Пространство арифметических векторов

Лекции 2-3

Пространство R^n *арифметических* векторов

- Рассмотрим множество ***упорядоченных наборов*** из n чисел $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$. Каждый такой набор $\vec{x}$ будем называть ***арифметическим вектором***, а числа x_j ***(компонентами) координатами вектора.***
- Введём операции ***сложения и умножения на число*** арифметических векторов ***покоординатно:***

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots x_n + y_n)$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots \lambda x_n),$$

где λ ***- произвольное действительное число.***

- Такое множество ***называется пространством арифметических векторов*** R^n

Линейная зависимость

- Выражение вида $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{x}_k$ называется **линейной комбинацией арифметических векторов** $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_k$
- Система арифметических векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_k \right\}$ называется **линейно зависимой,** если ***хотя бы один*** из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов.
- В противном случае система векторов называется **линейно независимой.**

Критерий линейной зависимости

- **Теорема.** Для того чтобы система векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_k \right\}$$

была ***линейно зависима***, необходимо и достаточно, чтобы векторное уравнение

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_1 \vec{x}_k = \mathbf{0}$$

имела ***нетривиальное решение***.

Базис

Пусть L множество векторов из пространства R^n. Упорядоченная система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_l\}$ называется базисом в L, если

- 1. Система линейно независима.
- 2. Всякий вектор $\vec{x}$ из L можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_l \vec{x}_l.$$

- Такое представление вектора $\vec{x}$ называется **разложением вектора** $\vec{x}$ по базису $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_l\}$

Естественный (канонический) базис в $\boldsymbol{R^n}$

- **Теорема** . Система векторов

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0),$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

образует базис в $\boldsymbol{R}^n$ причём для произвольного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ справедливо разложение вида

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Ранг матрицы. Операции над матрицами

Определение матрицы. Ранг матрицы

- Матрицей размера $m \times n$ называется таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- ***Рангом матрицы*** называется ***наивысший порядок*** минора матрицы **отличного от нуля**.
- Обозначается ранг матрицы A через $rank(A)$, $r(A)$
- Строки и столбцы матрицы можно рассматривать как арифметические векторы .

Теорема о базисном миноре.

- ***Базисным минором матрицы*** $\boldsymbol{A}$ **ранга** $\boldsymbol{r = r(A)}$ называется всякий минор порядка $\boldsymbol{r = r(A)}$ отличный от нуля.
- ***Теорема.*** Система строк (столбцов) , *содержащих базисный минор,* ***образует базис*** в системе *всех строк* (столбцов) матрицы.

Следствия теоремы о базисных минорах

- ***Следствие 1 (второе определение ранга матрицы).*** Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов).

- ***Следствие 2 (критерий равенства нулю определителя).***

Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда строки (столбцы) матрицы линейно зависимы.

Метод окаймляющих миноров

- ***Окаймляющими минорами*** называются миноры, содержащие данный минор
- ***Теорема .*** Если некоторый минор порядка m матрицы отличен от нуля, а **все** окаймляющие миноры порядка $m+1$ равны нулю, то ранг матрицы равен m.

Такое вычисление ранга матрицы называется ***методом окаймляющих миноров***

Пример 1

- Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Критерий линейной независимости векторов

- **Теорема.** Для того чтобы система векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_l \right\}$$

из $R^n, (l \leq n)$ была **линейно независима**, необходимо и достаточно, чтобы ***ранг матрицы, составленной из координат векторов, был равен числу векторов системы.***

- **Следствие**. Для того, чтобы система из n векторов в пространстве $\boldsymbol{R^n}$ была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат системы, был отличен от нуля.

Свойства базисных векторов

- ***Свойство 1***. Если базис в $L \subset R^n$ состоит из m векторов, то любые $m+1$ вектора из L линейно зависимы.
- Вывод: Базисом в L является максимальная линейно независимая системой векторов в L.
- ***Свойство 2*** . Любые две базисные системы в L имеют одинаковое число векторов.

Метод элементарных преобразований

- **Замечание.** Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.
- Матрица с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду. Затем определяется ранг ступенчатой матрицы, который совпадает с рангом исходной матрицы.

Примеры

- Исследовать на линейную зависимость систему векторов. Найти линейно независимые векторы в каждой системе.
- Пример 1.

$$\boldsymbol{a} = (1; -1; 2; 4),\ \mathbf{b} = (-2; 2; -4; -4).$$

- Пример 2.

$$\boldsymbol{a} = (1; -2; 0; 0),\ \mathbf{b} = (-1; 2; 0; 0),\ \mathbf{c} = (4; -8; 1; 0).$$

Критерий существования нетривиального решения однородной системы уравнений.

- **Теорема.** Для того чтобы однородная система линейных уравнений с n неизвестными имела ***нетривиальное решение***, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше n.

- **Следствие**. Для того чтобы однородная система линейных уравнений из n уравнений с n неизвестными имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю.

Фундаментальная система решений

Пусть однородная система уравнений имеет нетривиальное решение ($r(A)<n$) .

- Максимальный набор линейно независимых решений называется ***фундаментальной системой решений.***
- ***Пример.***

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=0 \\ 4x_1+x_3-7x_4=0 \\ 2x_2-3x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

Решение примера

- Методом Гаусса получаем

$$x_1 = -\frac{7}{2}x_2 + 5x_3, \quad x_4 = -2x_2 + 3x_3.$$

Пусть $x_2 = 1, x_3 = 0$, тогда $\bar{E}_1 = (-7/2, 1, 0, -2).$

Если $x_2 = 0, x_3 = 1$, то $\bar{E}_2 = (5, 0, 1, 3).$

Общее решение : $\bar{x} = c_1\bar{E}_1 + c_2\bar{E}_2, \quad c_1 \in R, c_2 \in R$

Теорема Кронекера-Капелли

- **Кро́некер** Леопольд(1823- 1891) — немецкий математик
- **Капелли** Альфредо (1855—1910) — итальянский математик
- Система линейных уравнений называется ***совместной,*** если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется ***несовместной.***
- ***Теорема.*** Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ***ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.***

Примеры

- Исследовать совместность системы

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Операции над матрицами

- Сложение матриц $A+B$
- Умножение матрицы на число λA
- Умножение матриц AB
- Единичная матрица

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

- Пусть A - квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если справедливы равенства
$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

- Присоединённая матрица $\hat{A}$ определяется как **транспонированная** к матрице , составленной из алгебраических дополнений матрицы A, т.е.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Теорема об обратной матрице.

- Квадратная матрица A называется ***невырожденной*** матрицей, если определитель этой матрицы $\Delta(A)$ отличен от нуля.
- Теорема. Если матрица A является ***невырожденной*** матрицей, то существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)}\hat{A}.$$

Матричная запись линейных систем

- Запишем систему линейных уравнений в матричной форме
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$
- или кратко $AX = B,$

где A матрица системы X - вектор-столбец неизвестны, а B - вектор-столбец свободных членов

Решение квадратных систем линейных уравнений методом обратных матриц

- Если матрица A - невырожденная матрица, то существует обратная матрица A^{-1} .
- Умножим слева матичное уравнение

$$AX = B,$$

на обратную матрицу

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

так как $A^{-1}A = E$, то получаем решение системы

$$X = A^{-1}B.$$