

Односторонние пределы. Классификация разрывов

Лекция 3

Определение одностороннего предела

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, x_0) (соответственно, на интервале (x_0, b)). Число A называется **пределом слева (справа)** функции $f(x)$ в точке x_0

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad (A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x))$$

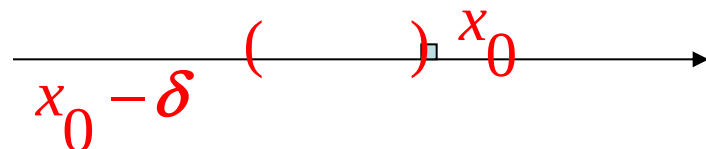
- если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x_0 - \delta < x < x_0$ (соответственно $x_0 < x < x_0 + \delta$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Обозначим $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

Односторонние окрестности

- По аналогии с обычным пределом можно дать определение одностороннего предела с помощью односторонних проколотых окрестностей

$$\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0), \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_{\delta} + 0) = (x_{\delta}, x_{\delta} + \delta).$$



- Аналогичным образом определяются также односторонние бесконечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$$

Предел при $x \rightarrow \pm\infty$

- Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x > M$ ($x < -M$) для некоторого $M \geq 0$.
- Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к $+\infty$ ($-\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $L > 0$ такое, что для всех x таких, что $x > L$ ($x < -L$) выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение точки разрыва функции

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ кроме, быть может, самой точки x_0 .
- Если функция не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке, то точка x_0 называется **точкой разрыва** функции.
- Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции $y = f(x)$, если предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ **существует**, но не равен значению функции в точке x_0 .
Функцию, имеющую устранимый разрыв в точке x_0 , можно **переопределить** в этой точке, полагая $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и получить непрерывную функцию.

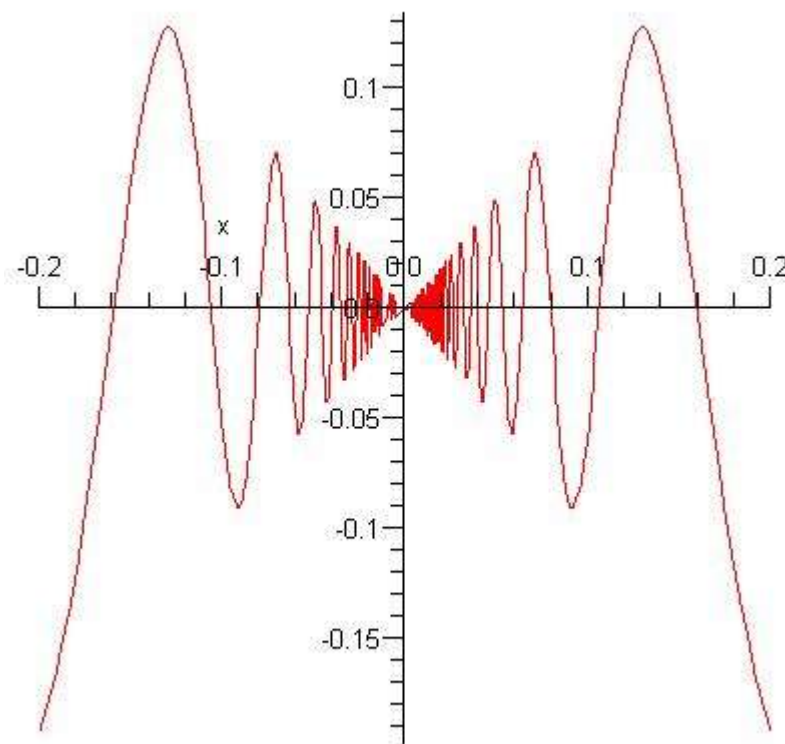
Пример устранимого разрыва

- Функция $y = x \sin \frac{1}{x}$ имеет **устранимый разрыв** в точке 0, так как функция не определена в этой точке и существует предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

- Функция
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- непрерывна!**

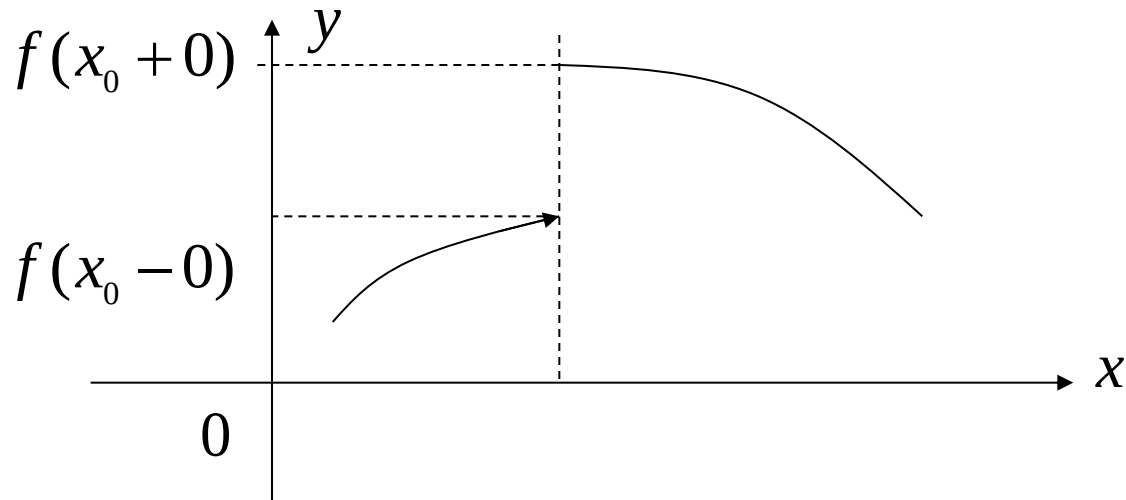


Разрыв первого рода

- Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* если существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

