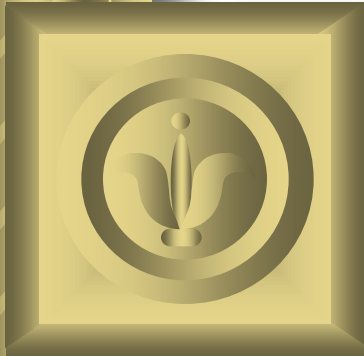




Исследование поведения функции

Второе достаточное условие экстремума

- **Теорема.** Пусть x_0 - стационарная точка функции $y = f(x)$:
- если $f''(x_0) > 0$, то x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$;
- если $f''(x_0) < 0$, то x_0 является точкой максимума.
- **Замечание.** Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, то функция может иметь или не иметь экстремум в точке x_0 .

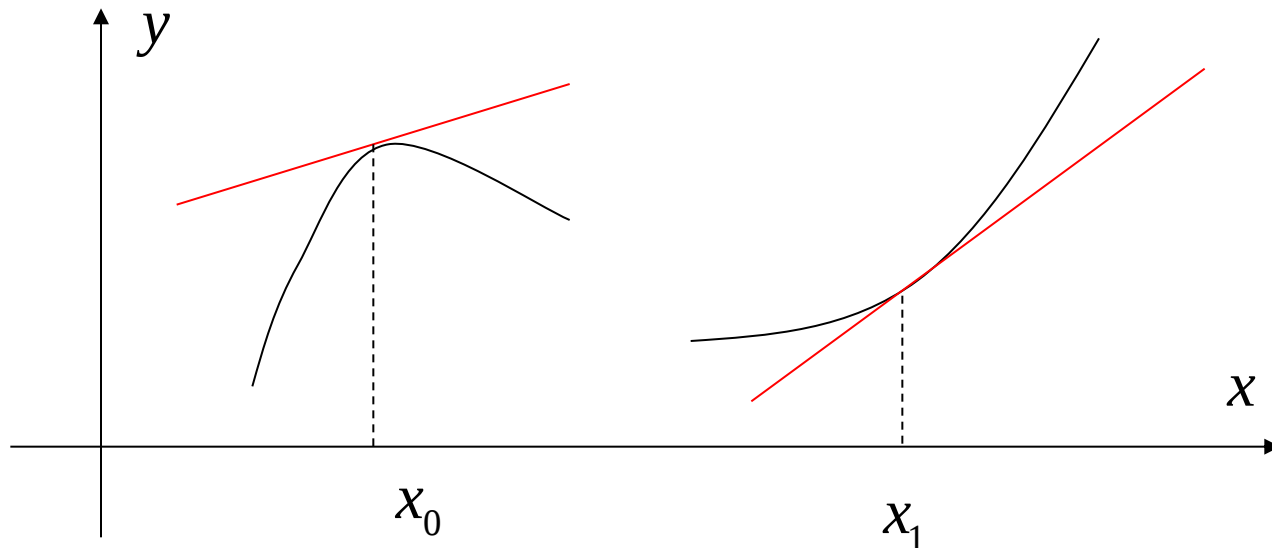
Примеры

- Функция $f(x) = x^3$ **не имеет экстремум** в точке $x = 0$, а функция $f(x) = x^4$ **имеет минимум** при $x = 0$, хотя обе функции имеют нулевые первую и вторую производные в точке $x = 0$.
- Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^3 - 7x^2 + 4x$$

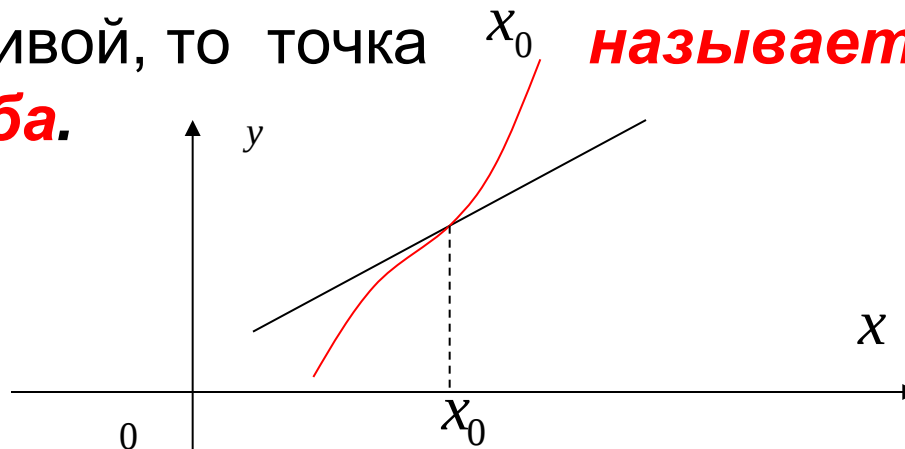
Выпуклость функции

- Будем говорить, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 **выпукла вверх (вниз)**, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех точек этой окрестности касательная к кривой в точке x_0 расположена **выше (ниже)** самой кривой.



