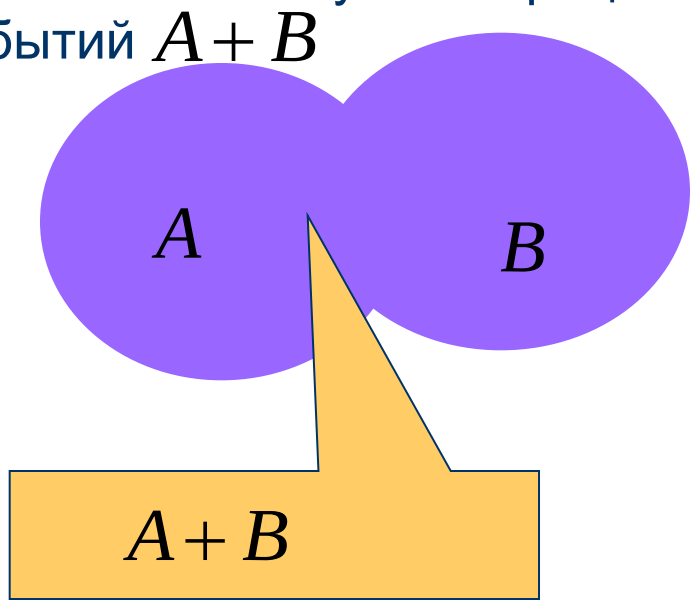
Пример

- События A_1, A_2, A_3 обозначают безотказную работу соответствующего элемента цепи. Выразить событие $B-$ разрыв цепи через события A_1, A_2, A_3.



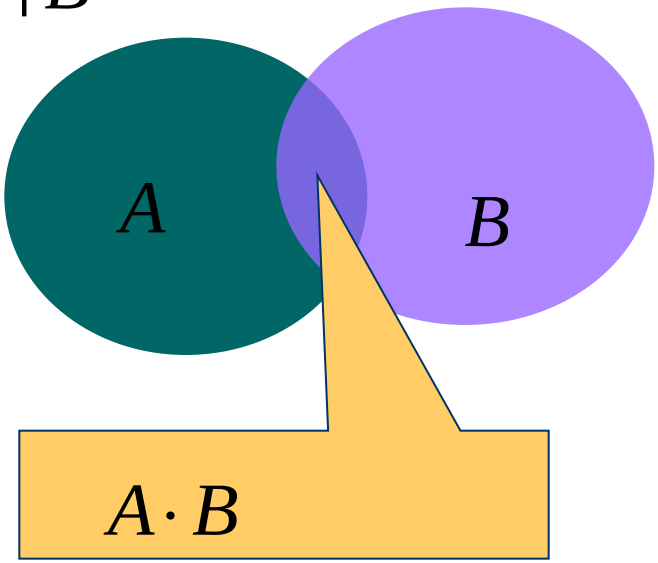
Геометрическая интерпретация суммы событий

- **Замечание.** Поскольку события являются множествами, то операциям над событиями соответствуют операции над множествами. Сумме событий $A+B$ соответствует объединение множеств $A \cup B$.



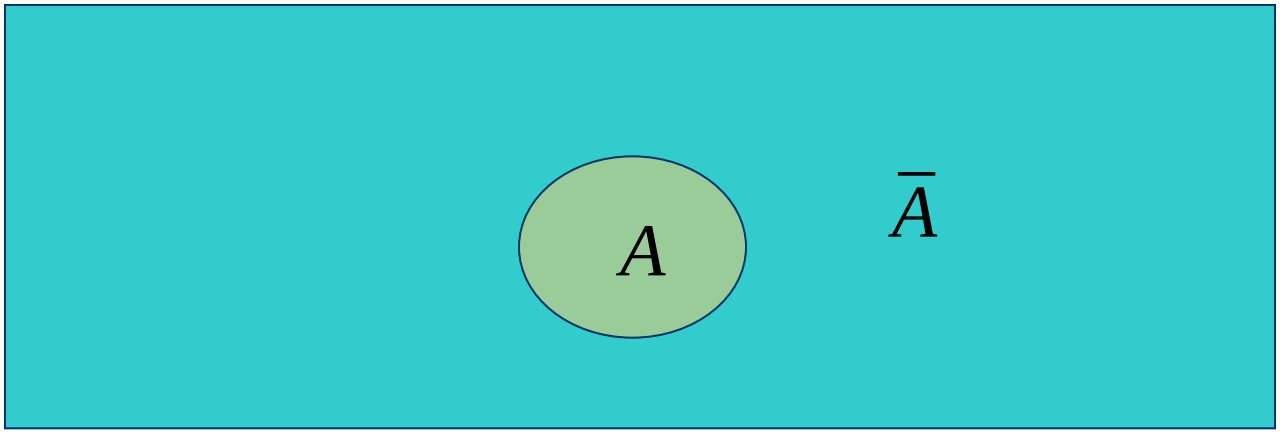
Геометрическая интерпретация произведения событий

