

# Поверхности второго порядка

Лекция 9

# ***Алгебраическая поверхность второго порядка***

- Множество точек на плоскости, удовлетворяющее уравнению второго порядка вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

- где ***не все коэффициенты***  $A, B, C, D, E, F$  ***одновременно равны нулю***, называется алгебраической поверхностью второго порядка.
- ***Вырожденные*** поверхности: пустое множество, плоскость, пара плоскостей.



# Невырожденные поверхности второго порядка

## Канонические уравнения

**Эллипсоид**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$

- Сечения эллипсоида

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

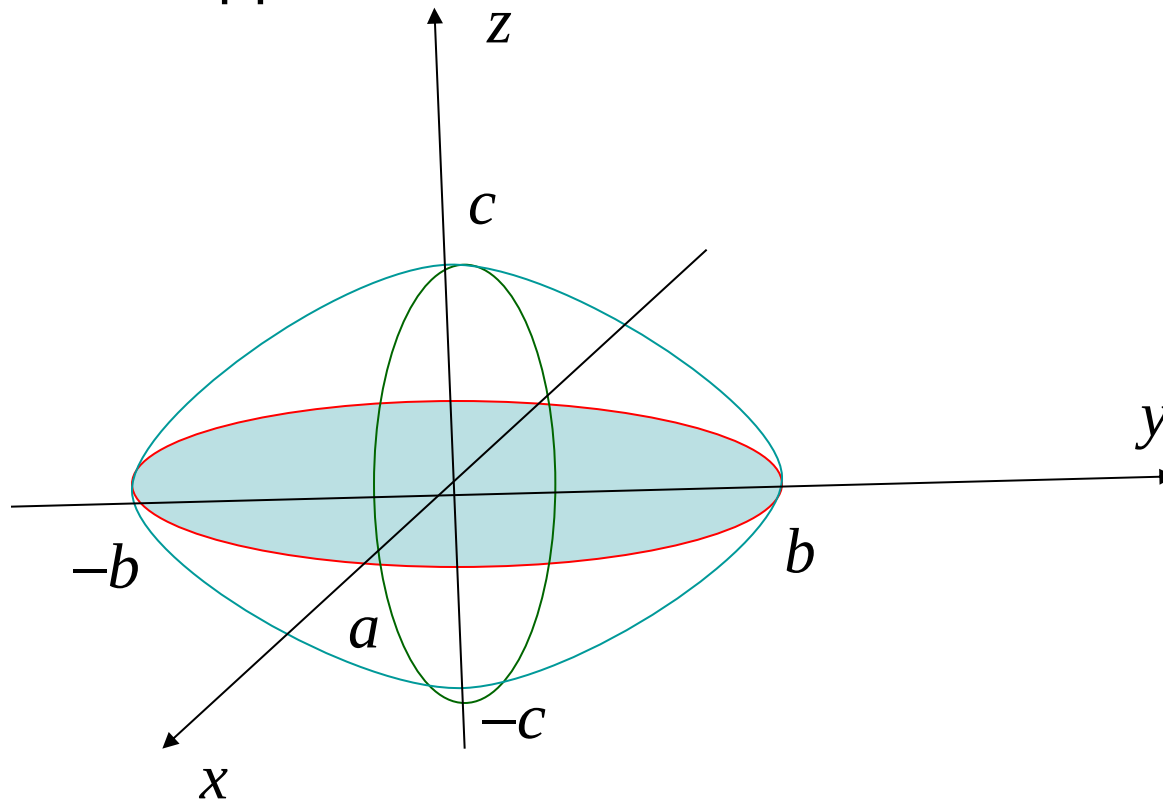
- аналогично

$$y = 0, \quad z = 0.$$

# Эллипсоид

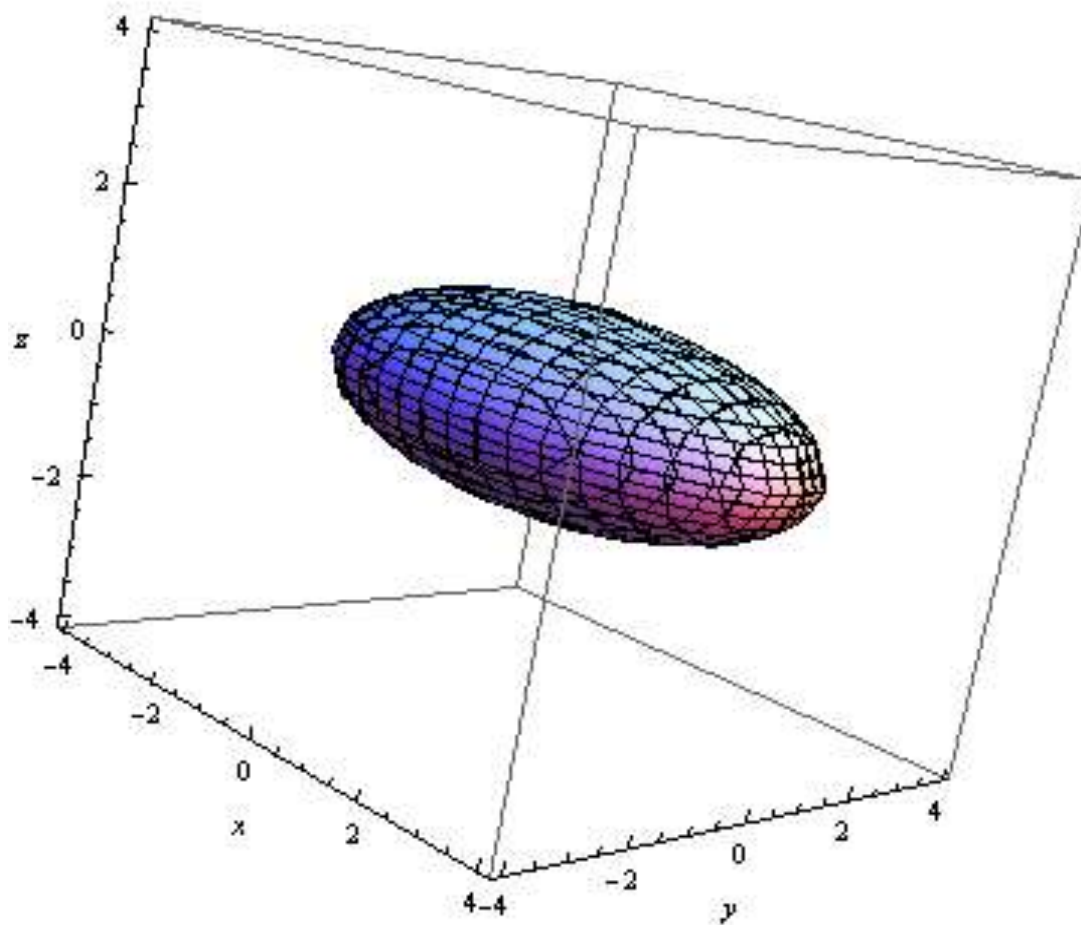
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$$

- Построение методом сечений.



