Первообразная и неопределённый интеграл

Лекции 1-2

Определение

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (a,b). Функция $y = F(x)$, определенная на этом интервале, называется ***первообра'зной*** функции $y = f(x)$, если во всех точках интервала (a,b) выполняется равенство

$$F'(x) = f(x),\ x \in (a,b).$$

Лемма

- Если функция $\Phi(x)$ имеет на интервале (a,b) ***нулевую производную***: $\Phi'(x)=0$, то она постоянна на этом интервале, т.е.

$$\Phi(x)=C, \quad x\in(a,b).$$

Структура первообразных

- ***Теорема 1***. Если $F(x)-$ первообразная функции $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C-$ также первообразная, где $C-$ произвольное число.

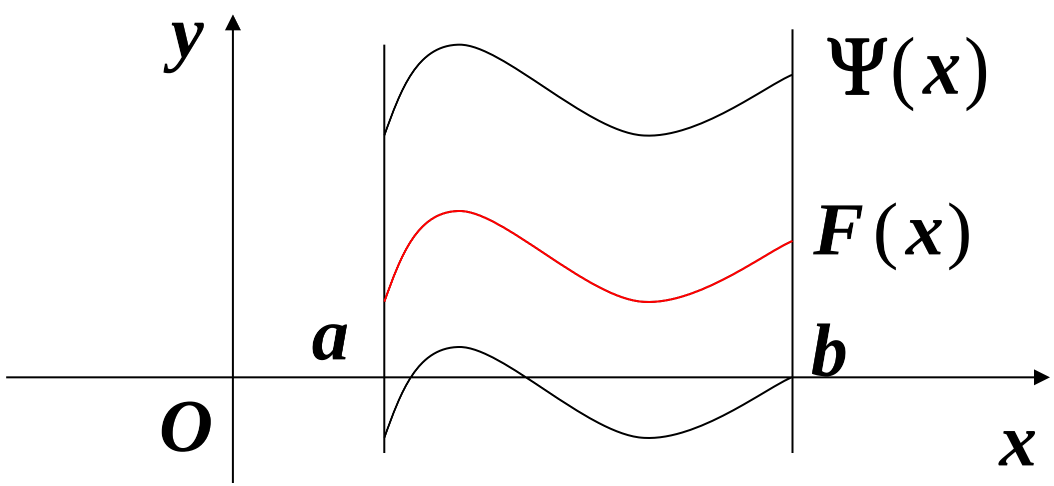
- ***Теорема 2***. Если $F_1(x), F_2(x)-$ две первообразные на (a,b) функции $f(x)$, то

$$F_1(x)-F_2(x)=C$$

- т.е. они отличаются только на число C.

Вывод

- Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то и всякая функция вида $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная является первообразной, а всякая первообразная $\Psi(x)$ функции $f(x)$ представима в виде $\Psi(x)=F(x)+C$.



Определение

- *Совокупность всех первообразных* функции $f(x)$, определённых на интервале (a,b), называется ***неопределённым интегралом*** на этом интервале и обозначается

$$\int f(x)dx.$$

- Если $F(x)$ - одна из первообразных $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Свойства неопределённого интеграла

- 1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- 2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$, или $\int dF(x) = F(x) + C$,
- 3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, где $\alpha \neq 0 -$ число.
- 4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- 5. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Таблица интегралов

- 1. $\int 0dx = C.$
- 2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
- 3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- 4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C, \quad \int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C.$
- 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C.$

Таблица интегралов

- 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C,\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C.$
- 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
- 8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arc}\,tg \frac{x}{a} + C.$
- 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C.$

Таблица интегралов

- 10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
- 11. $\int shx dx = \mathrm{c}hx + C, \int chx dx = \mathrm{s}hx + C.$

Табличное интегрирование

- Примеры.
- 1. $$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + e^2\right) dx$$
- 2. $$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx.$$
- 3. $$\int \left(\sin 3x - e^{-2x} \right) dx.$$

Замена переменных

- **Теорема** Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, а функция $\varphi(t)$ дифференцируема . Справедлива следующая формула замены переменных:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

- Т.е. функция $F(\varphi(t))$ первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ так, что
-

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C,$$

или $$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$$

Примеры

- 1. $\int tg\,x\,dx$
- 2. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$
- 3. $\int e^{-x^2}x\,dx$
- 4. $\int \frac{dx}{(x-a)^m}, \quad m \neq -1, \quad \int \frac{dx}{(x-a)}.$
- 5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$

Интегрирование по частям

- ***Теорема.*** Если функции $u(x), \mathrm{v}(x)$ дифференцируемы на некотором интервале и на этом интервале существует интеграл $\int \mathrm{v}du$, то
- существует интеграл $\int u d\mathrm{v}$ и справедлива
- формула интегрирования по частям

$$\int u d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v} du.$$

Основные типы интегралов "берущихся" по частям

- I. Интегралы вида

$$\int (ax+b)^n \cos cx\,dx\ ,\ \int (ax+b)^n \sin cx\,dx\ ,$$

$$\int (ax+b)^n e^{cx} dx\ .$$

- II. Подинтегралная функция содержит в качестве множителя обратные функции

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ arctg\,x,\ arcctg\,x,\ \ln x.$$

- III. "Возвратное" интегрирование по частям.

Примеры

- 1. $\int xe^{2x}dx$
- 2. $\int x^3 \ln x \, dx$
- 3. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$
- 4. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$