- Произведение событий $A \cdot B$ является пересечением множеств $A \bigcap B$



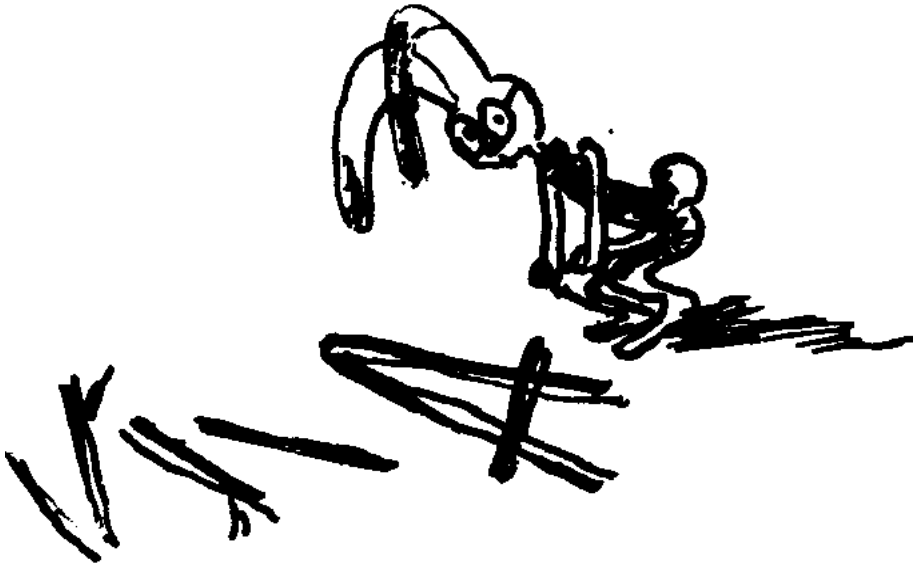
Геометрическая интерпретация противоположного события

- Противоположное событие истолковывается как дополнение множества



Алгебра событий.

- Будем рассматривать не только конечные пространства элементарных событий, но и **бесконечные**. В этом последнем случае **совокупность всех событий нельзя** отождествлять с **совокупностью всех подмножеств** Ω **.**



Определение.

- Совокупность **подмножеств** Ψ множества Ω называется **алгеброй**, если
- 1) $\Omega \in \Psi$
- 2) $A + B \in \Psi$, $A \cdot B \in \Psi$, $\bar{A} \in \Psi$ для любых $A \in \Psi, B \in \Psi$.
- **Замечание**.

  Так как $\varnothing = A \cdot \bar{A} \in \Psi$, то из свойства 2) следует $\varnothing \in \Psi$.

σ -алгебра

- В теории вероятностей рассматриваются также события, которые подразделяются на бесконечное число более мелких событий.
- Если произвольная бесконечная последовательность событий $A_1, A_2, \ldots$ содержится в алгебре событий Ψ и сумма этих событий $A_1 + A_2 + \ldots$ принадлежит Ψ, то
- такая алгебра событий называется σ **- алгеброй.**
- Если Ψ алгебра или σ -алгебра, то под **наблюдаемым событием** будем понимать такое подмножество множества Ω, которое принадлежит алгебре Ψ .

