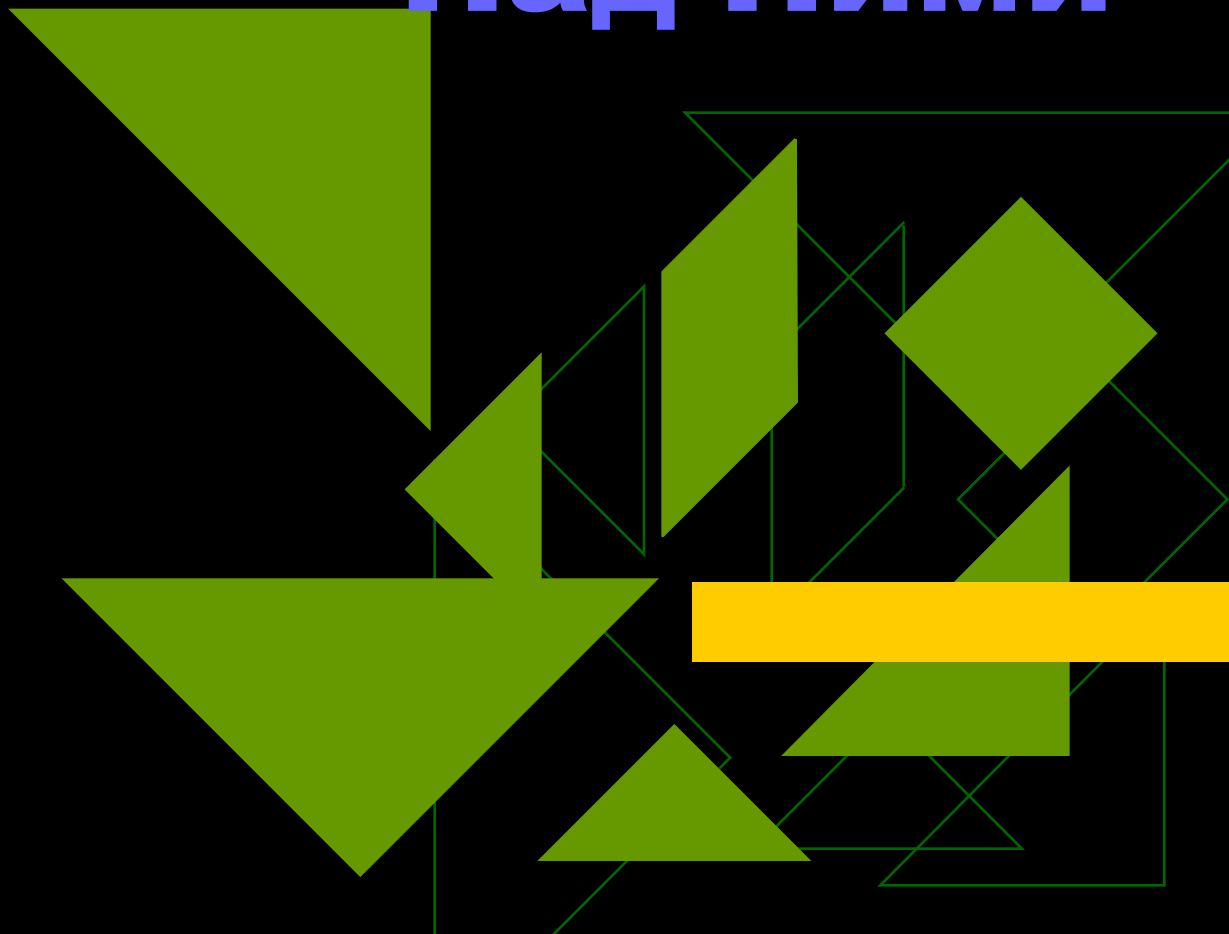
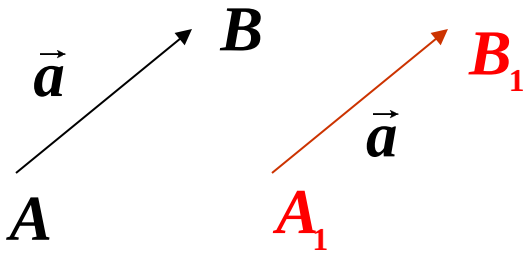
Лекция 4