Эллипсоид

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$$



# Гиперболоиды



- **Однополостный:**

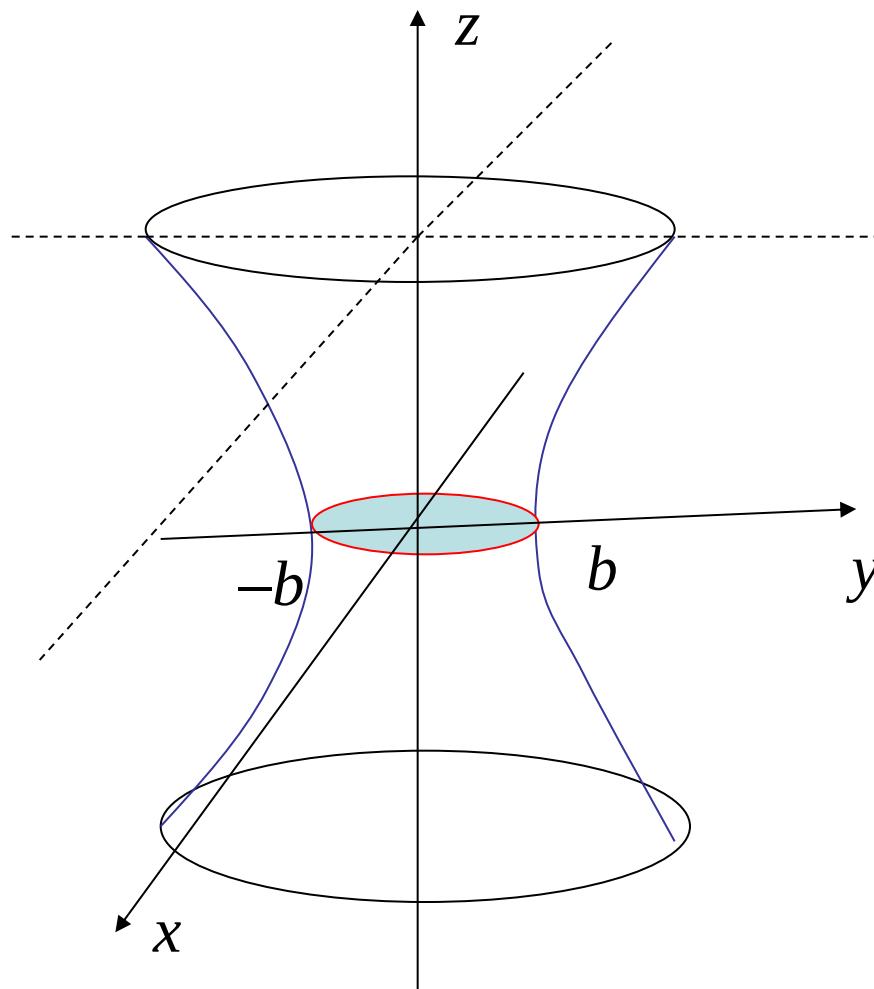
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Сечения:**

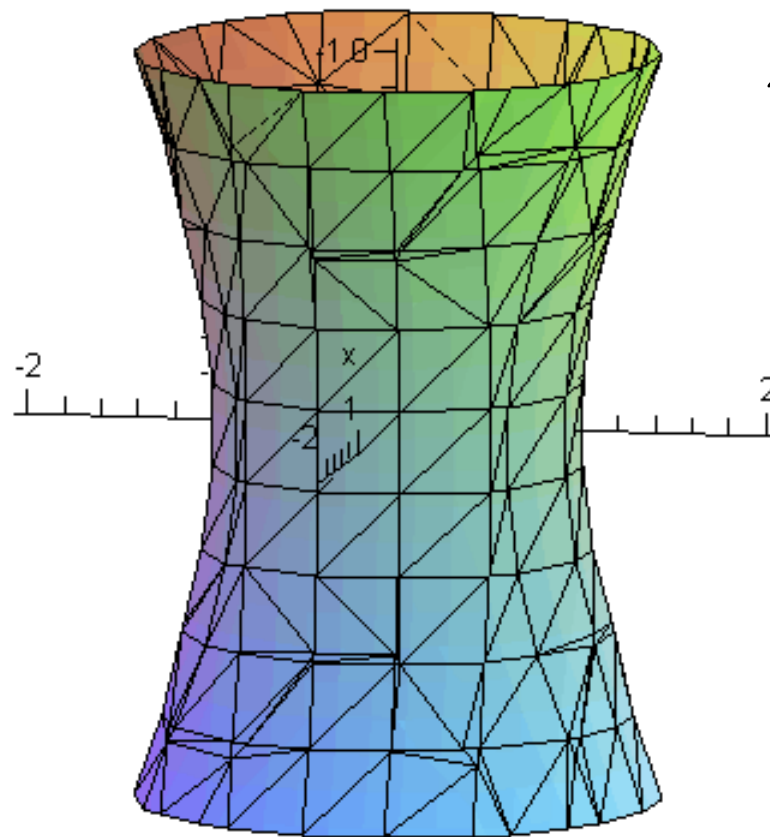
$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



# Гиперболоид однополостный

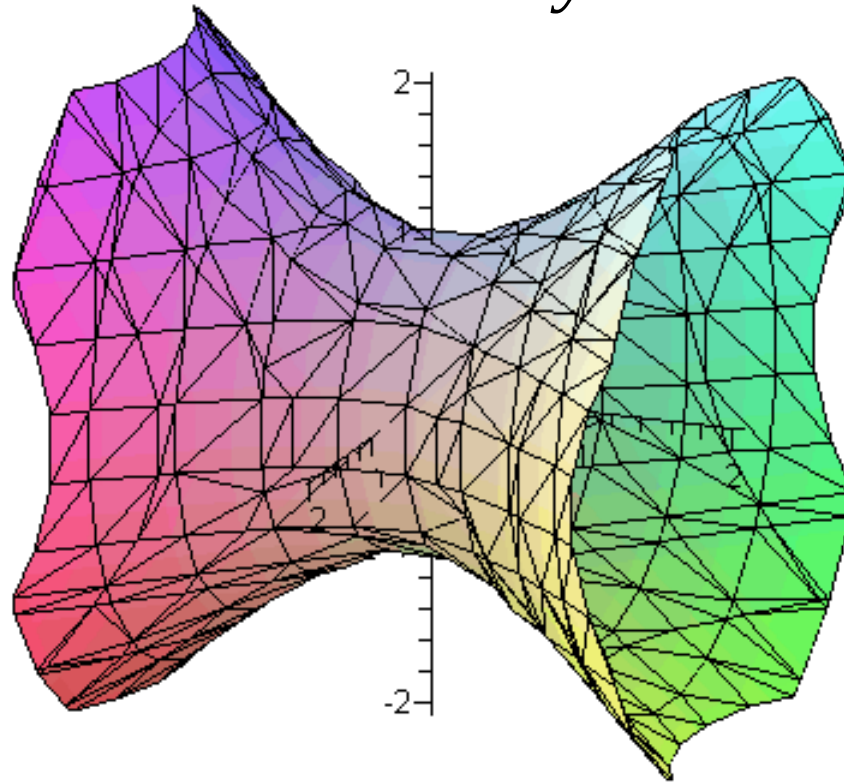


$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



# ***Гиперболоид однополостный***

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$



# Владимир Григорьевич Шухов(1853-1939)

- В. Г. Шухов первым в мире использовал в строительстве сетчатые металлические оболочки в виде **гиперболоидных башен** (патенты Российской Империи №1894, №1895, №1896; от 12 марта 1899 года.



