Разложение рациональных дробей на простейшие

Лекция 2

- Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$ – многочлен степени n с комплексными в общем случае коэффициентами.
- ***Теорема 1***. Всякий многочлен степени n можно представить в виде

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m},$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

- где z_i – корень кратности k_i .

Многочлены с действительными коэффициентами

- Рассмотрим многочлен n -ой степени $P_n(z)$ с действительными коэффициентами в комплексной плоскости (*действительный многочлен).*
- ***Лемма.*** $\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z}).$
- Действительно.

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} =$$

$$= a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_0 = P_n(\overline{z}).$$

Следствие

- Если $z_0 = a + bi$ - корень многочлена с ***действительными*** коэффициентами, то сопряжённое число $\bar{z}_0 = a - bi$ также является корнем той же кратности.
- Действительно. $P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0.$

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители

- ***Теорема 2***. Всякий действительный многочлен степени n можно представить в виде

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{\lambda_1} \cdots (x - x_r)^{\lambda_r} \times$$

$$\times(x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s} \qquad (1)$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_r + 2(\mu_1 + \cdots + \mu_s) = n,$$

- где $x_1, \ldots x_r$ - различные действительные корни многочлена $P_n(x)$, а $x^2 + p_i x + q_i,\ i = 1, \ldots, s$
- действительные квадратные трёхчлены , имеющие комплексные корни.

Доказательство

- Теорема 2 следует непосредственно из теоремы 1 и следствия, так как произведение множителей вида

$$(z - z_0)(z - \overline{z}_0),$$

- соответствующих сопряженным корням $z_0, \overline{z}_0$ преобразуется к виду

$$(z - a - bi)(z - a + bi) = (z - a)^2 + b^2 = z^2 + pz + q$$

Пример

- Разложить на множители многочлены

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{P(x) = x^3 + 1}.$$

- Решение. По формуле сокращённого умножения имеем

$$\boldsymbol{P(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)}$$

- Квадратный трёхчлен $\boldsymbol{(x^2 - x + 1)}$ имеет комплексные корни, так как дискриминант

$$\boldsymbol{D = 1 - 4 = -3 < 0}.$$

Пример

- 2. $Q(x) = x^4 + 1.$
- *Решение*. Многочлен $z^4 + 1$ имеет корни

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}},$$

$$z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Продолжение решения

- По теореме1

$$z^4+1=\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\times$$

$$\times\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\left[\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1).$$

- Итак,

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Рациональные дроби

- ***Рациональной дробью*** называется отношение многочленов
$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}.$$

- Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе $(m < n)$. В противном случае $(m \geq n)$ дробь называется ***неправильной***.

Замечание.

- Если дробь неправильная, то можно выделить целую часть.
- Пример.

$$\frac{x^3+4}{x^2-1}$$

Теорема о разложении рациональной дроби на элементарные дроби

- Пусть $R(x)$ - ***правильная*** рациональная дробь, знаменатель которой разложен по формуле (1) теоремы 2, причём $a_n = 1$. Справедливо и притом единственное разложение дроби вида

$$R(x) = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{\lambda_1}} + \frac{A_{21}}{(x-x_1)^{\lambda_1 - 1}} + \cdots \frac{A_{\lambda_1 1}}{x - x_1} + \cdots$$

$$+ \frac{A_{1r}}{(x-x_r)^{\lambda_r}} + \frac{A_{2r}}{(x-x_r)^{\lambda_r - 1}} + \cdots \frac{A_{\lambda_r r}}{x - x_r} +$$

$$+ \frac{M_{11}x + N_{11}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1}} + \cdots + \frac{M_{\mu_1 1}x + N_{\mu_1 1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \cdots$$

Комментарии

- Коэффициенты разложения A_{ij}, M_{lk}, N_{lk} называются ***неопределёнными коэффициентами*** и вычисляются однозначно после приведения дроби к общему знаменателю.
- Дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\lambda}}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}, \ p^2-4q<0$$

- называются ***элементарными дробями*** 1-го и 2-го типа, соответственно.

Примеры

- 1. $$\frac{x-2}{(x^2-1)(x+2)}$$

- 2. $$\frac{x+2}{x(x^2+2)}$$

Интегрирование элементарных дробей. "Рационализация" интегралов

Интегрирование элементарных дробей первого типа $\dfrac{A}{(x-a)^k}$

- Интегрирование элементарных дробей первого типа не вызывает проблем:

$$k=1,\quad \int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$$

$$k\neq 1,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Интегрирование элементарных дробей второго типа $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$

- Для вычисления интегралов

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q<0.$$

- надо, прежде всего, выделить полный квадрат в знаменателе и, выполнив замену, привести интеграл к виду

$$\int \frac{At+B}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

Интегрирование элементарных дробей второго типа

- Интегралы вида

$$\int \frac{At+B}{t^2+a^2}dt.$$

- Рекуррентные формулы для интегралов вида

$$\int \frac{At+B}{(t^2+a^2)^k}dt, \quad k=2,3,\ldots$$

Интегрирование некоторых иррациональностей. Рационализация интегралов

- Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$$

- где $r_1, r_2, \ldots, r_n -$ рациональные числа.
- Если m - общий знаменатель этих чисел, то замена переменной $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- приводит выражение под интегралом к рациональной дроби -*рационализация*.

Примеры

- 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$

- 2. $\int \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx$

Интегрирование некоторых квадратичных иррациональностей

- Интегралы вида $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ аналогично элементарным дробям второго типа вычисляются выделением полного квадрата и последующей заменой переменных.
- Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

  вычисляются **"обратной"** подстановкой $t = \frac{1}{x-\beta}$.

Примеры

- 1. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$

- 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+4}}$

Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка.

- Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx.$
- Замена переменной

$$t = tg\frac{x}{2}, \quad (\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}).$$

- ***называется универсальной тригонометрической подстановкой.*** Такая замена сводит подынтегральную функцию к рациональной дроби.

Пример

- 1. $$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

Подстановка $t = tgx$.

- Интегралы вида $\int R(tgx)dx$ могут быть рационализированы подстановкой $t = tgx$.
- Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$,
- где $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ также вычисляются подстановкой $t = tgx$ или $t = ctgx$.

$$t = tgx, (\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2})$$

Примеры

- 1. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$

- 2. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx.$

- а) Если m или n - целое положительное **нечётное** число, то производится "расщепление" нечётной степени. Например, $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$
- Если m и n *целые положительные* ***чётные*** числа, то используются формулы понижения порядка

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ и т.п.

- Интегралы такого вида вычисляются путём преобразования произведений в сумму с помощью тригонометрических формул:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Тригонометрические подстановки

- Интегралы от квадратичных иррациональностей

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx,\ \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx,\ \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$$

- можно вычислить с помощью тригонометрических подстановок

$$x = a\cos t,\quad x = \frac{a}{\cos t},\quad x = a\,tg\,t$$

Пример

- Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$$

"Не берущиеся" интегралы

- Доказано, что следующие интегралы не интегрируются в элементарных функциях

$$\int e^{-x^2}\,dx - \quad \textit{интеграл Пуассона},$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx - \textit{интегральный синус},$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} - \quad \textit{интегральный логарифм}.$$