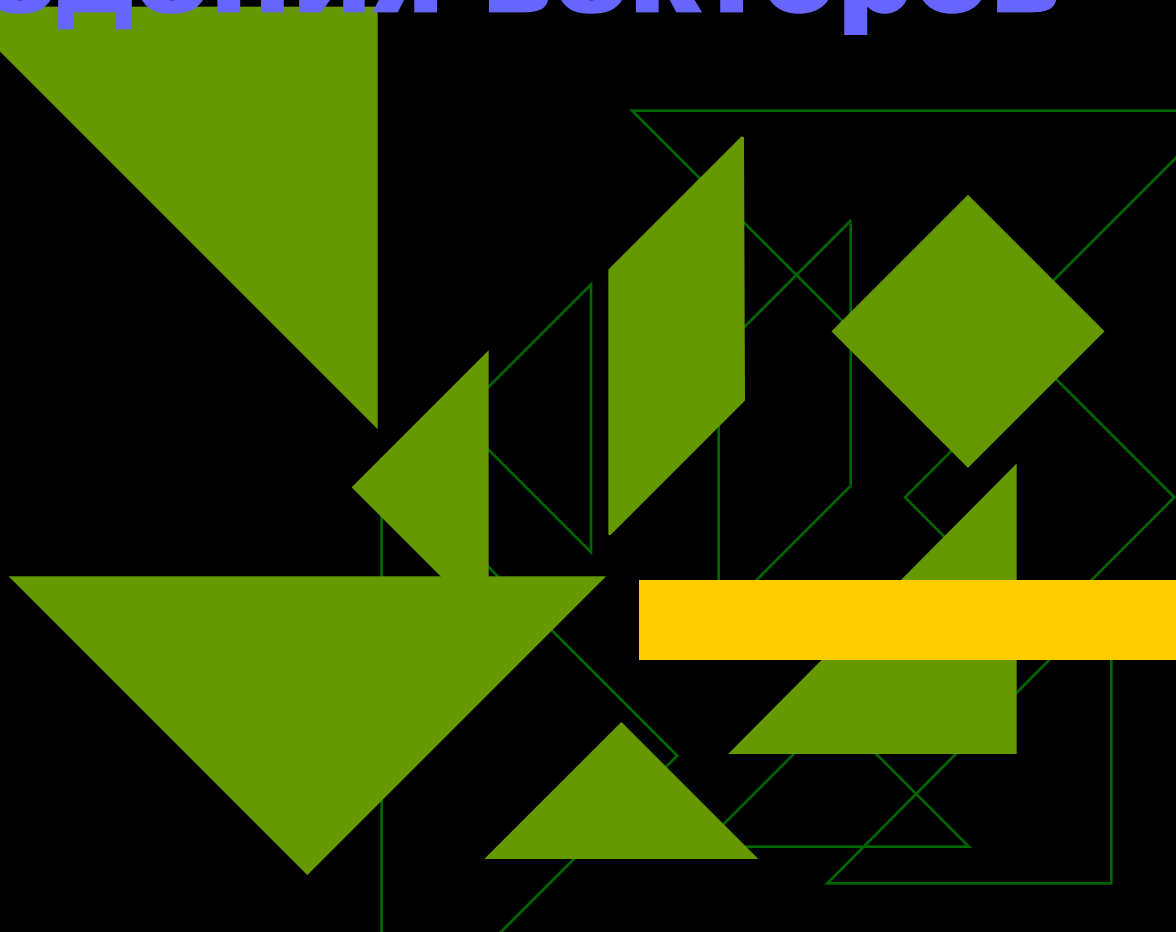
Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов



Скалярное произведение

- Скалярным произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$ называется ***число***, которое вычисляется по формуле

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a}$
2. $\vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$
3. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$
4. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$
5. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$
6. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$

