

Математический анализ

(греч. ἀνάλυσις -разрешать,
разлагать)

Лекция 1. Предел
последовательности

Предварительные сведения о действительных (вещественных) числах

- Рациональное число $Q = \frac{m}{n}$, m, n -целые числа.
- Действительное число –конечная или бесконечная десятичная дробь
$$\pm a_0, a_1 \dots$$
- Рациональное число – **конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь.**
- Иррациональное число - **бесконечная непериодическая десятичная дробь.**

Некоторые множества действительных чисел

- Множество всех действительных чисел $R = (-\infty, \infty)$ отождествляется с точками на прямой.
Пусть $a \in R, b \in R$.
- Отрезок $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$.
- Интервал $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$.
- Окрестность $U_\varepsilon(c)$ точки c - интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.
- Полуинтервал $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$.

Неравенства для абсолютных величин

- 1. Неравенство $|a| < \varepsilon$ эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < a < \varepsilon$.
- 2. $|a + b| \leq |a| + |b|$
- 3. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Последовательность

- Если каждому натуральному числу $n = 1, 2, \dots$ поставлено в соответствие действительное число x_n , то говорят, что задана последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которая кратко обозначается $\{x_n\}$.

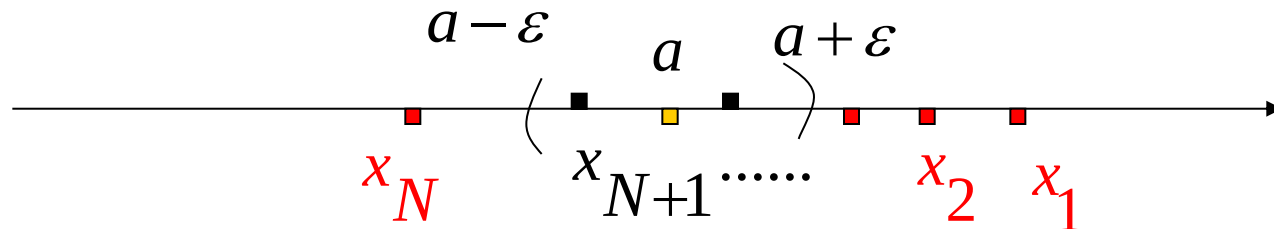
Предел последовательности

- Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,
если для **любого числа** $\varepsilon > 0$ **найдётся**
натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что
$$|x_n - a| < \varepsilon$$

для всех $n > N$.
- Будем писать также, что $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Геометрическое определение предела последовательности

- Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для **любой окрестности** $U_\varepsilon(a)$ найдётся **натуральное число** $N = N(\varepsilon)$ **такое, что все** члены последовательности x_n , у которых $n > N$ попадают в окрестность $U_\varepsilon(a)$. **Т.е. вне любой окрестности** точки a может содержаться только **конечное** число членов последовательности $\{x_n\}$.



Сходимость последовательности

- Будем говорить также, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится**, если существует предел этой последовательности.
- В противном случае последовательность называется расходящейся.

Пример

- Определить, существует ли предел последовательности

$$x_n = (-1)^n ?$$

Свойства пределов

- **Теорема 1.** Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Ограниченная последовательность $\{x_n\} : |x_n| \leq M$

- **Теорема 2.** Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

- **Теорема 3.** Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ и $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

- **Теорема 4.** Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow a$ и $x_n \leq z_n \leq y_n$, то предел z_n существует и равен a .

Свойства пределов

- **Теорема 5.** Если $x_n \rightarrow a$, и $a \neq 0$, то последовательность ограничена снизу положительным числом $|x_n| \geq d > 0, n > n_0$ и сохраняет знак начиная с некоторого номера.

Арифметические свойства пределов

- Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, то справедливы утверждения

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

- Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то x_n называется **бесконечно малой** величиной.
- Если для любого **сколь угодно большого** числа $M > 0$ существует натуральное $N = N(M)$ такое, что при $n > N$ выполняется $|x_n| > M$, то переменная x_n называется **бесконечно большой величиной**. При этом пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин

- 1. Если x_n **ограничена**, а y_n - **бесконечно большая**, то $\frac{x_n}{y_n}$ - бесконечно малая.
$$\left(\frac{c}{\infty} = 0 \right)$$
- 2. Если $|x_n|$ **ограничена снизу** положительным числом: $|x_n| \geq d > 0$, а y_n бесконечно малая, то $\frac{x_n}{y_n}$ - бесконечно большая.
$$\left(\frac{c}{0} = \infty, c \neq 0 \right)$$
- 3. Произведение бесконечно малой на ограниченную является бесконечно малой.

Предел монотонной последовательности

- Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый следующий член последовательности не меньше предыдущего, т.е.

$$x_n \leq x_{n+1}$$

- **Теорема 5.!** Если **возрастающая** последовательность **ограничена сверху**, то она имеет предел.

Бином Ньютона (1643-1727)

- Справедливо равенство

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, \quad 0! = 1.$$

- Коэффициенты C_n^k называются **биномиальными**.

Число e

- **Теорема.** Последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится и

её пределом является иррациональное число, которое обозначается

$$e \approx 2,7... \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

- Обозначение e введено **Л.Эйлером** (1707-1783).
- **Следствие.** Если $x_n \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

Примеры

- 1. Найти предел последовательность $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n}{2}$.
 - Определить номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что погрешность равенства $x_n \approx a$ при $n > N(\varepsilon)$ будет меньше $\varepsilon = 0.01$
 - Вычислить пределы
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{7-5n}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos n^2 + n^2}{7-5n^2}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$