Геометрические Векторы И Операции Над Ними



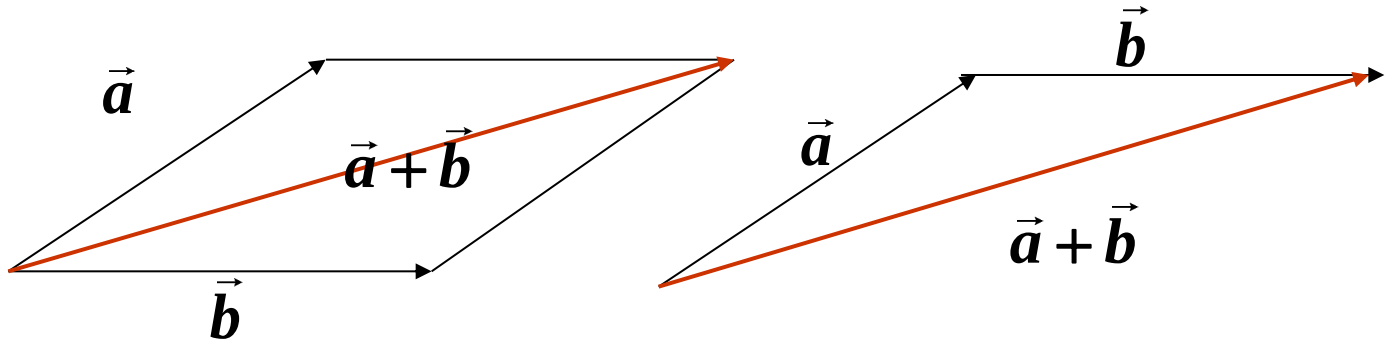
Геометрические векторы

- **Геометрический** вектор $\overrightarrow{AB}$ – это направленный отрезок с начальной точкой A и конечной точкой B.
- ***Длиной*** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ***вектора*** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB
- Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ считаются ***равным***, если они параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины, т.е такие векторы определяют один и тот же вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$



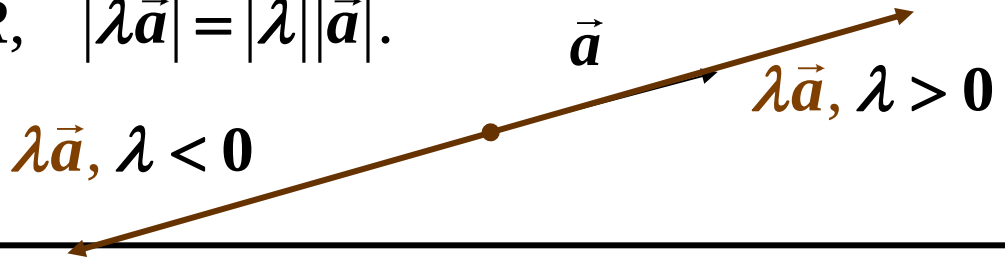
Линейные операции над векторами

- Сложение векторов $\vec{a}+\vec{b}$ определяется по правилам параллелограмма и треугольника:



- Умножение вектора на действительное число

$$\lambda\vec{a},\ \lambda\in R,\quad |\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|.$$



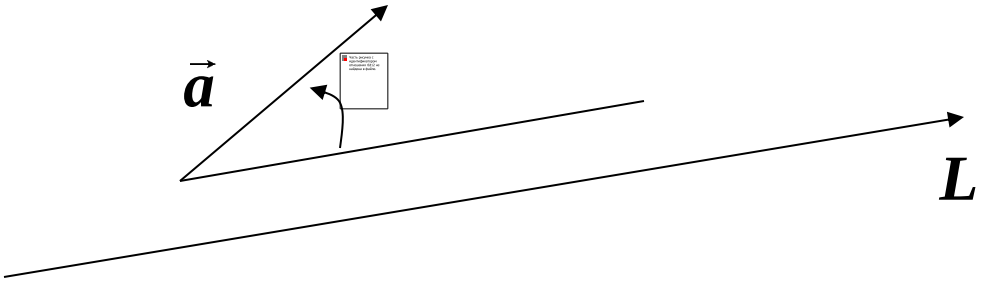
Трёхмерное векторное пространство

- Множество геометрических векторов в пространстве, с определёнными на нём операциями сложения и умножения на число, называется **трёхмерным векторным пространством.**
- **Нулевой** вектор $\vec{0}$: $\left|\vec{0}\right| = 0.$

- **Единичный** вектор $\vec{e}$: $\left|\vec{e}\right| = 1.$

Проекция вектора на ось.

- Проекцией вектора $\vec{a}$ на направленную прямую L (ось L) $np_L\vec{a}$ называется $np_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$



- Свойства проекций.

$$1.\ np_L\lambda\vec{a} = \lambda np_L\vec{a} \quad 2.\ np_L(\vec{a}+\vec{b}) = np_L\vec{a} + np_L\vec{b}.$$

- Аналогично определяется проекция вектора на вектор.

