



Литература по линейной и векторной алгебре и аналитической геометрии

- Бугров Я.С. Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии –М.:Дрофа, 2005.
- Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика, М., Физматлит, 2011.
- Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, М. Айрис-пресс, 9-е издание. 2009.
- Клетеник .Сборник задач по аналитической геометрии.



Литература, доступная в Internet на сайте кафедры в разделе Учебно-методические издания

- Г.Г. Литова, Д.Ю. Ханукаева "Основы векторной алгебры. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов".
- Д.Ю. Ханукаева "Лекции и упражнения по линейной алгебре для специальности "
- Прикладная математика".
- Г.Г. Литова, Д.Ю. Ханукаева "ПРЕДЕЛЫ Пособие для студентов, обучающихся по специальности "Прикладная математика".



Литература по математическому анализу

- **Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. -М.:Дрофа, 2005.**
- **Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. М.: Интеграл-Пресс, 2010. 416 стр.**
- **Берман Сборник задач по математическому анализу**



ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА



Квадратные матрицы 2-го порядка

- Квадратной матрицей второго порядка называется таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

- составленная из четырёх чисел



ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО ПОРЯДКА.

Определение

- Определителем второго порядка матрицы A называется число, которое обозначается следующим образом

$$\det(A) = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

- и вычисляется по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 3-ГО ПОРЯДКА.

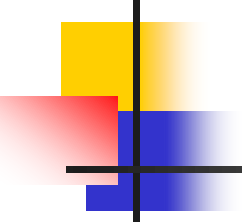
Определение.

- Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- называется число, которое обозначается следующим образом :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



и вычисляется по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Правило «треугольника» вычисления определителя третьего порядка

- Со знаком плюс берутся произведения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

- Со знаком минус берутся произведения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$



Миноры

- **Определение.** Минором M_{ij} i – ой строки и j – го столбца называется определитель, полученный из данного, вычёркиванием соответствующих строки и столбца.
- Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_{11} = a_{22}, \quad M_{12} = a_{21}$$



ОПРЕДЕЛИТЕЛИ n-ГО ПОРЯДКА

- Определителем квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- называется число, которое



Вычисление определителя n-ГО ПОРЯДКА

вычисляется по правилу

$$\Delta(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n},$$

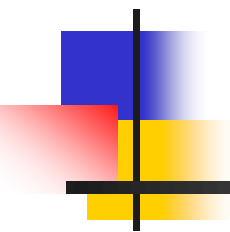
где M_{1j} – определитель (**минор**) (n - 1)-го порядка, полученный вычёркиванием первой строки и j-го столбца



Алгебраическое дополнение

- Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется число, которое вычисляется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$



Свойства определителей

Транспонирование

- **Определение.** Если в определителе Δ соответствующие строки и столбцы поменять местами, то полученный определитель Δ' называется **транспонированным** определителем.
- **Свойство 1.**

$$\Delta = \Delta'.$$

Разложение определителя по строке (столбцу)

- **Свойство 2.** Для определителя n – го порядка справедлива формула **разложения определителя по произвольной i – ой строке :**

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

либо произвольному j - му столбцу

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Обращение определителя в ноль

- **Свойство 3.** Определитель, имеющий **нулевую строку (столбец)**, равен нулю.
- **Свойство 4.** Определитель, имеющий две **одинаковые строки (столбца)** равен нулю.
- **Свойство 5.** Сумма произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равно нулю.

Операции над строками (столбцами) определителя

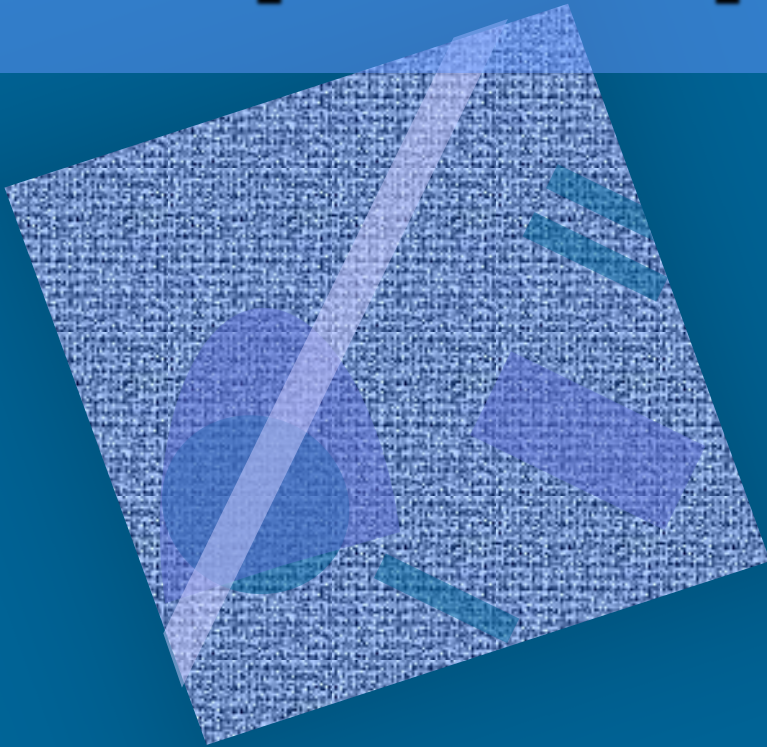
- **Свойство 6.**Общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
- **Свойство 7.** Если элементы строки (столбца) можно представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых в данной строке(столбце) стоят, соответственно, первые и вторые слагаемые, а все остальные строки (столбцы) остаются прежними.
- **Свойство 8.** Если к элементам строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на какое – либо число, то величина определителя не изменится.