Достаточные условия выпуклости кривой. Точки перегиба.

- **Теорема.** Если функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 вторую непрерывную производную и $y'' = f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то функция выпукла **вниз** (вверх) в точке x_0 .
- Если функция $y = f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0 и при переходе через точку x_0 происходит **смена выпуклости** кривой, то точка x_0 **называется точкой перегиба**.



Необходимое условие точки перегиба.

- **Теорема 1.** Если точка x_0 является **точкой перегиба** функции $y = f(x)$ и существует непрерывная вторая производная $f''(x)$ в точке x_0 , то
$$f''(x_0) = 0.$$
- **Замечание.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и её окрестности и точка x_0 является точкой перегиба функции и, **то вторая производная либо равна нулю по теореме, либо может не существовать.**

Достаточные условия точек перегиба.

- **Теорема 2.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и её окрестности и вторая производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует. Если **вторая производная меняет знак при переходе через точку x_0** , то точка x_0 является точкой перегиба функции.

Пример

- Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$y = x^4 - 4x^3.$$

Вертикальные асимптоты

(от греч. ασύμπτωτος — несовпадающий,
Аполлόνий Пергский , III в. до н. э.)

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , **может быть односторонней**. Если ***хотя бы один из пределов***

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

- ***равен*** ∞ , то прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** .

Примеры.

- Найти вертикальные асимптоты

$$1. \quad y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$$

$$2. \quad y = e^{\frac{1}{x}}$$

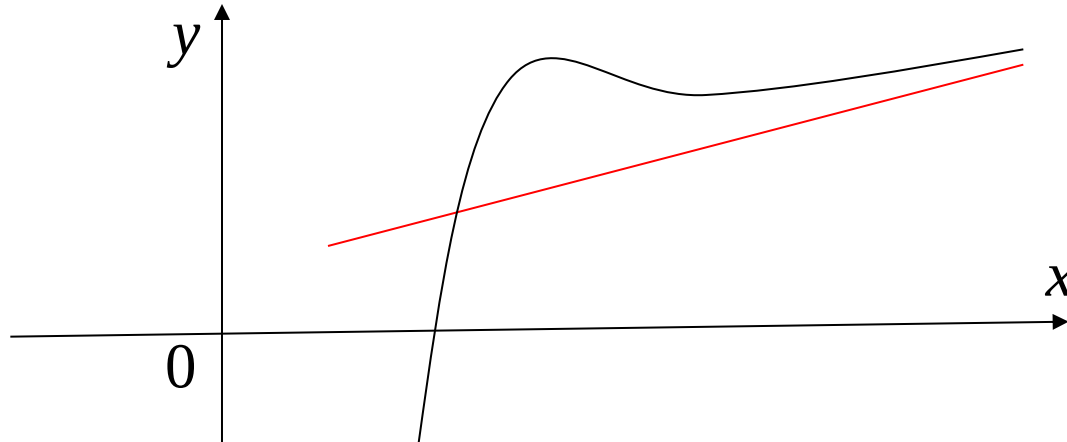
$$3. \quad y = \sqrt[3]{x} \ln x^2$$

$$4. \quad y = x \ln x$$

Наклонные асимптоты

- Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0)$$



Условия существования наклонных асимптот

- **Теорема.** Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \right)$$

Пример

- Найти наклонные асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Схема построения графика функции

- 1. Найти область определения функции, точки разрыва, асимптоты.
- 2. Вычислить первую производную и найти точки, в которых производная равна нулю или не существует.
- 3. Определить промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
- 4. Вычислить вторую производную и найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
- 5. Найти промежутки выпуклости вверх или вниз, точки перегиба.

Пример 1.

- Исследовать функцию и построить график

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

Пример 2

- Построить график гауссовской кривой.

$$y = e^{-x^2}.$$

Пример 3

- Построить график функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

$$y''_{xx} = 2 \frac{t^2 - 2}{(1+t)^3} e^{-3t}$$