Аксиомы теории вероятностей

- В 1933 г. А.Н. Колмогоровым были предложены аксиомы, позволяющие определить понятие вероятности, не зависящее от природы пространств элементарных событий.
- Пусть Ω - произвольное пространство элементарных событий , а Ψ -алгебра событий из Ω . Каждому событию $A \in \Psi$ ставится в соответствие **неотрицательное** число $P(A)$, которое называется **вероятностью события** A если выполняются аксиомы:

Аксиомы А.Н. Колмогорова

- 1. $P(\Omega) = 1.$ (Аксиома нормировки).

- 2. $P(A_1 + A_2 + \cdots A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_k),$

для любых событий $A_1, A_2, \cdots A_k \in \Psi$ таких, что $A_i \cdot A_j = \varnothing, i \neq j.$ (Аксиома конечной аддитивности).

Определение. События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются **несовместными**, если **произведение этих событий является невозможным** событием

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \varnothing,$$

т.е. **невозможно появление одновременно несовместных событий**.

• События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ несовместны, если соответствующие множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ элементарных исходов **не** пересекаются.

Таким образом, в аксиоме 2 утверждается , что **вероятность суммы попарно несовместных** событий равна сумме вероятностей.

Расширенная аксиома сложения

- Если Ψ является σ **- алгеброй**, то требуется расширенная аксиома сложения

$$2')\ P(A_1 + A_2 + \cdots A_k \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_k) + \cdots,$$

- для любой бесконечной последовательности **попарно несовместных событий**

$$A_1, A_2, \cdots A_k, \cdots \in \Psi.$$

Недостаточность аксиомы конечной аддитивности

- Пусть Ω пространство элементарных исходов, состоящих из рациональных точек отрезка $[0, 1]$. В качестве событий A_{ab} будем рассматривать рациональные точки, принадлежащие промежуткам $(a,b), (a,b],[a,b), [a,b]$
- из отрезка $[0, 1]$, а также их всевозможные суммы и произведения. Точка $[a,a]$ включается в число отрезков. Введём вероятность $P(A_{ab}) = b - a$ события A_{ab}. Аксиома конечной аддитивности, очевидно, выполняется, но расширенная аксиома σ - аддитивности не выполняется. Действительно, представляя Ω в виде объединения рациональных точек ,
- $\Omega = \sum_i \omega_i$, получаем, что σ - аддитивность не выполняется.

$$P(\Omega) = 1,\ P(\omega_i) = 0.$$

Следствия аксиом (свойства вероятности)

- 1. $P(\varnothing) = 0$ Действительно

$$\Omega = \Omega + \varnothing, \Omega \cdot \varnothing = \varnothing \Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$$

- 2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Действительно

$$A + \bar{A} = \Omega,\ A \cdot \bar{A} = \varnothing \Rightarrow P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

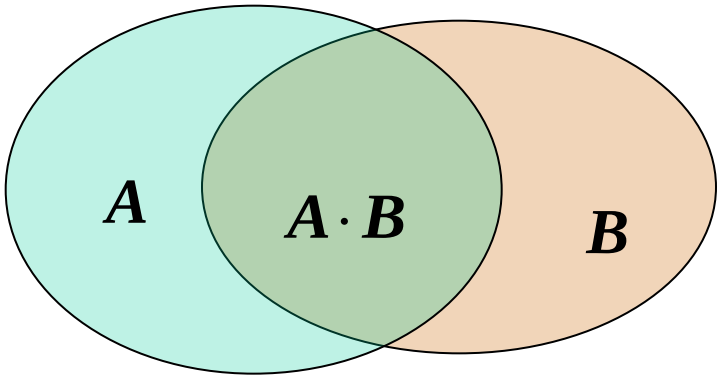
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

- 3. $P(A) \le 1.$ Действительно $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \le 1,$

т.к. $P(\bar{A}) \ge 0.$

Теорема сложения вероятностей

- 4. $$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$



Пример 1

- Подбрасываются 2 монеты. Какова вероятность, что герб выпадет хотя бы на одной монете?

