

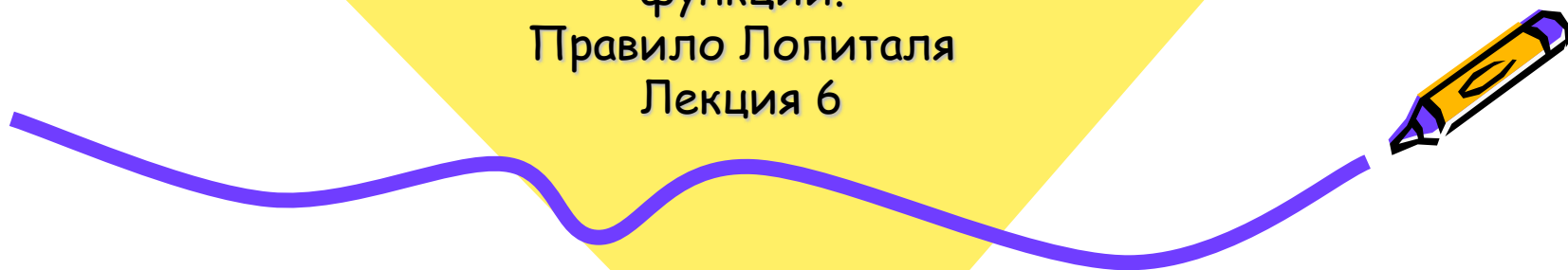


Экстремум

Теоремы о среднем значении дифференцируемых функций.

Правило Лопиталя

Лекция 6

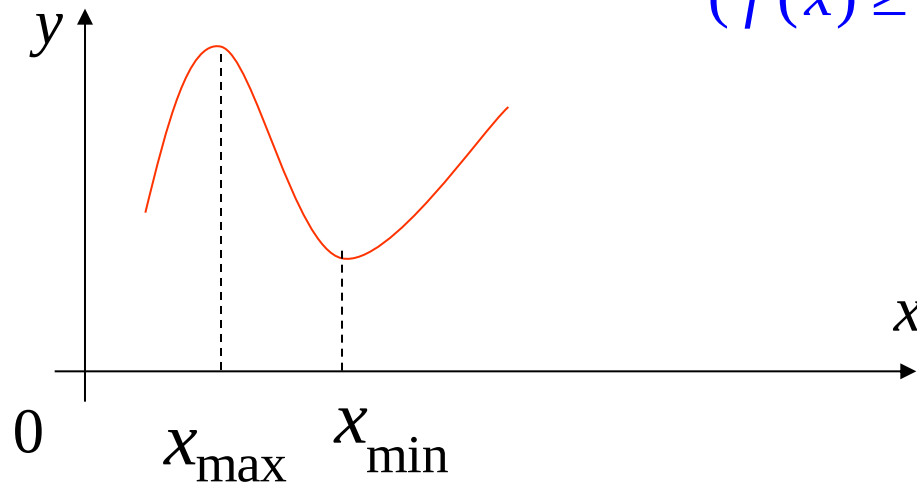


Определение экстремума функции

- Будем говорить, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 **максимум** (минимум), если **существует** окрестность $U(x_0)$, в каждой точке которой выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0), \quad x \in U(x_0)$$

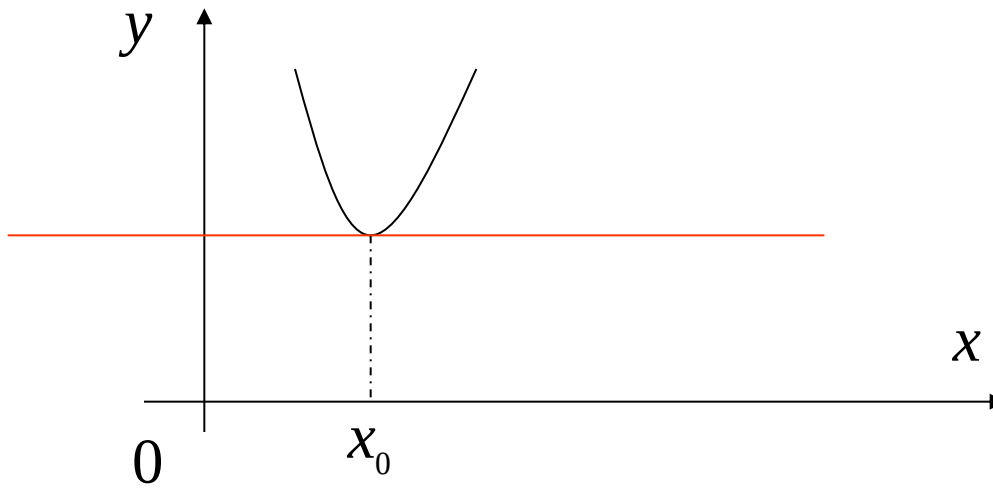
$$(f(x) \geq f(x_0), \quad x \in U(x_0)).$$



Необходимое условие экстремума

- **Теорема Ферма.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и достигает в этой точке экстремум, то