Вычисление скалярного произведение

- ***Теорема.*** Пусть

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

- Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

- Следствие. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$

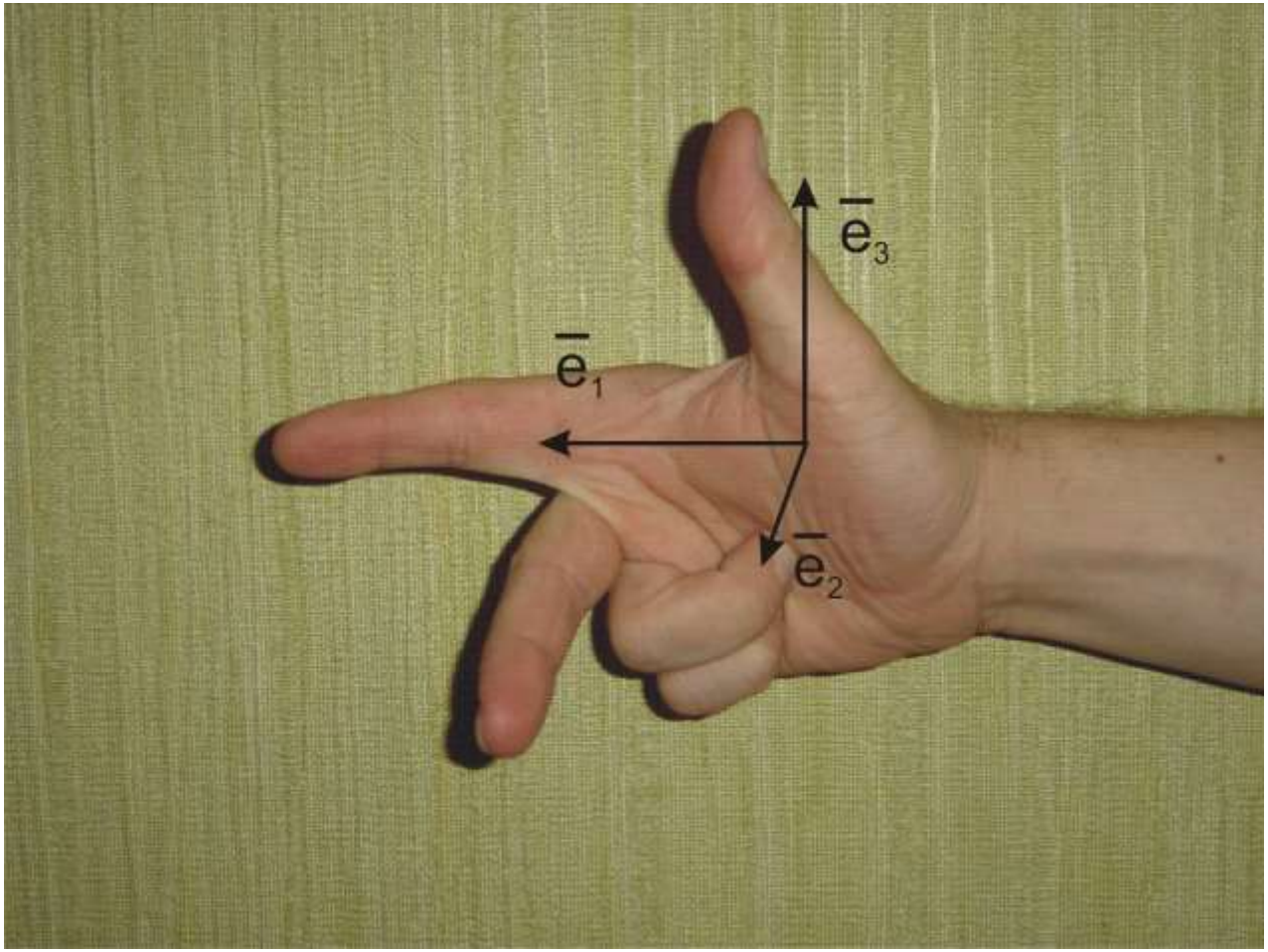
- Скалярное произведение обозначается также:

$$(\vec{a}, \vec{b})$$

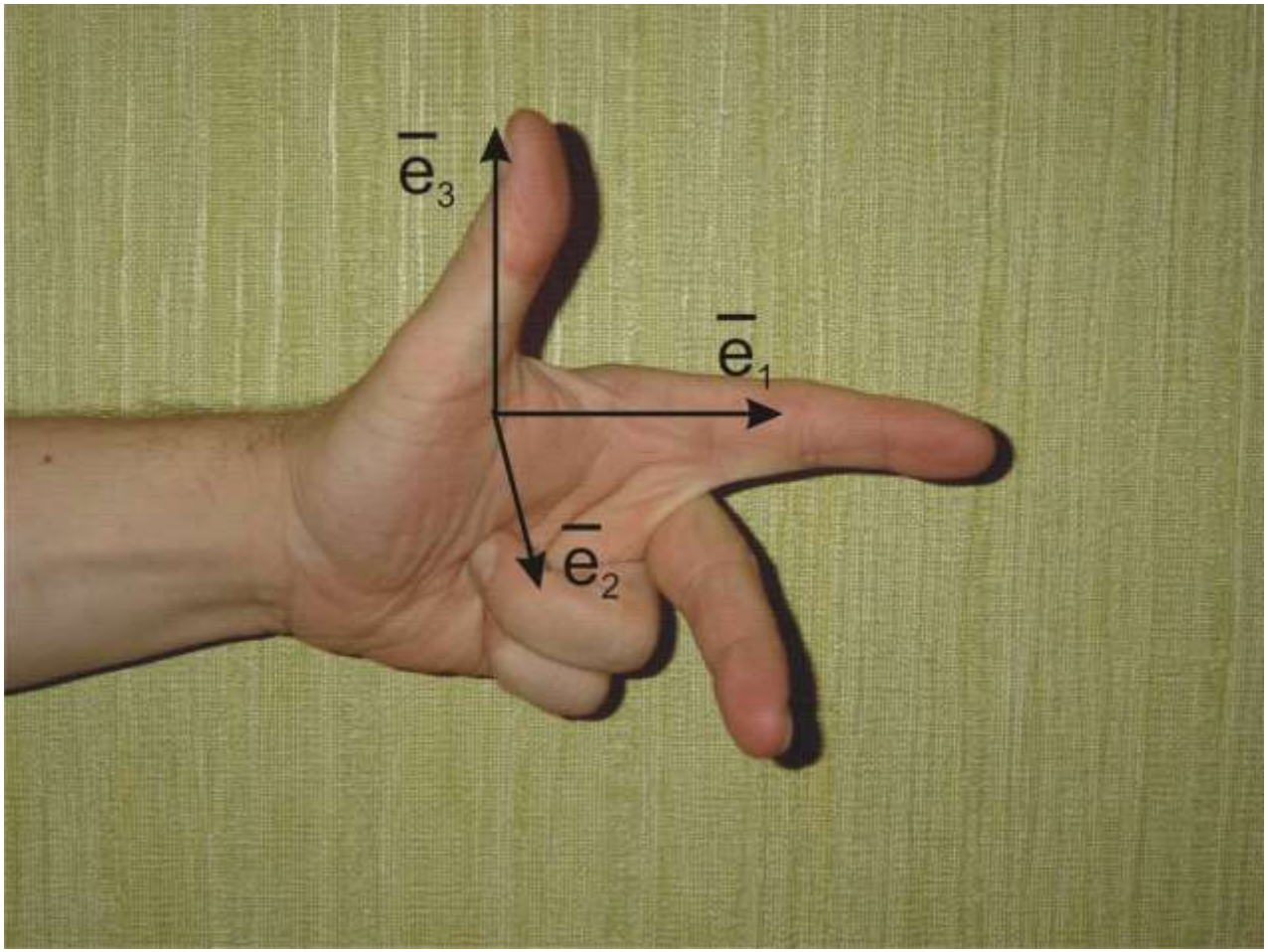
Ориентация пространства

- Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется ***правой тройкой,*** если смотреть с конца вектора $\vec{a}$ и вращать вектор $\vec{b}$ к вектору $\vec{c}$, то вращение будет **происходить против часовой стрелки.**
- В противном случае тройка называется левой.