Пример 2

- У студента в кармане лежат 6 монет: 2 монеты по 5 рублей; 3 монеты по 2 рубля ; 1 монета по 1 рублю. Какова вероятность, что сумма наудачу извлечённых 3 монет меньше 10 рублей.

Решение примера

- Решение. Пусть событие $\boldsymbol{A}$ состоит в том, что сумма, вынутых монет, меньше 10 рублей.
- Обозначим **несовместные** события

$$A_1 = \{1\times 5\,руб, 1\times 2\,руб, 1\times 1\,руб\},$$

$$A_2 = \{1\times 5\,руб, 2\times 2\,руб, 0\times 1\,руб\}$$

$$A_3 = \{0\times 5\,руб, 3\times 2\,руб, 0\times 1\,руб\},$$

$$A_4 = \{0\times 5\,руб, 2\times 2\,руб, 1\times 1\,руб\}$$

Продолжение решения примера

- Далее

$$p(A_1)=\frac{2\cdot 3\cdot 1}{C_6^3},\ p(A_2)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_6^3},\ p(A_3)=\frac{1}{C_6^3},\ p(A_4)=\frac{C_3^2\cdot 1}{C_6^3}.$$

- По аксиоме 2

$$p(A)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+p(A_4)=$$

$$=\frac{2\cdot 3\cdot 1}{C_6^3}+\frac{2\cdot C_3^2}{C_6^3}+\frac{1}{C_6^3}+\frac{C_3^2\cdot 1}{C_6^3}=\frac{6+6+1+6}{C_6^3}.$$

Независимые события. Условная вероятность.

- События A и B называются **независимыми**, если

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

- **Условной вероятностью события** B при условии события A называется вероятность

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

- В случае независимых событий

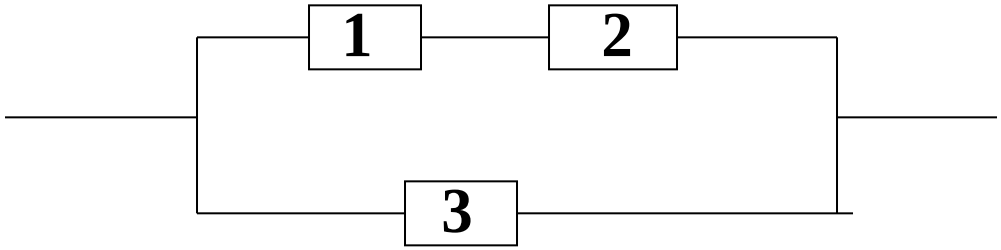
$$P(B|A) = P(B).$$

- Событие B **не зависит от события** A, если реализация события B не зависит от того, произошло событие A или нет.

Пример 3

- Найти вероятность безотказной работы цепи, если известна вероятность безотказной работы каждого элемента цепи

$$p_1 = 0{,}8;\ p_2 = 0{,}9;\ p_3 = 0{,}7.$$



Решение примера 3

- Обозначим через B_1, B_2, B_3 события, состоящие в безотказной работе соответствующего элемента. Будем предполагать, что эти события независимы. Вычислим вероятность события B безотказной работы цепи. Обозначим через A безотказную работу элементов 1и 2,
- $A = A_1 \cdot A_2,\ P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2).$ Отказ всей цепи и вероятность отказа равны

$$\bar{B} = \bar{A} \cdot \bar{B}_3,\ P(\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}_3) = (1 - P(A_1)P(A_2))(1 - P(B_3)$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}).$$

Теорема умножения вероятностей

- Справедливы равенства для произведения двух событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

- Для произведения трёх событий справедливо

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$$

Пример 4

- Группа из 6 студентов и 3 студенток наудачу занимают 3 столика в кафе по 3 человека. Какова вероятность, что за каждым столиком будет сидеть одна девушка?

Пример 5

- Найти вероятность появление слова АННА, если из разрезной азбуки, состоящей из букв А, А, Н, Н, наудачу вынимаются буквы и выкладывается слово.