# Башня Шухова в Москве (160 метров. 1922 г)



# Гиперболоиды

- Двуполостный

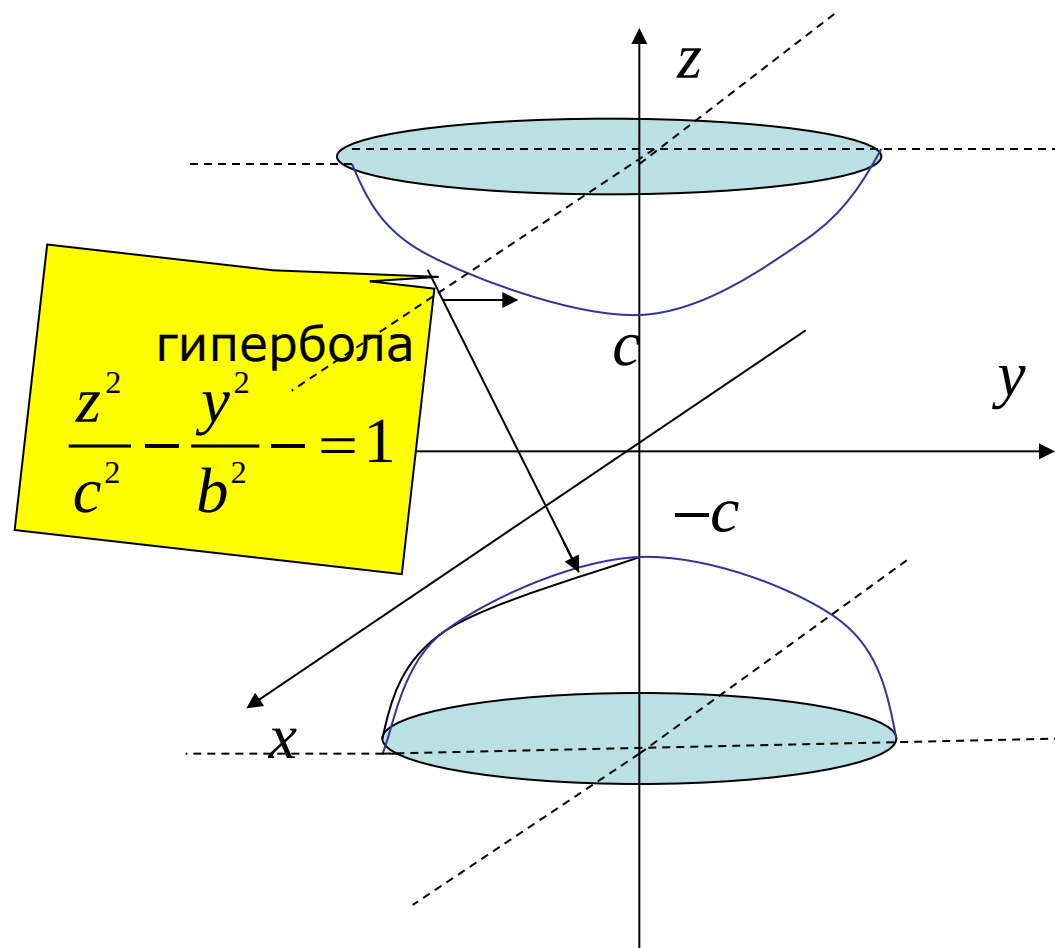
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- Сечения:

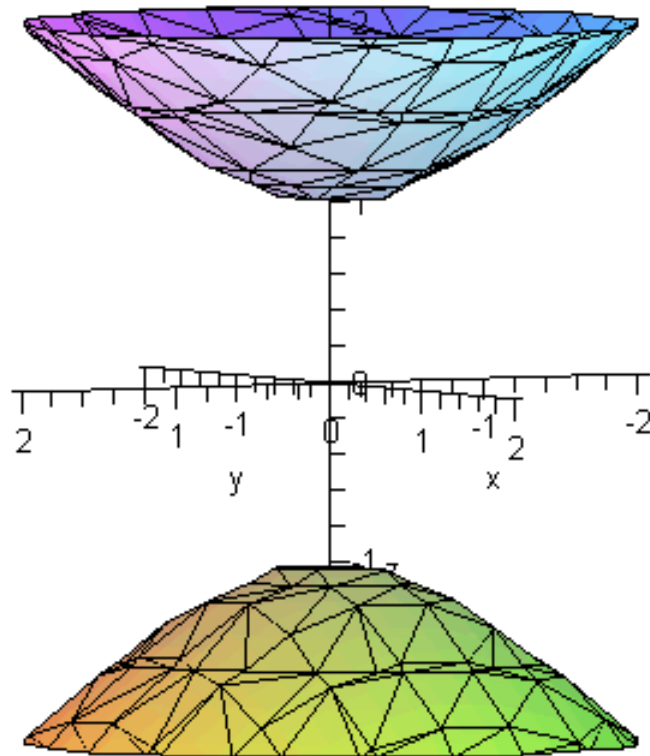
$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



**Гиперболоид** двуполостный

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$


# Коническая поверхность. *Конус*

- Каноническое уравнение конической поверхности

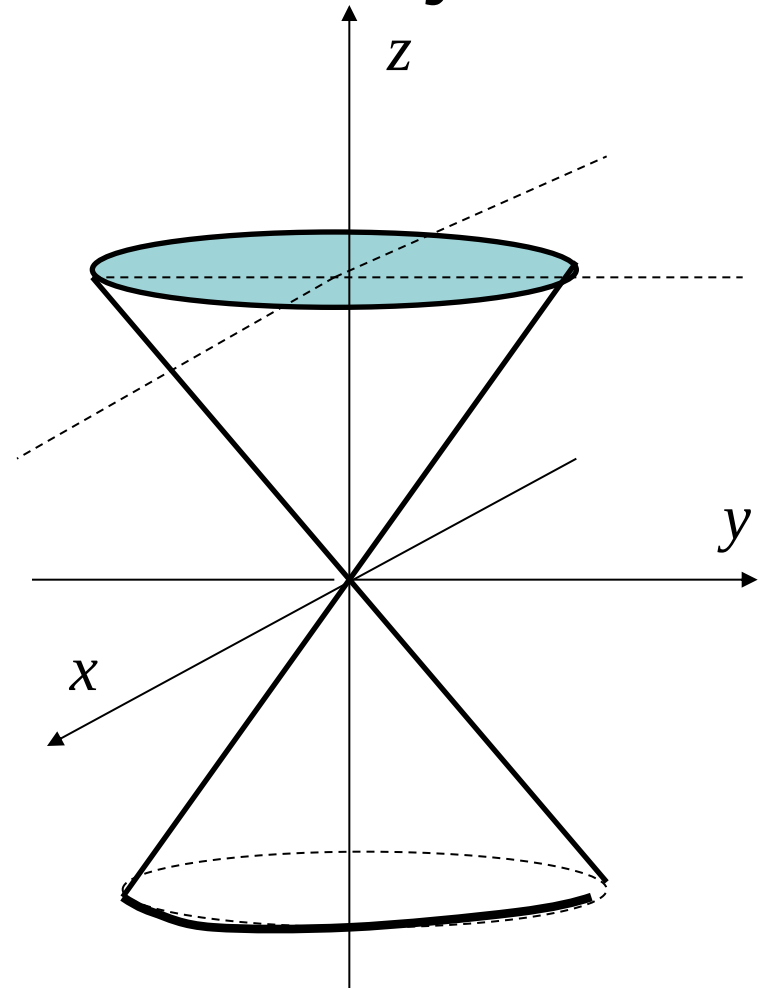
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

