

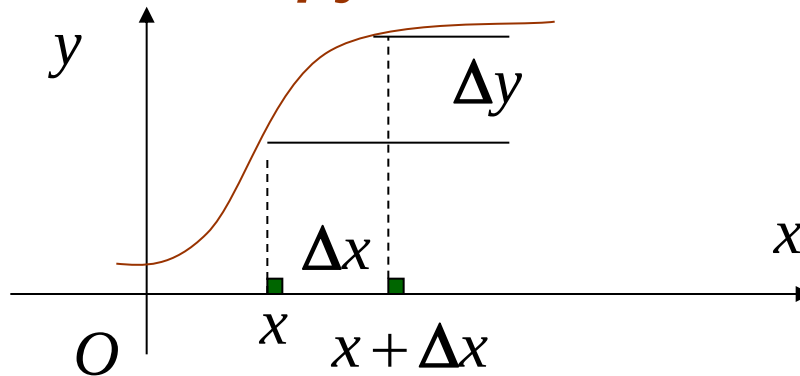
Производная и дифференциал

Лекция 4-5



Приращения функции и аргумента

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки x и $\tilde{x} \in U(x)$ произвольная точка из этой окрестности.
- Разность $\Delta x = \tilde{x} - x$ называется **приращением аргумента**.
- Разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется **приращением функции**.



Определение производной. Физическое истолкование

- Если существует конечный предел $y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- отношения приращения функции к приращению аргумента, то этот предел называется производной функции в точке x и обозначается $y'(x)$, либо $f'(x)$.
- Если $s = s(t)$ - путь, пройденный материальной точкой за время, то $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ - путь, пройденный за время Δt . **Производная пути**

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

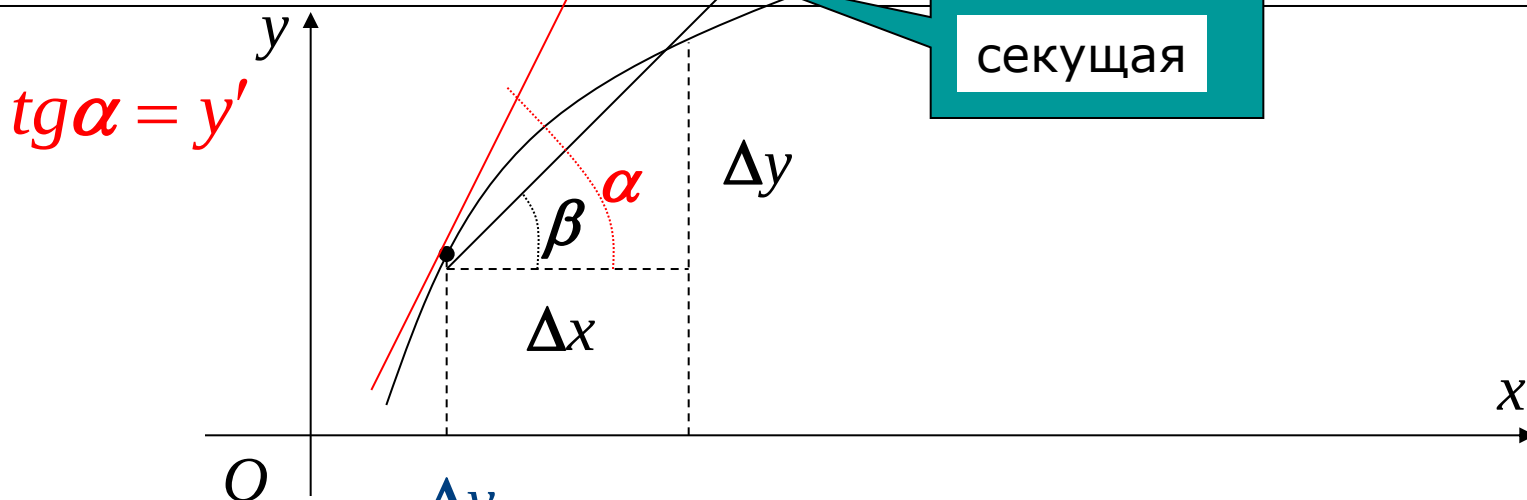
- **по времени равна мгновенной скорости** в точке t .

