

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Лекция 7

Производные высших порядков

- Пусть функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) производную $y' = f'(x)$. Эта производная в свою очередь также может иметь производную, которая называется второй производной $y'' = (f'(x))'$.

Аналогично определяется n -ая производная равенством $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$.

- Пример.

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (x^n)^{(n)} = n!$$

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right)$$

Производные функций, заданных параметрически

- Вычислить вторую производную y''_{xx} функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

- Пример. Вычислить y''_{xx} циклоиды.

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Получено $y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$

Производные функций, заданных неявно

- Вычислить вторую производную y''_{xx} функции, заданной неявно

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Дифференциалы высших порядков

- Определим дифференциал второго порядка

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

- Аналогично определяется дифференциал n-го порядка

$$d^n y = d(d^{(n-1)} y) = dx^{n-1} d(f^{(n-1)}(x)) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

- Отсюда

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Дифференциал второго порядка сложной функции

- Найдём дифференциал $d^2 y(x)$ второго порядка сложной функции $y = f(g(x))$.

- Обозначим $u = g(x)$ В силу инвариантности формы первого дифференциала

$$dy = y'_u du$$

- Из формулы дифференциала произведения

получаем
$$\begin{aligned} d^2 y &= d(y'_u du) = d(y'_u) du + y'_u d(du) = \\ &= y''_{uu} (du)^2 + y'_u d^2 u \end{aligned}$$

Формула Тейлора для многочлена

- **Теорема.** Если $P_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ многочлен n -ой степени, то коэффициенты разложения этого многочлена по **степеням** $(x - x_0)$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

- ИМЕЮТ ВИД

$$a_0 = P_n(x_0), \quad a_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!}, \dots, \quad a_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- т.о. справедлива **формула Тейлора для многочлена**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Многочлен Тейлора.

- Пусть $y = f(x)$ **произвольная** функция, имеющая n производных в точке x_0 . Многочлен вида

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- называется **многочленом Тейлора n -ой степени** функции $y = f(x)$ по степеням $x - x_0$.
- Справедливы равенства

$$f(x_0) = Q_n(x_0), \quad f'(x_0) = Q_n'(x_0), \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = Q_n^{(n)}(x_0).$$

Замечание 1

- Таким образом, значение многочлена Тейлора n -ой степени и всех его n производных в точке x_0 равны соответствующим значениям функции и её производных.

Формула Тейлора

- Разность $r_n(x) = f(x) - Q_n(x)$ называется **остаточным членом формулы Тейлора**. Отсюда

$$f(x) = Q_n(x) + r_n(x)$$

- т.о. справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x),$$

- которое называется **формулой Тейлора** для функции $y = f(x)$.

Замечание 2

В силу замечания 1 справедливы следующие равенства:

$$r_n(x_0) = f(x_0) - Q(x_0) = 0,$$

$$r'_n(x_0) = f'(x_0) - Q'_n(x_0) = 0,$$

...

$$r_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - Q_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

- **Теорема.** Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет n производных в окрестности точки x_0 , то справедлива **формула Тейлора**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n. \quad x \rightarrow x_0$$

- Остаточный член $r_n(x) = o(x - x_0)^n$ называется **остаточным членом в форме Пеано.**

Формулы Тейлора основных элементарных функций.

- Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется **формулой Маклорена**
- Справедливы следующие формулы Тейлора для $x_0 = 0$ т.е. **формулы Маклорена** разложения элементарных функций :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0$$

Продолжение

- Справедливы также формулы

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

Примеры

- В разложении многочлена $x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ по степеням $x - 1$ найти коэффициент при $(x - 1)^2$
- **Д.3**
- Найти коэффициент при x^4 в разложении по формуле Маклорена функции $y = \cos^2 x$
- Найти коэффициент при x^5 в разложении по формуле Маклорена функции $y = x\sqrt[3]{1 + x^2}$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме **Лагранжа**

- **Теорема.** Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 вместе со своими производными до порядка $n+1$ **включительно**, то для **любой точки x из этой окрестности** справедлива формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\textcolor{blue}{x}_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\textcolor{red}{c})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

- где точка $\textcolor{red}{c}$ лежит **между точками x и x_0** .

Линеаризация функций

- Используя первые 2 члена разложения формулы Тейлора, можно получить представление функции в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0$$

- Линейная часть** этого представления называется **линеаризацией** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 .
- Пример 1.** Найти линеаризацию функции $y = (2x + 1)\sin(x - 1)$ в окрестности точки $x = 1$.

Пример 2

- Разложить функцию $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ по формуле Тейлора в окрестность точки $x_0 = 1$, используя **многочлен Тейлора 2-й степени**.

Решение примера

- Формула Тейлора с многочленом Тейлора второго порядка имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2 \quad (1)$$

- Разложим по формуле Тейлора отдельно $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ и $f_2(x) = \ln x$, и по условию $x_0 = 1$. Имеем

$$f_1(1) = \frac{1}{2}, \quad f_1'(x) = \frac{2}{2}x, \quad f_1'(1) = 1, \quad f_1''(x) = 1, \quad f_1''(1) = 1,$$

- следовательно, по формуле Тейлора (1)

$$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2. \quad (2)$$

Продолжение решения примера

- **Объяснить** отсутствие $o(x-x_0)^2$ в формуле (2)!
- Для разложения $f_2(x) = \ln x$ используем формулу стандартного разложения $\ln(1+x)$ по степеням x

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

- Получаем

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2, \quad x \rightarrow 1. \quad (3)$$

- Подставим формулы (2) и (3) в $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$.

Продолжение решения примера

- Получаем Формулу Тейлора исходной функции

$$\frac{1}{2}x^2 - \ln x = \frac{1}{2} + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \\ - \left[x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 \right], x \rightarrow 1$$

- Отсюда

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x = \frac{1}{2} + (x-1)^2 + o(x-1)^2, x \rightarrow 1$$

График функции

- График параболы $y = \frac{1}{2} + (x-1)^2$ можно построить путём параллельного переноса параболы $y = \frac{1}{2} + x^2$ на единицу вправо.