- Сечения

$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

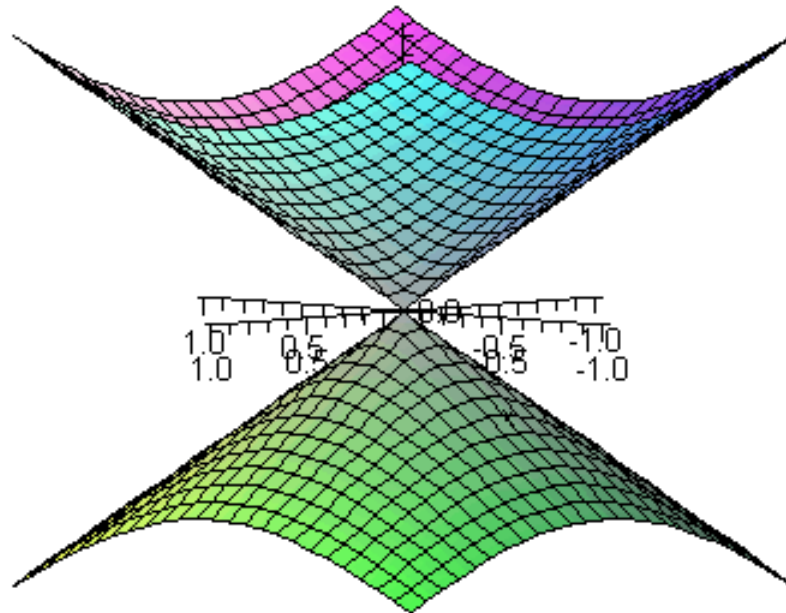
$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



# ***Конус***

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$



# Параболоиды

- **Эллиптический**

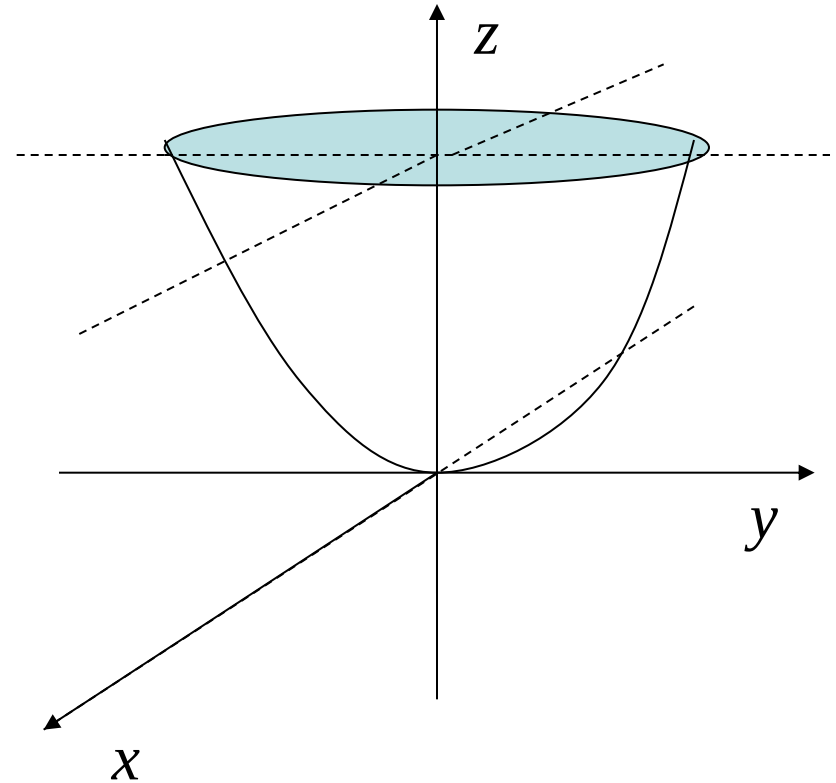
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

- **Сечения**

$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

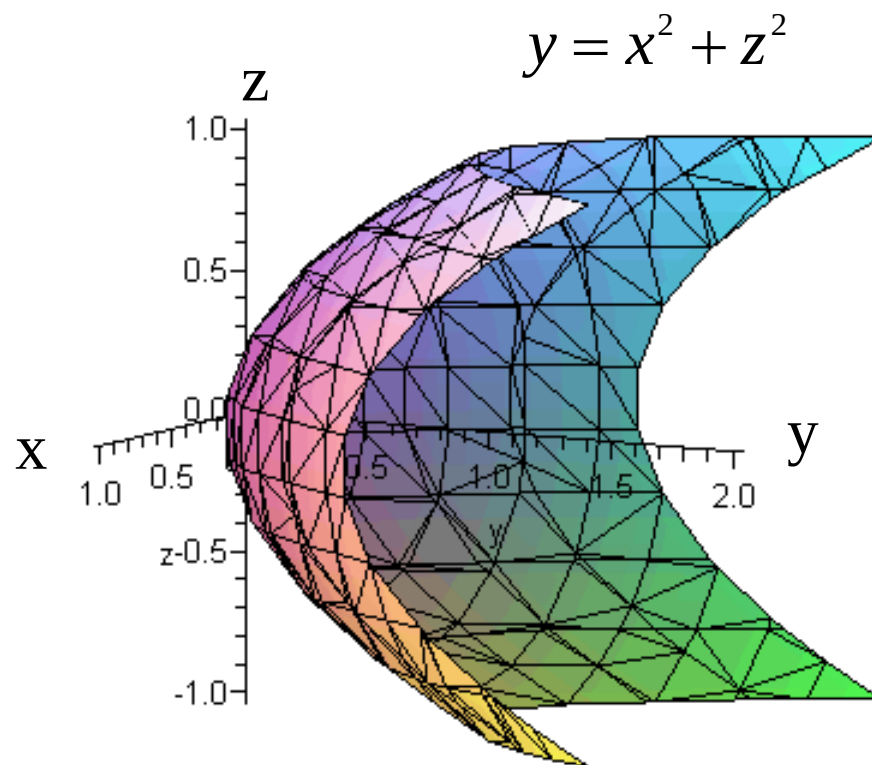
$$y = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{a^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow z = \frac{y^2}{b^2}$$