- **Свойство 9.** Если 2 строки (столбца) определителя поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный

Решение систем линейных уравнений



Теорема Крамера



Габриэль Кра́мер — швейцарский математик
нем. *Gabriel Cramer*

31 июля 1704, Женева, Швейцария—4 января 1752, Баньоль-сюр-Сез,
Франция)

КРАМЕР ГАБРИЭЛЬ



Габриэль Крамер

(31 июля 1704 - 4 января 1752)

— швейцарский математик,
ученик и друг Иоганна
Бернулли, один из
создателей линейной
алгебры.

Теорема Крамера

- Если определитель системы из n линейных уравнений с n неизвестными
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

[illegible]

- не равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- то система имеет единственное решение **для любого** набора чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$, которое вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

- где определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ получаются из определителя Δ заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{b_2} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{b_n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{b_2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \mathbf{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$

Замечание

- Единственность решения системы понимается в том смысле, что существует **единственный упорядоченный набор чисел**

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

удовлетворяющий системе.

- Всякий такой набор чисел будем называть n – **мерным вектором**.
- Таким образом, при выполнении условий теоремы Крамера существует единственный n – **мерный вектор**, удовлетворяющей системе из n линейных уравнений с неизвестными n .

Однородные системы

- Система уравнений с нулевыми свободными членами называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.
- Рассмотрим однородную систему из n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

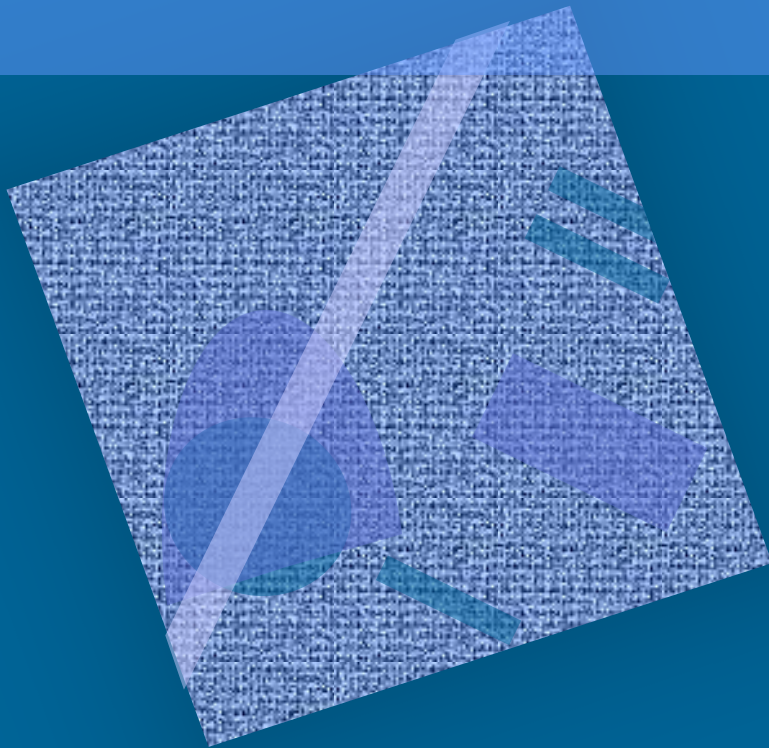
- Очевидно, что нулевой вектор $(0, 0, \dots, 0)$ всегда является решением такой системы. Нулевое решение называется **тривиальным** решением.

Критерий существования нетривиального решения однородной системы

- **Теорема.** Для того, чтобы однородная квадратная система линейных уравнений имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\Delta = 0.$$

Метод Гаусса



Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс — немецкий математик
(нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; 30 апреля 1777,
Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)



**Математика – царица наук, а
арифметика – царица математики**



**Карл Фридрих Гаусс
(1777-1855) —
немецкий математик,
астроном, геодезист и
физик, иностранный
член-корреспондент
(1802) и иностранный
почетный член (1824)
Петербургской АН**

Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

- Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений (необязательно «квадратную», как в методе Крамера)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

- Определим преобразования системы, приводящие к равносильной системе.

Элементарные преобразования системы

- Элементарными преобразованиями системы называются следующие преобразования:
 - Умножение любого уравнения на число отличное от нуля.
 - Изменение уравнения прибавлением к нему другого уравнения, умноженного на число.
 - Перестановка уравнений.
- Очевидно, что элементарные преобразования системы дают систему равносильную.

Последовательное исключение неизвестных

- Метод Гаусса состоит в том, что с помощью элементарных преобразования исходная система упрощается путём последовательно исключения неизвестных так, что в результате получается система ступенчатого вида :

[illegible]

- Если $a'_{nn} \neq 0$, то система имеет единственное решение.
- Если $a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0$, то система не имеет решения.
- В случае трапецивидной формы $l < n, a'_{ll} \neq 0$, система имеет бесконечно много решений. В этом случае переменная x_l , выражается через «свободные» переменные $x_{l+1}, \dots, x_n$.

Матрица системы

- Обычно метод Гаусса применяют используя матричную запись.
- **Расширенной матрицей системы** (1) называется таблица чисел из коэффициентов при неизвестных и свободных членов

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) . \quad (2)$$

- **Матрицей системы** (1) называется таблица из коэффициентов при неизвестных.

Пример 1

- Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 7 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 1 \\ 4x_6 = 5 \end{cases}$$