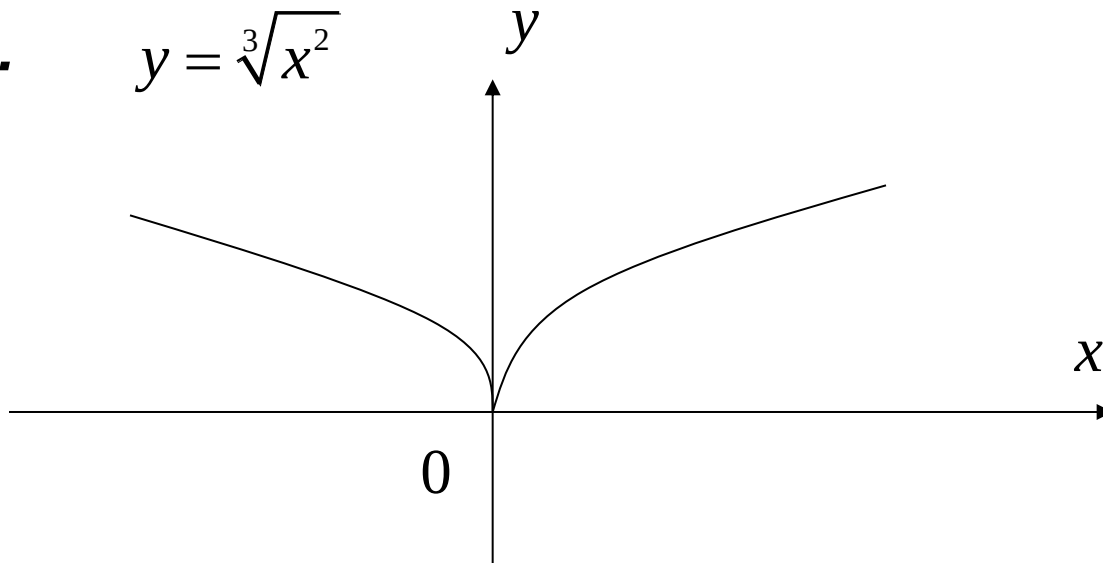
$$f'(x_0) = 0$$



Необходимое условие экстремума

- **Теорема 2.** Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, определённой в окрестности точки x_0 , то производная функции $f'(x_0)$ **либо не существует, либо равна нулю** $f'(x_0) = 0$.

- **Пример.**



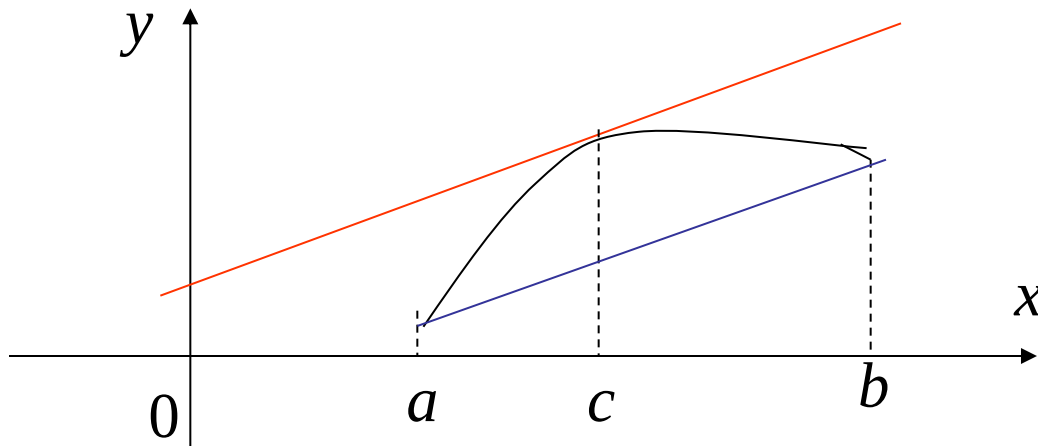
Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

- Пусть требуется найти **наибольшее и наименьшее** значения функции **на отрезке** $[a, b]$.
- Если функции непрерывны на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса существуют точки, в которых достигаются эти значения. Точки наибольшего или наименьшего значения **могут быть либо на концах отрезка, либо в точках, в которых производная равна нулю или не существует.**
- **Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x + \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Теорема Лагранжа

- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Теорема Коши

- Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причём $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$ то существует точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Следствие.

- Если функция на интервале (a, b) имеет **производную равную нулю, то она постоянна** на этом интервале.

Действительно, по теореме Лагранжа для любых точек $x_2 > x_1$ интервала (a, b) получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$$

Правило Лопиталья

- **Теорема.** Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 , и
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$
- причём $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0 . Тогда, если существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел отношения функций $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталя. Случаи бесконечно удалённой точки и отношения бесконечно больших функций.

Следствие 1. Правило Лопиталя сохраняется , если функции $y = f(x), y = g(x)$ бесконечно большие при $x \rightarrow x_0$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Следствие 2. Правило Лопиталя сохраняется и при $x_0 = \infty$.

Сравнение роста степенной, показательной и логарифмической функций.

- По правилу Лопиталя доказываются следующие равенства

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \alpha > 0, a > 1.$$

- Из этих равенств следует, что на бесконечности **степенная функция** растёт быстрее логарифмической, а **показательная** быстрее **степенной**.

Неопределённости вида

$$0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty, \infty^0$$

- Пример 1. $\lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x, \varepsilon > 0.$

- Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$

- Пример 3 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x.$

Исследование функции на монотонность

- Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (убывающей) на отрезке $[a, b]$, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ выполняется

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

- Теорема.** Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет в точках $x \in (a, b)$ производную

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{или} \quad f'(x) < 0$$

то **функция возрастает** (строго возрастает) на $[a, b]$

Справедливо аналогичное утверждение убывания функции при

$$f'(x) \leq 0 \quad (f'(x) < 0),$$

Первое достаточное условие экстремума.

- **Теорема.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой окрестности этой точки кроме, быть может, самой точки. **Если производная $y' = f'(x)$ меняет знак** при переходе через точку x_0 , то точка x_0 **является точкой экстремума.**

При этом, если знак меняется с $+$ на $-$, то точка x_0 является точкой максимума, если с $-$ на $+$, то x_0 - точкой минимума.

Пример

- Найти интервалы **монотонности** и исследовать на **экстремум** функцию

$$y = x^4 - 4x^3.$$