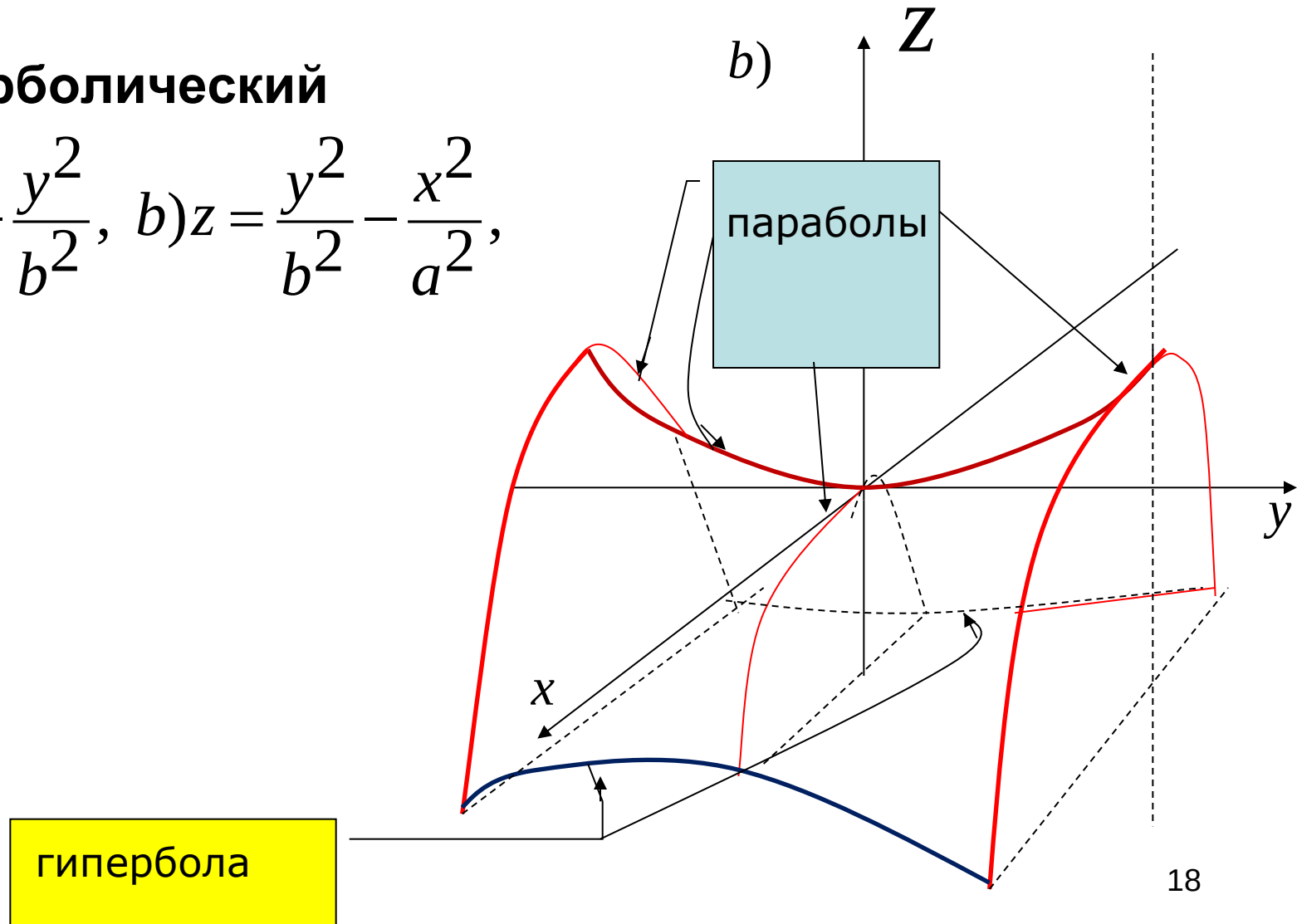
# ***Параболоид эллиптический***



# Параболоиды

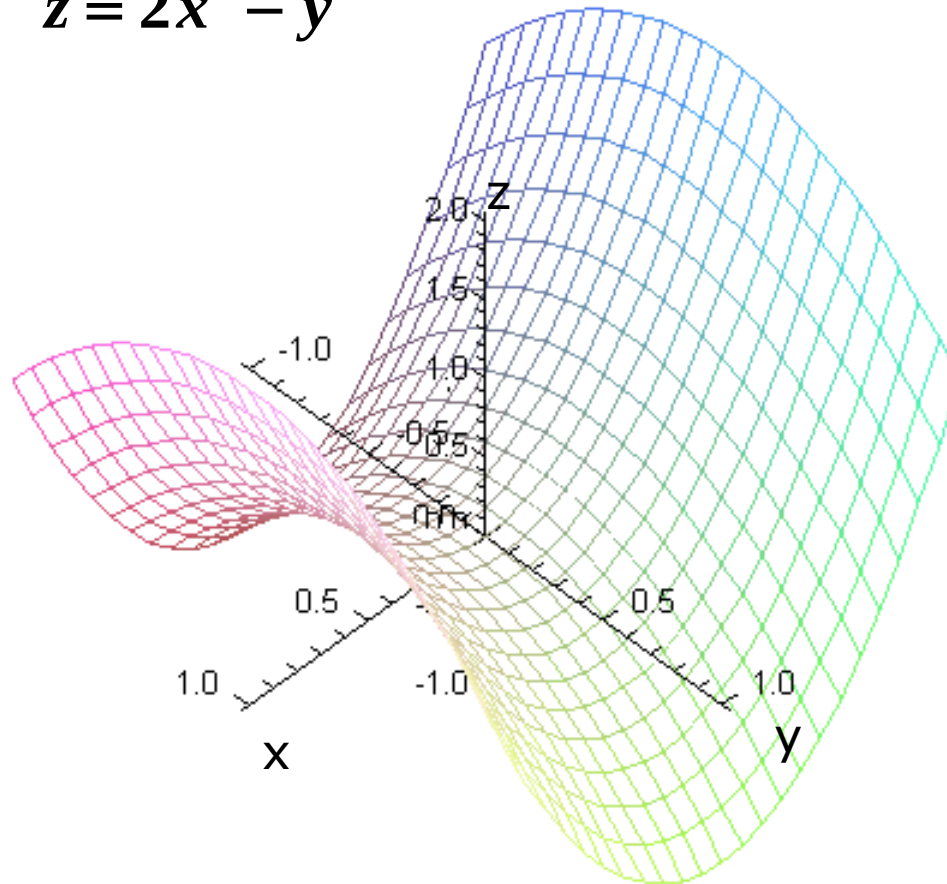
- Гиперболический

$$a) z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad b) z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2},$$