Правая тройка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$



Левая тройка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$



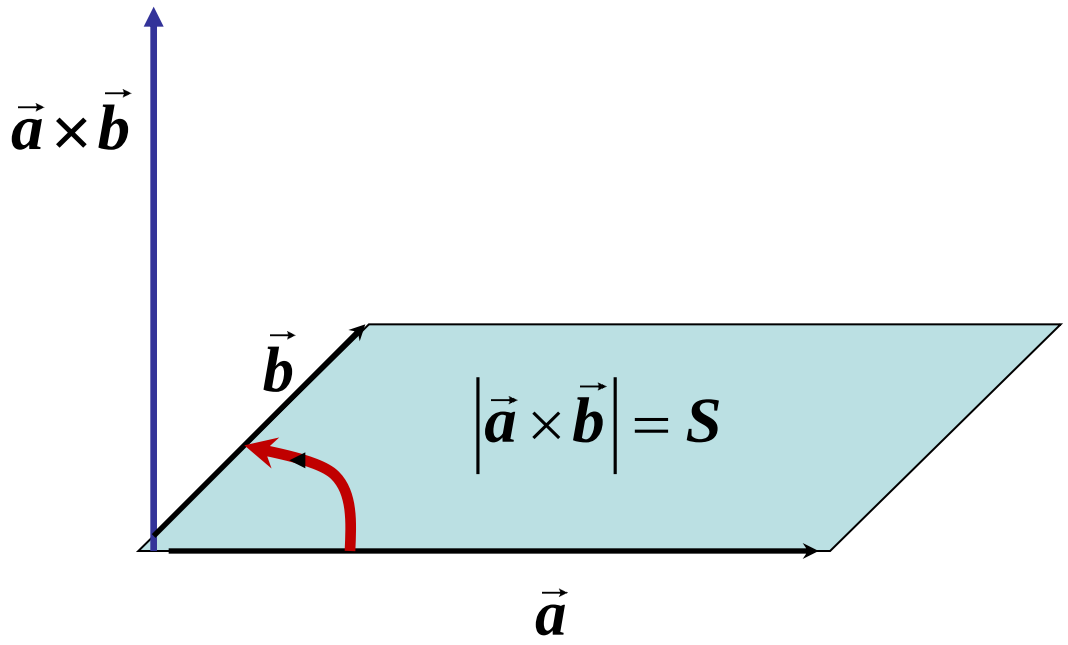
Векторное произведение

- **Векторным произведением** векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется вектор перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длина которого равна $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi$.

- **Направление** вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ выбирается так, что векторы $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$ образуют **правую тройку**.
- Векторное произведение обозначается также:

$$[\vec{a}, \vec{b}]$$

Построение векторного проиведения



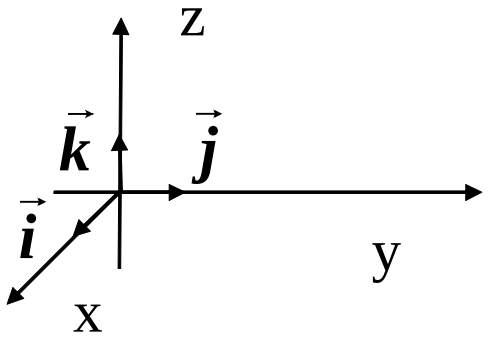
Свойства векторного произведения

- 1. $\vec{a}\times\vec{b}=-[\vec{b}\times\vec{a}]$
- 2 .Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличны от нулевого вектора, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.
- 3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
- 4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda[\vec{a}\times\vec{b}]$

Векторное произведение ортов

- Пусть орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют ***правую тройку***. Из определения и свойств получаем

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$
$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$



Вычисление векторного произведения

Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют **правую тройку**, то справедлива формула