Геометрическое истолкование производной

касательная

касательная

секущая



- Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$ равно тангенсу угла наклона **секущей** к оси абсцисс, а производная равна
- $y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ тангенсу угла наклона **касательной** к оси абсцисс

Правила дифференцирования

- Если функции $u(x), v(x)$ имеют производные в точке x , то их сумма $u(x) + v(x)$, произведение $u(x) \cdot v(x)$ и частное $\frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$ также имеют производные в этой точке и справедливы формулы

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Таблица производных элементарных функций

$$c' = 0, c \equiv \text{const}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Дифференцируемость функции

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки x . Если приращение функции в точке x можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

- (A – константа) то функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x .
- **Теорема.** Для того чтобы функция $y = f(x)$ была **дифференцируема в точке x , необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную $f'(x)$ в точке x .**

Дифференциал

- **Следствие** .Если функция дифференцируема, то справедливо равенство

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

- **Главная часть приращения** функции называется **дифференциалом** и обозначается dy . Таким образом $dy = f'(x) \cdot dx$, где $dx = \Delta x$.

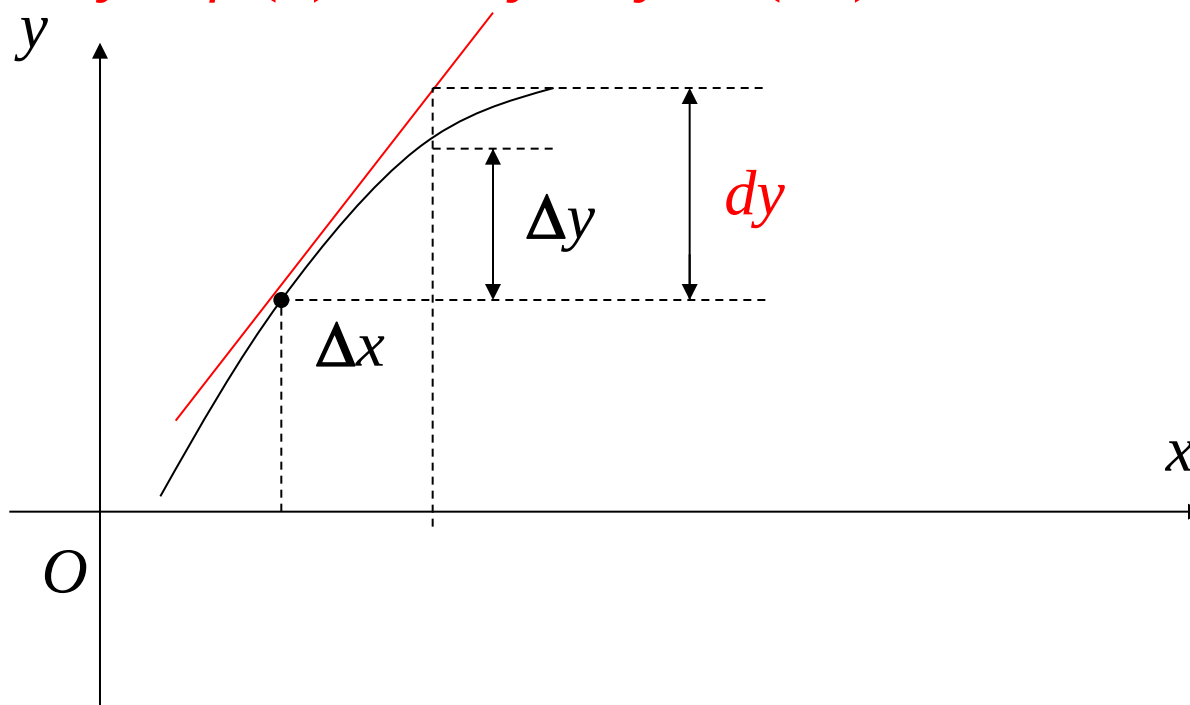
- Отсюда получаем

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Геометрическое истолкование дифференциала

- Из определения дифференциала следуют равенства

$$dy = f'(x)dx, \quad \Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$



Необходимое условие дифференцируемости функции

- **Теорема.** Если функция **дифференцируема** в точке x , то она **непрерывна** в этой точке.
- Пример. В каких точках функция

$$y = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

заведомо не дифференцируема?

Дифференциал суммы, произведения и частного

- Справедливы равенства

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(u \cdot v) = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Приближённые вычисления с помощью дифференциала

- Согласно определению дифференциала справедлива асимптотическая формула

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

- Пример. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{8,1}$.
- Запишем асимптотическую формулу для $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} = \sqrt[3]{x_0} + (\sqrt[3]{x})' \Big|_{x=x_0} \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

$$\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} = \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

$$\sqrt[3]{8,01} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} 0,1 = 2 + \frac{0,1}{12} \approx 2,008$$

Дифференцирование сложной функции

- **Теорема.** Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Следствие. Инвариантность формы первого дифференциала