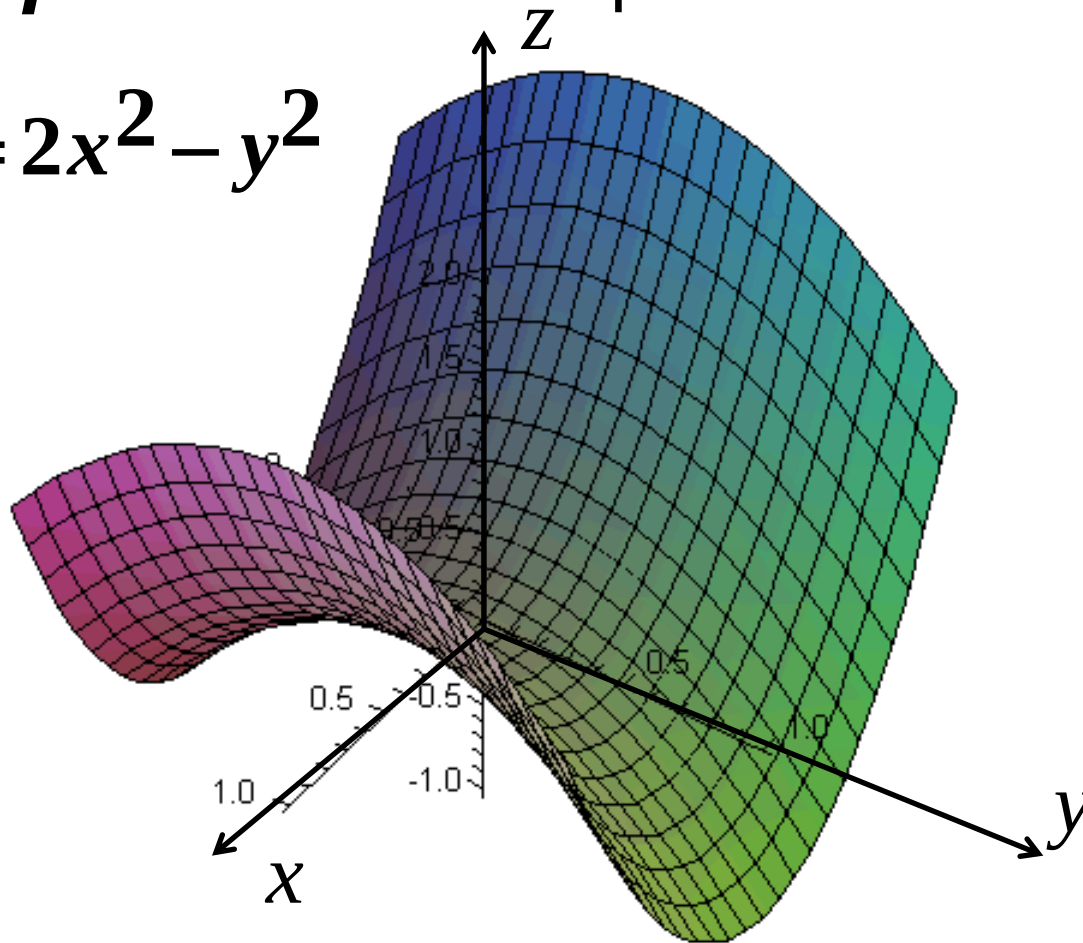
# ***Параболоид*** гиперболический

$$z = 2x^2 - y^2$$



# **Параболоид** гиперболический

$$z = 2x^2 - y^2$$



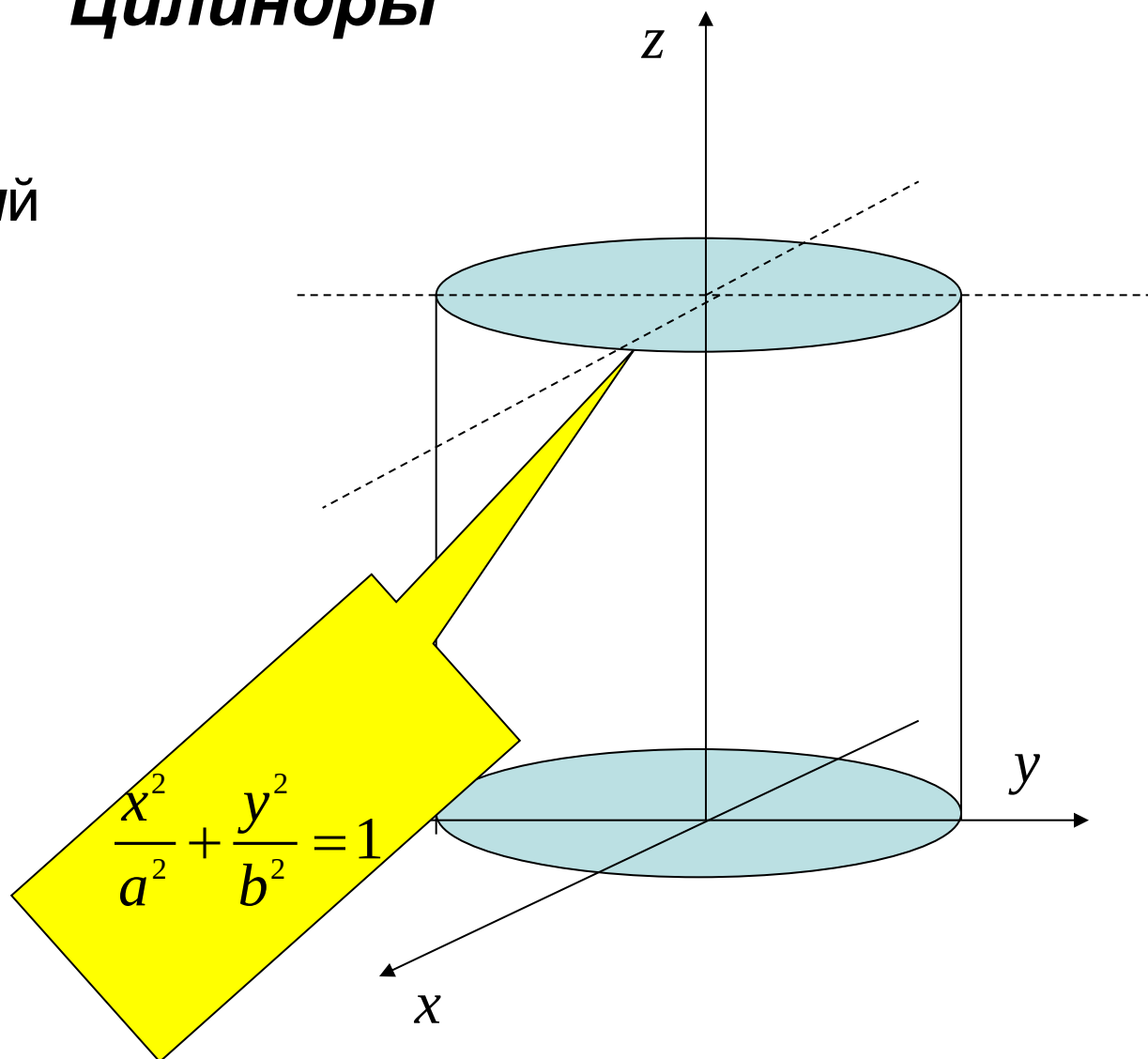
# Цилиндры

- **Эллиптический**

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$c) \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