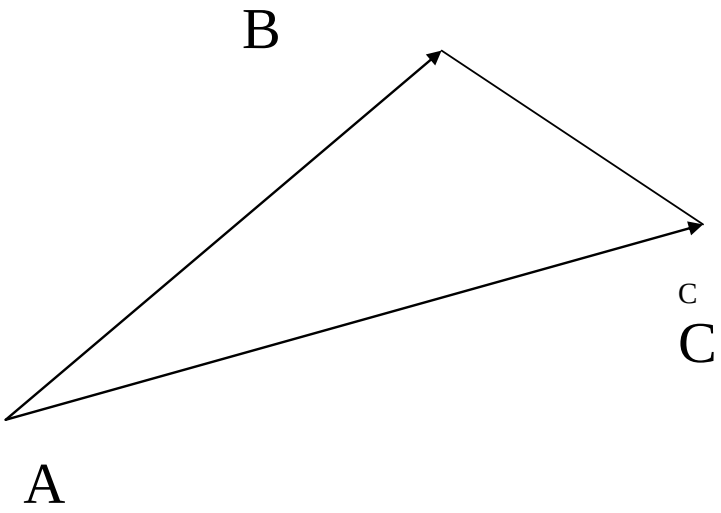
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где *"**обобщённый определитель**"* третьего порядка понимается по правилу ***разложения по первой строке***.

Пример. Вычисление площади треугольника.

- Вычислить площадь треугольника

$$\Delta ABC,\ \ A(1;0;0), B(2;1;1), C(1,0,1).$$



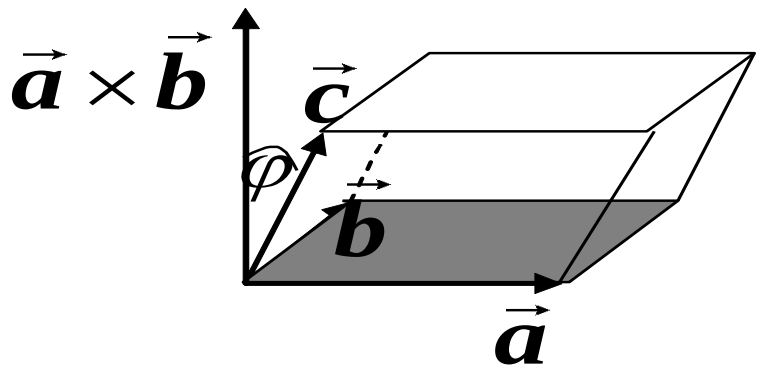
Смешанное (векторно-скалярное) произведение

- ***Смешанным*** произведением $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ векторов называется число равное скалярному произведению векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=[\vec{a}\times\vec{b}]\,\vec{c}.$$

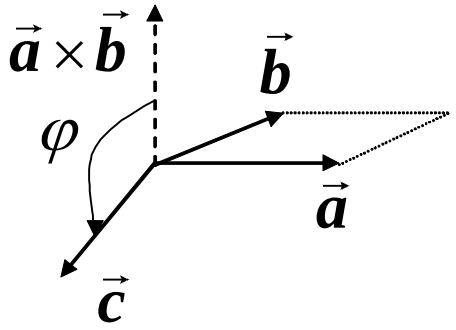
Геометрическое истолкование смешанного произведения

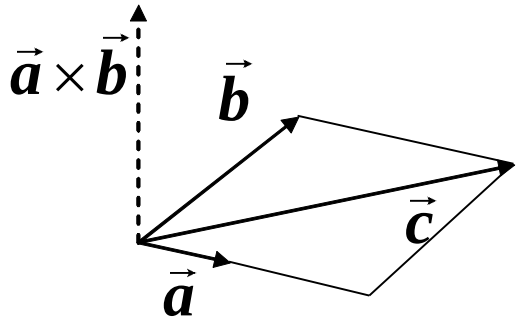
- **Теорема**. Смешанное произведение трёх **некомпланарных** векторов по **абсолютной** величине равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах.