Решение примера 5

- Обозначим события :
- $\mathfrak{A}$ - получится слово АННА:
- A_1 - первая буква А; A_2 - вторая буква – Н; A_3 - третья буква Н; A_4 - четвёртая буква А.
- Имеем

$$\mathfrak{A} = A_1 A_2 A_3 A_4$$

$$P(\mathfrak{A}) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot P(A_4 | A_1 A_2 A_3) =$$

$$= \frac{2}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{6}$$

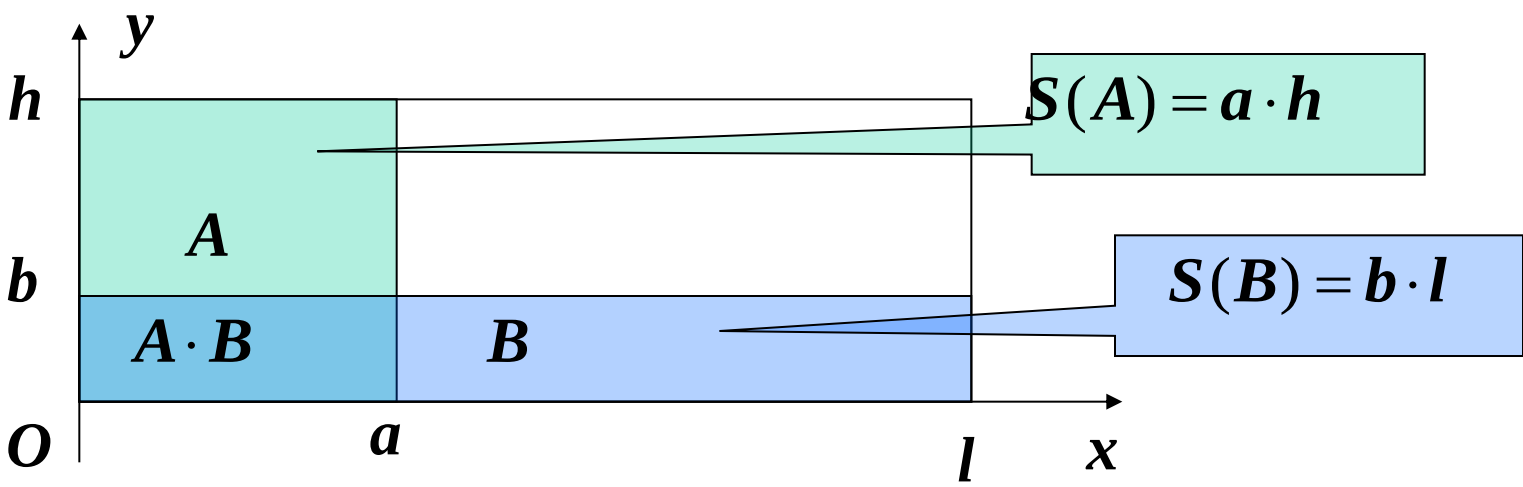
Пример 6

- Три джентльмена A,B,C вошли в лифт 4-х этажной гостиницы. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности событий:
- Все джентльмены выйдут на последнем этаже;
- Все джентльмены выйдут на одном этаже;
- Все джентльмены выйдут на разных этажах
- Только на последнем этаже никто из джентльменов не выйдет .

Геометрическое истолкование независимых событий

- Пусть $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le l, 0 \le y \le h\}$ – прямоугольник на плоскости. Рассмотрим события A, B вида

$$A = \{(x, y): 0 \le x \le a, 0 \le y \le h\}, B = \{(x, y): 0 \le x \le l, 0 \le y \le b\}.$$



Вычислим вероятности

- Имеем $\boldsymbol{S(\Omega) = l \cdot h}$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{a \cdot h}{l \cdot h}, \quad P(B) = \frac{l \cdot b}{l \cdot h}, \quad P(A \cdot B) = \frac{a \cdot b}{l \cdot h}.}$$