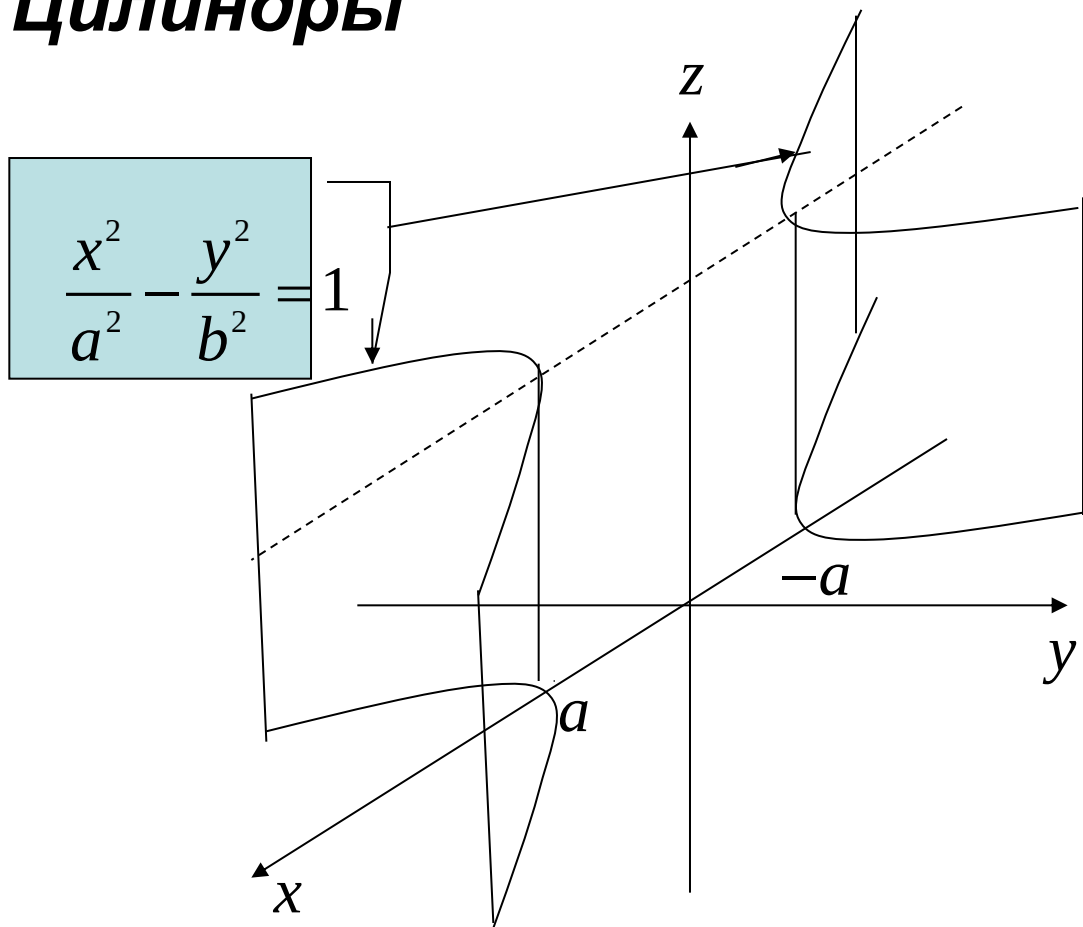
# Цилиндры

- Гиперболический

$$a) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

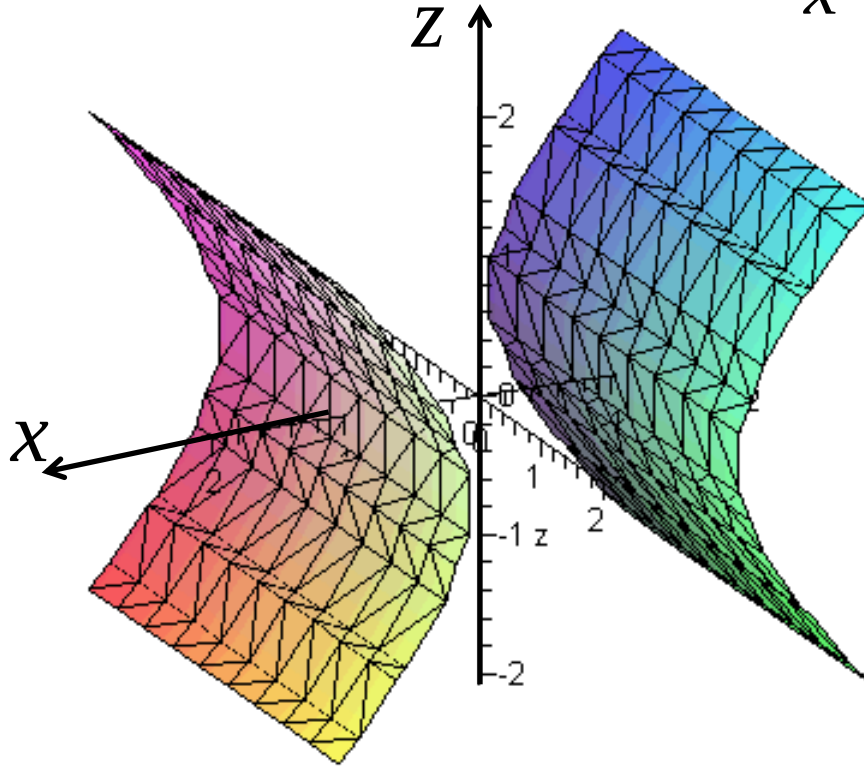
$$b) \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$c) \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