- Пусть выполняются условия теоремы о дифференцировании сложной функции. Тогда справедливо равенство

$$dy = y'_u du,$$

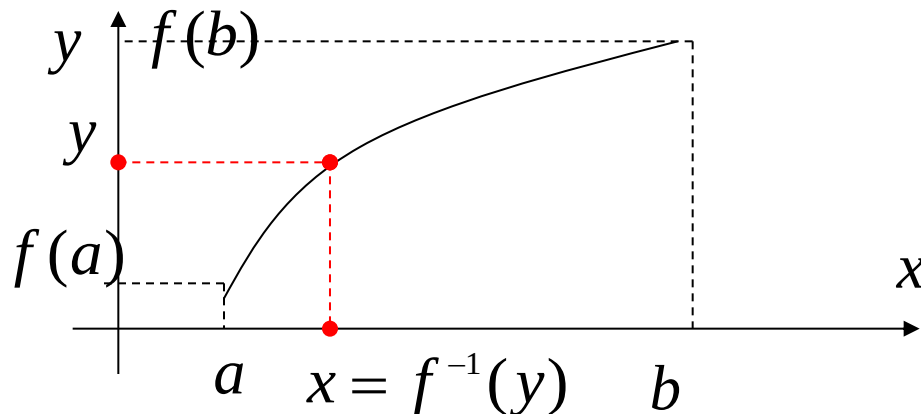
- где dy - дифференциал **сложной функции** $y = f(g(x))$,
а du - дифференциал функции $u = g(x)$.

Определение обратной функции

- Функция $y = f(x)$ называется **строго возрастающей** (строго убывающей) на отрезке $[a, b]$, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ выполняется
$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$
- Строго возрастающая или строго убывающая функция называется **строго монотонной**.
- Пусть функция $y = f(x)$ является строго монотонной на отрезке $[a, b]$. Функция $x = f^{-1}(y)$ определённая на отрезке с концами $f(a), f(b)$, называется **обратной**, если $f^{-1}(f(x)) = x, x \in [a, b]$.

Непрерывность обратной функции

- Если функция $y = f(x)$ **строго монотонна** и **непрерывна** на отрезке $[a, b]$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке с концами $f(a), f(b)$



- Причём, если $y = f(x)$ строго возрастает (строго убывает), то и обратная $x = f^{-1}(y)$ строго возрастает (строго убывает), соответственно.

Пример

- Функция $y = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ непрерывна, но не строго монотонна. Множество значений функции заполняет отрезок $y \in [-1; 1]$. При этом, каждому значению $y \in [-1; 1]$ соответствует бесконечно много значений $x \in (-\infty; +\infty)$. Т.е. обратная функция к $y = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ будет **многозначной** функцией. Поэтому для определения обратной функции надо рассмотреть функцию $y = \sin x$ на отрезке, $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Обратная функция
$$x = \arcsin y, \quad y \in [-1, 1]$$
- Строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-1, 1]$.

Дифференцирование обратной функции

- **Теорема.** Если функция $y = f(x)$ строго **монотонна, непрерывна** в окрестности $U(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0 , тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также имеющая в точке $y_0 = f(x_0)$ производную

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0.$$

- **Примеры.** $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arcc}tg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Неявные функции

- Пусть дано уравнение вида $F(x, y) = 0$.
- Рассмотрим множество D такое, что для каждого $x \in D$ существует хотя бы одно число y , удовлетворяющее уравнению $F(x, y) = 0$.
Обозначим одно из этих чисел через $y = f(x)$.
Таким образом, функция $y = f(x), x \in D$ задаётся уравнением
$$F(x, f(x)) = 0$$
- Говорят, что функция задаётся **неявно** уравнением
$$F(x, y) = 0.$$

Дифференцирование неявной функции

- Пример. Найти уравнение касательной к кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- в точке (x_0, y_0)

Производная степенно-показательной функции.

- *Степенно-показательной функцией* называется функция вида

$$y = u(\textcolor{red}{x})^{v(\textcolor{red}{x})}.$$

- Справедлива формула

$$y' = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x).$$

- Пример. Найти производную функции

$$y = (\sin \textcolor{red}{x})^{\textcolor{red}{x}}.$$

Производная функции, заданной параметрически

- Пусть в окрестности $U(t_0)$ заданы функции

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in U(t_0) \quad (\textcolor{red}{P})$$

- и предположим, что $x = x(t)$ имеет обратную в рассматриваемой окрестности, тогда уравнения ($\textcolor{red}{P}$) определяют функцию $y = y[t^{-1}(x)] = y(x)$, зависящую от x . Справедлива формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Примеры

- Окружность $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi.$
- Эллипс $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi.$
- Циклоида $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} -\infty < t < +\infty.$