- Таким образом, выполняется условие

$$\boldsymbol{P(A) \cdot P(B) = \frac{a \cdot \cancel{h}}{l \cdot \cancel{h}} \frac{\cancel{l} \cdot b}{\cancel{l} \cdot h} = \frac{a \cdot b}{l \cdot h} = P(A \cdot B),}$$

- независимости событий. Отсюда

$$\boldsymbol{P(B|A) = P(B), \;\; P(A|B) = P(A).}$$

Формула полной вероятности

Полная группа событий

- Совокупность событий $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ **называется полной группой событий**, если
- 1) события $H_1, H_2, \cdots, H_n$ попарно несовместны, т.е. $H_i \cdot H_j = \varnothing, i \neq j.$
- 2) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega.$ Таким образом, в результате эксперимента обязательно происходит одно из событий $H_i, i = 1, \cdots n.$
- События $H_1, H_2, \cdots, H_n$ называются **гипотезами**.

Формула полной вероятности

- Если события $H_1, H_2, \cdots, H_n$ образуют **полную группу событий**, то для любого события A справедлива **формула полной вероятности**

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n).$$

Формула Байеса

- Предположим, что в результате испытания событие A **произошло**. Это позволяет пересмотреть вероятности гипотез $H_1, H_2, \cdots, H_n$. Справедлива формула

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)},$$

- которая называется **формулой Байеса или формулой апостериорных** вероятностей гипотез (в отличие от **априорных вероятностей** $P(H_i)$)

Пример 1

- По объекту произведено 2 выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5 , при втором –0,7. Вероятность разрушения объекта при одном попадании равна 0,4 , при двух попаданиях – 0,8. Найти вероятность разрушения объекта A при двух выстрелах.

Решение примера

- Решение. Обозначим A_1, A_2 попадания, соответственно, при первом и втором выстреле. Введём **гипотезы** H_1 -одно попадание при двух выстрелах, H_2 -два попадания, H_0 - ни одного. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_0)P(A|H_0)$$

Продолжение решения примера

- Событие H_1 произойдёт, если случится только одно попадание при первом или втором выстреле, т.е. $H_1 = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2$. Соответственно $H_2 = A_1 \cdot A_2$, $H_0 = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$. Считая события A_1, A_2 независимыми, получаем

$$P(H_1) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)) + (1 - P(A_1)) \cdot P(A_2) = 0,5 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,7 = 0,5$$

$$P(H_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35$$

$$P(H_0) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$$

- Из условия примера подставляем в формулу полной вероятности

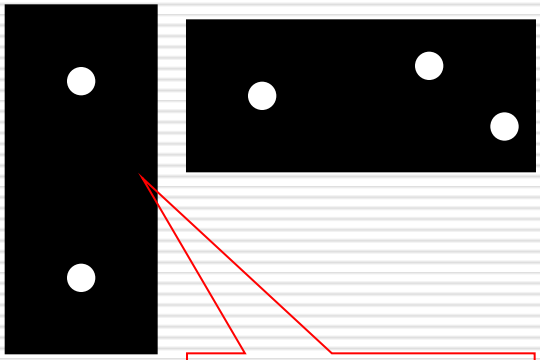
$$P(A|H_1) = 0,4 \quad P(A|H_2) = 0,8 \quad P(A|H_0) = 0$$

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,8 = 0,48.$$

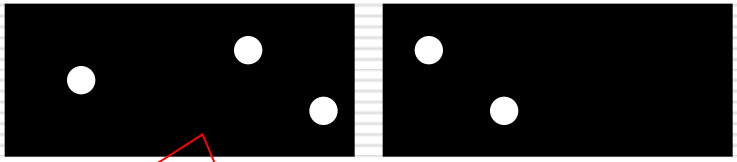
Пример 2

Наудачу извлекаются 2 кости домино из 28. Оказалось, что вторую кость можно приставить к первой. Какова вероятность, что первая кость дубль?

$$H_1 + H_2 = \Omega \quad H_1 H_2 = \varnothing$$



H_1 – *первая кость дубль*



H_2 – *первая кость не дубль*