Знак смешанного произведения

- Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют ***правую тройку***, то смешанное произведение ***положительно***, если – левую, то отрицательно. Если ***векторы компланарны, то смешанное произведение равно нулю***.





Вычисление смешанного произведения

- **Теорема.** Если

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},\quad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют **правую тройку**, то справедлива формула

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Следствия

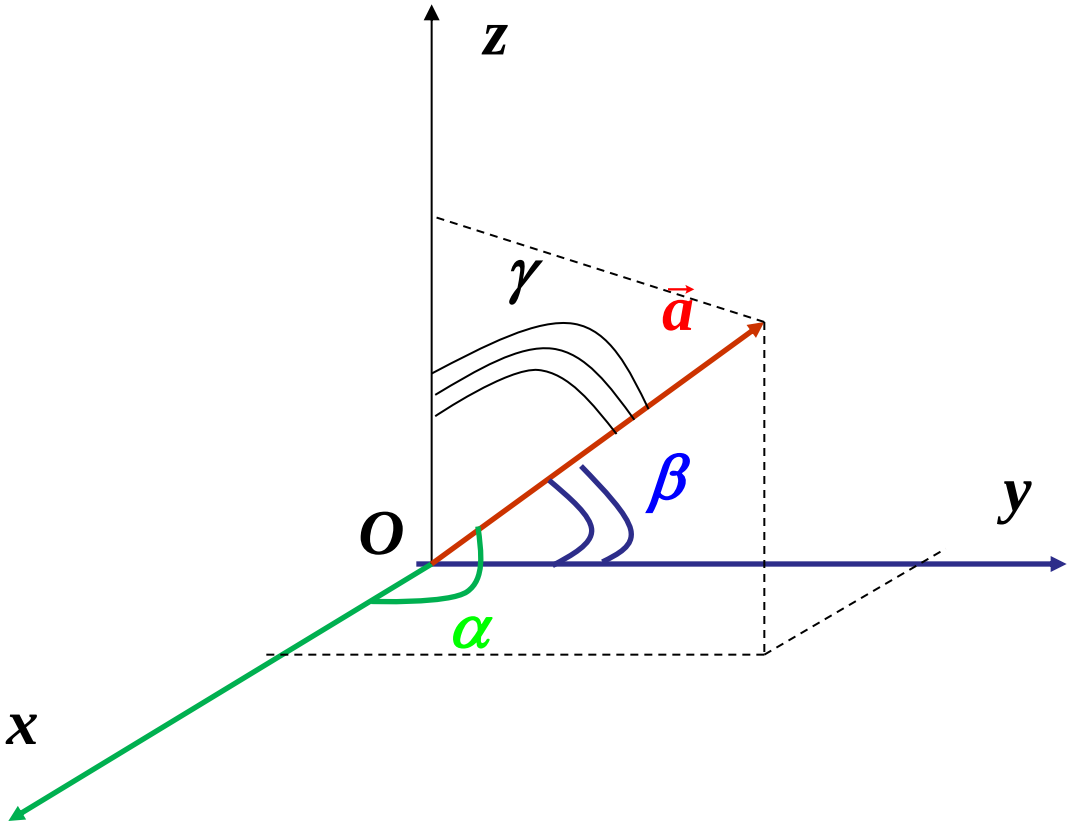
- Справедливы равенства (Iдоказать самостоятельно):

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=[\vec{c}\times\vec{a}]\cdot\vec{b}=\vec{c}\vec{a}\,\vec{b}=[\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$

- Смешанное произведение линейно относительно любого сомножителя. Например, для первого сомножителя справедливы равенства

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}_2\,\vec{b}\,\vec{c},$$

$$(\lambda\vec{a})\,\vec{b}\,\vec{c}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}).$$


z
γ
$\vec{a}$
β
O
y
α
x

Направляющие косинусы

- Обозначим через α, β, γ углы, которые составляет вектор $\vec{a}$ с **осями координат**. Косинусы этих углов

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

называются **направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.**

В этом случае координаты вектора могут быть вычислены по формулам

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta,\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Справедливо равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$