# Цилиндр гиперболический

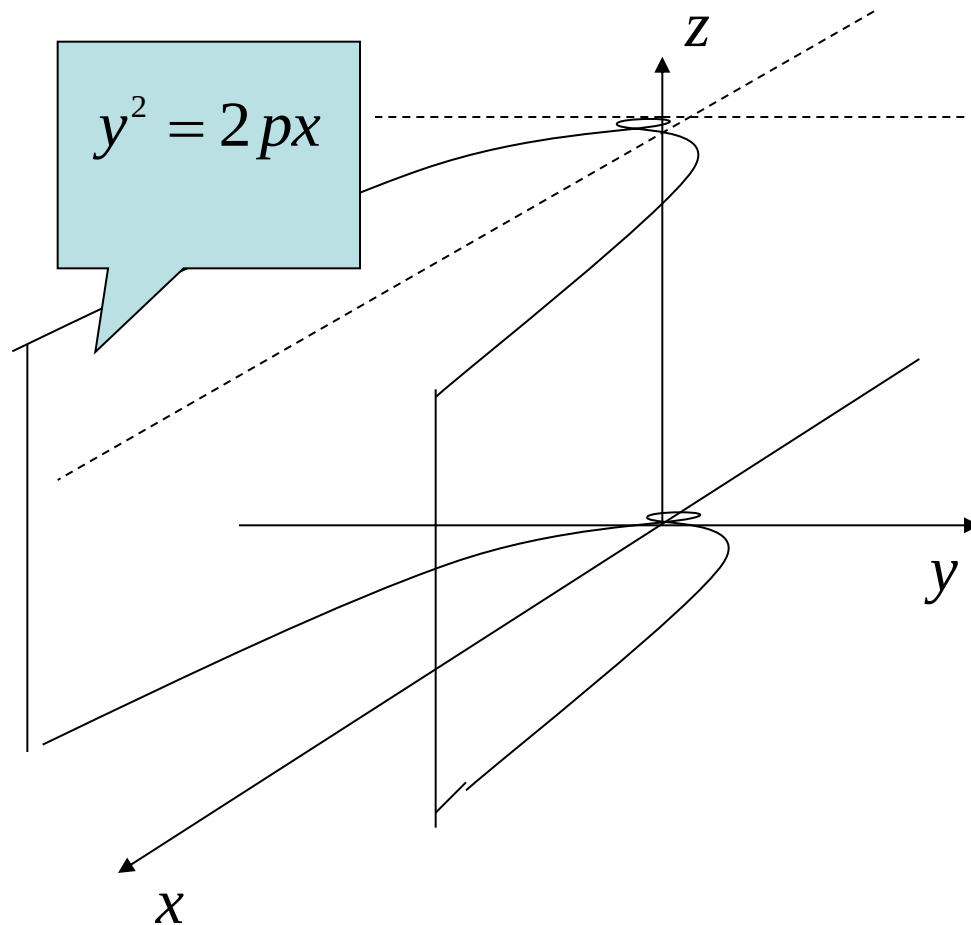
$$x^2 - z^2 = 1$$



# Цилиндры

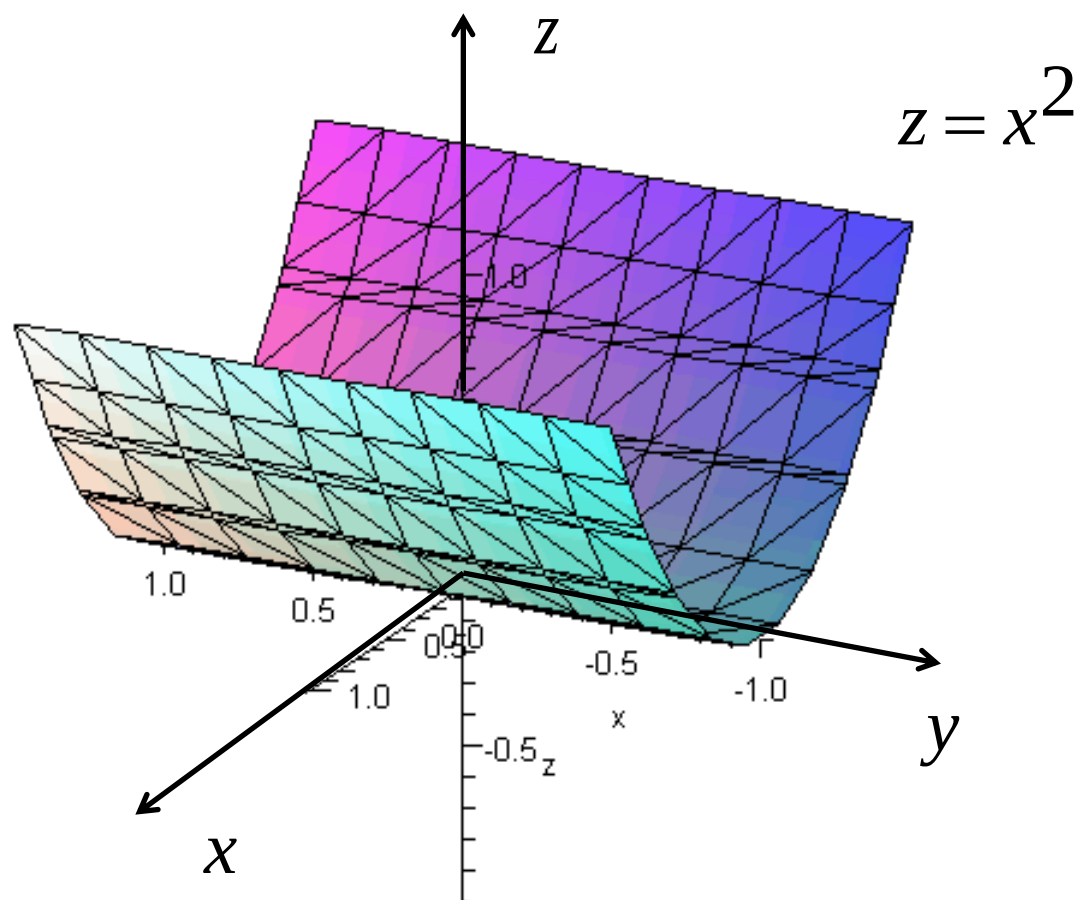
- **Параболический**

a)  $y^2 = 2px$





# Цилиндр параболический

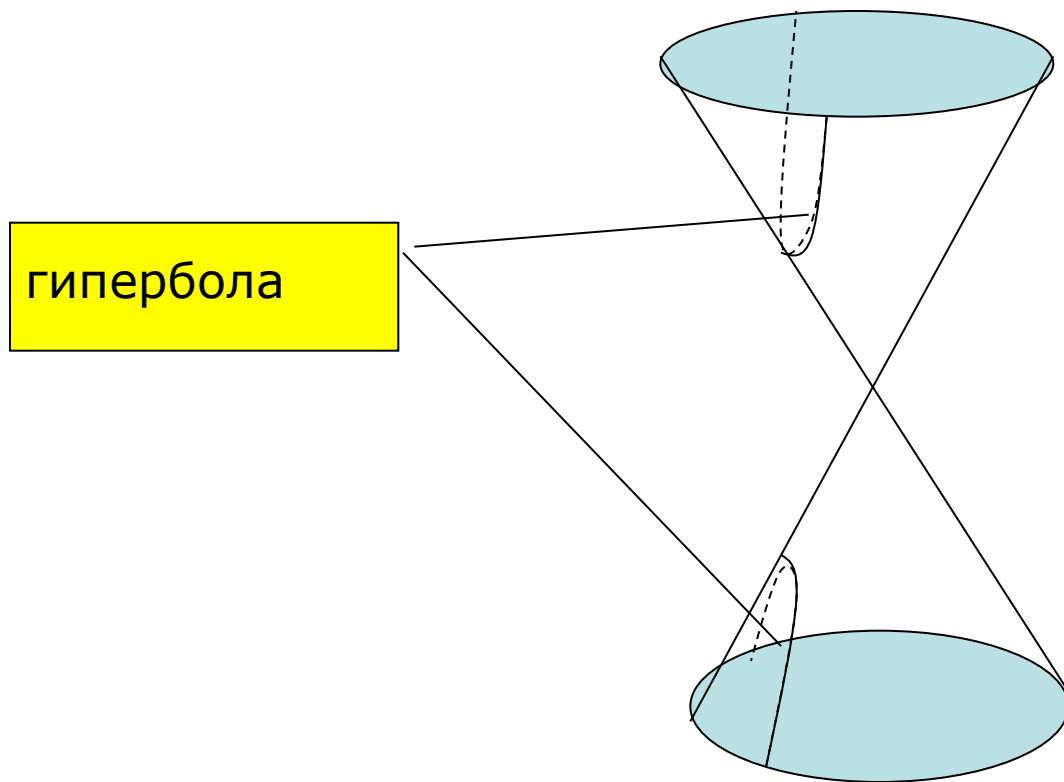


# ***Конические сечения.***

**Аполлόνий Пергский (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος,  
Перге, 262 до н. э. — 190 до н. э.)**



# ***Гипербола***



# Парабола, эллипс