Декартова (прямоугольная) система координат в пространстве

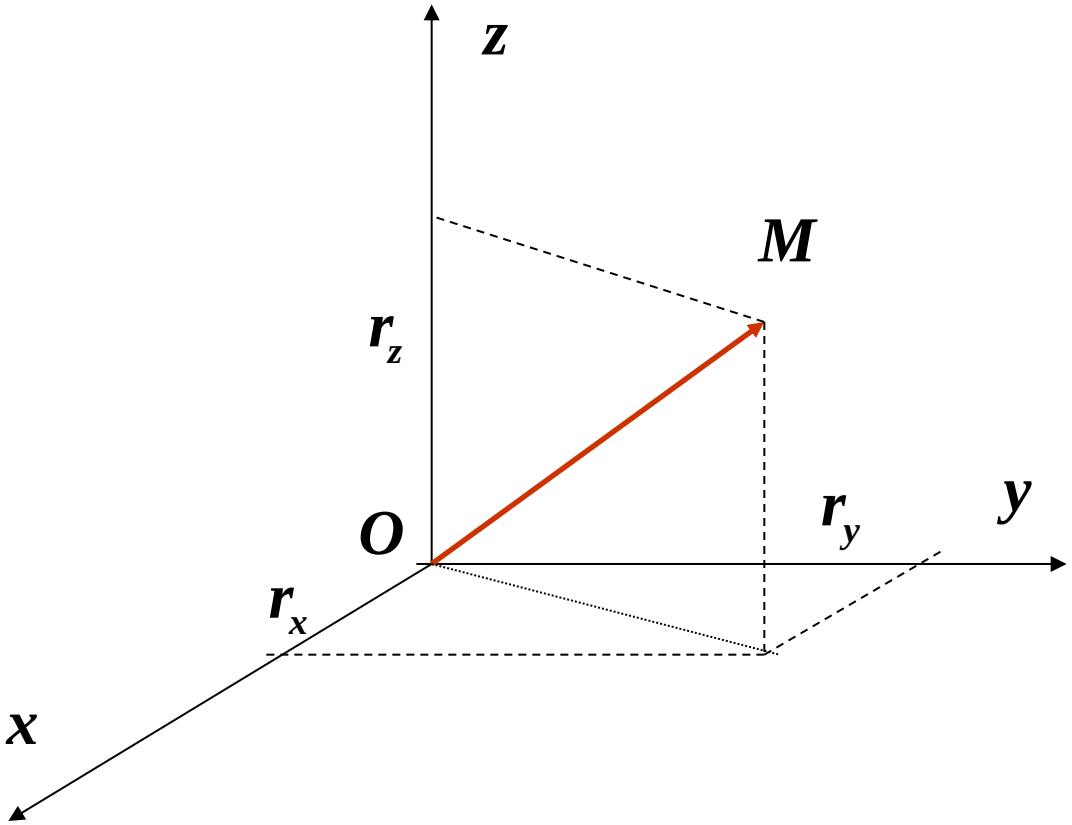
- Три **взаимно перпендикулярные** направленные прямые (координатные оси), проходящие через точку O , называются **декартовой (прямоугольной)** системой координат..
- Проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат x, y, z называются ***координатами вектора*** и записываются равенством

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Координаты точки.

- Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором. Координатами точки $M(x, y, z)$ называются координаты радиус вектора

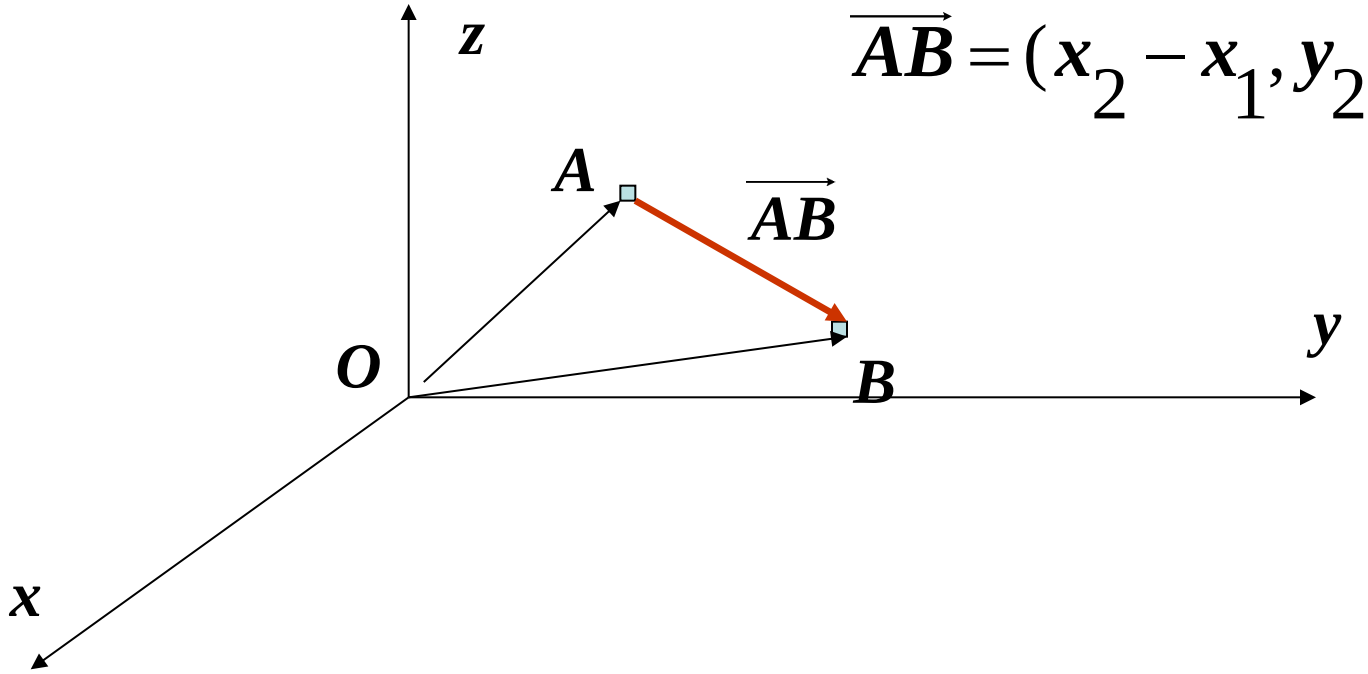
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$


z
M
r_z
O
r_y
y
r_x
x

Координаты вектора и координаты начала и конца вектора

- Пусть заданы координаты точек начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$.
- Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Изоморфизм пространств геометрических векторов и арифметических $\boldsymbol{R^3}$.

- Равенство $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространством геометрических векторов в пространством и арифметических векторов R^3 .
- В силу свойства проекций операциям сложения векторов и умножения на число **геометрических** векторов соответствуют операции сложения и умножения **арифметических** векторов, т.е.
$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.
- Такое соответствие называется **изоморфизмом** пространств.

Орты. Разложение вектора по ортам.

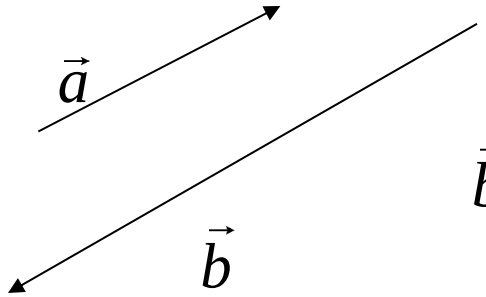
- **Единичные** векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ направленные, соответственно, по координатным осям Ox, Oy, Oz называются **ортами** координатных осей.
- По теореме о разложении по базису для арифметических векторов справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- которому соответствует следующее равенство для геометрических векторов: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$

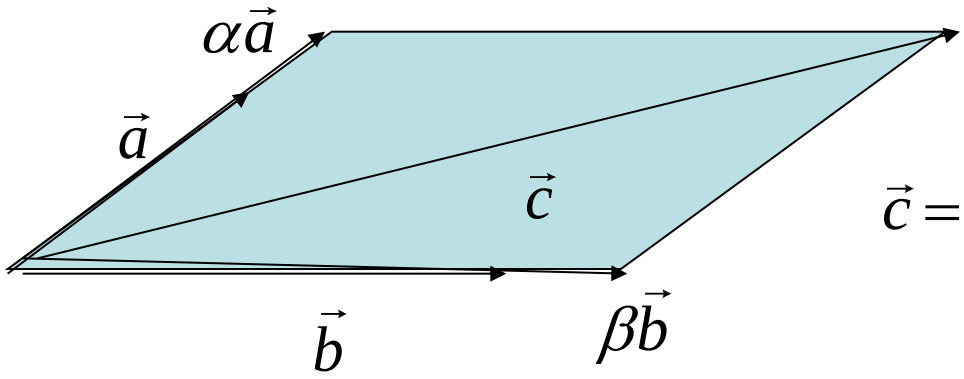
Геометрическое истолкование линейной зависимости.

- Коллинеарные векторы.



$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, |\lambda| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

- Компланарные векторы

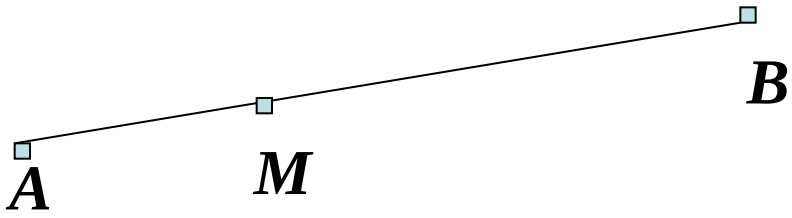


$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

Деление отрезка в заданном отношении

- Пусть заданы координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$. которая делит отрезок AB в заданном отношении

$$\lambda = \frac{AM}{MB}.$$



- Докажем формулы

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$