- и они не равны $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$



Пример

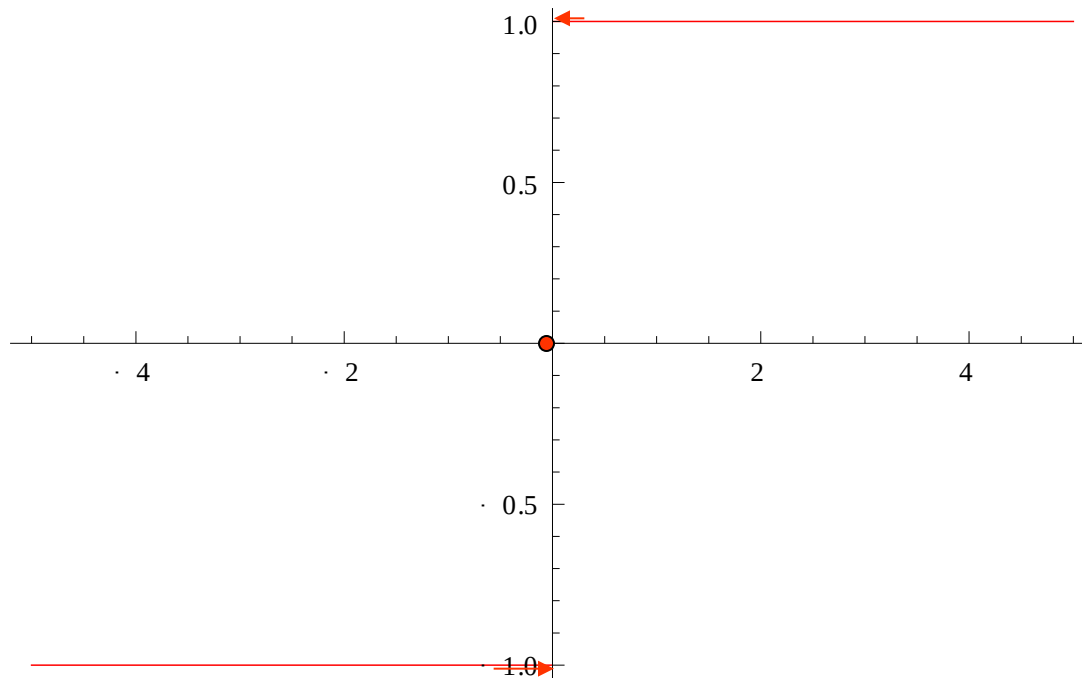
- Функция $y = \operatorname{sign} x$ имеет разрыв первого рода в точке $x = 0$.

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{для } x > 0 \\ 0 & \text{для } x = 0 \\ -1 & \text{для } x < 0 \end{cases} .$$



График функции «signum»

- Итак

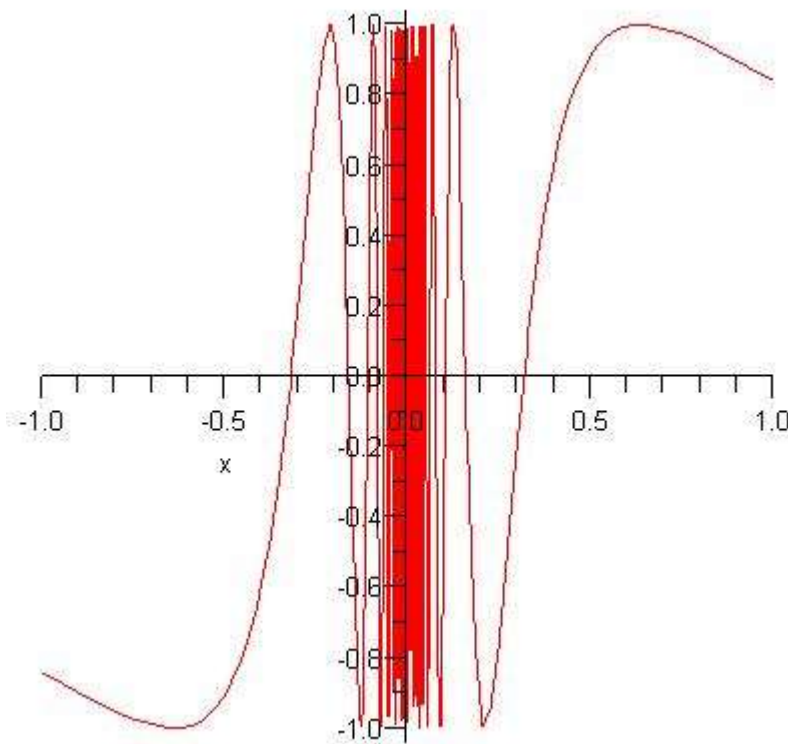


Разрыв второго рода

- Если в точке разрыва функция **не имеет предел** или **не имеет хотя бы один односторонний предел**, в том числе, когда хотя бы один односторонний предел бесконечен, называется ***точкой разрыва второго рода***.
- Таким образом, *точка разрыва, которая не является точкой устранимого разрыва или разрыва первого рода*, называется ***точкой разрыва второго рода***.
- Если хотя бы один односторонний предел бесконечен, то будем говорить также, что в точке ***бесконечный разрыв***.

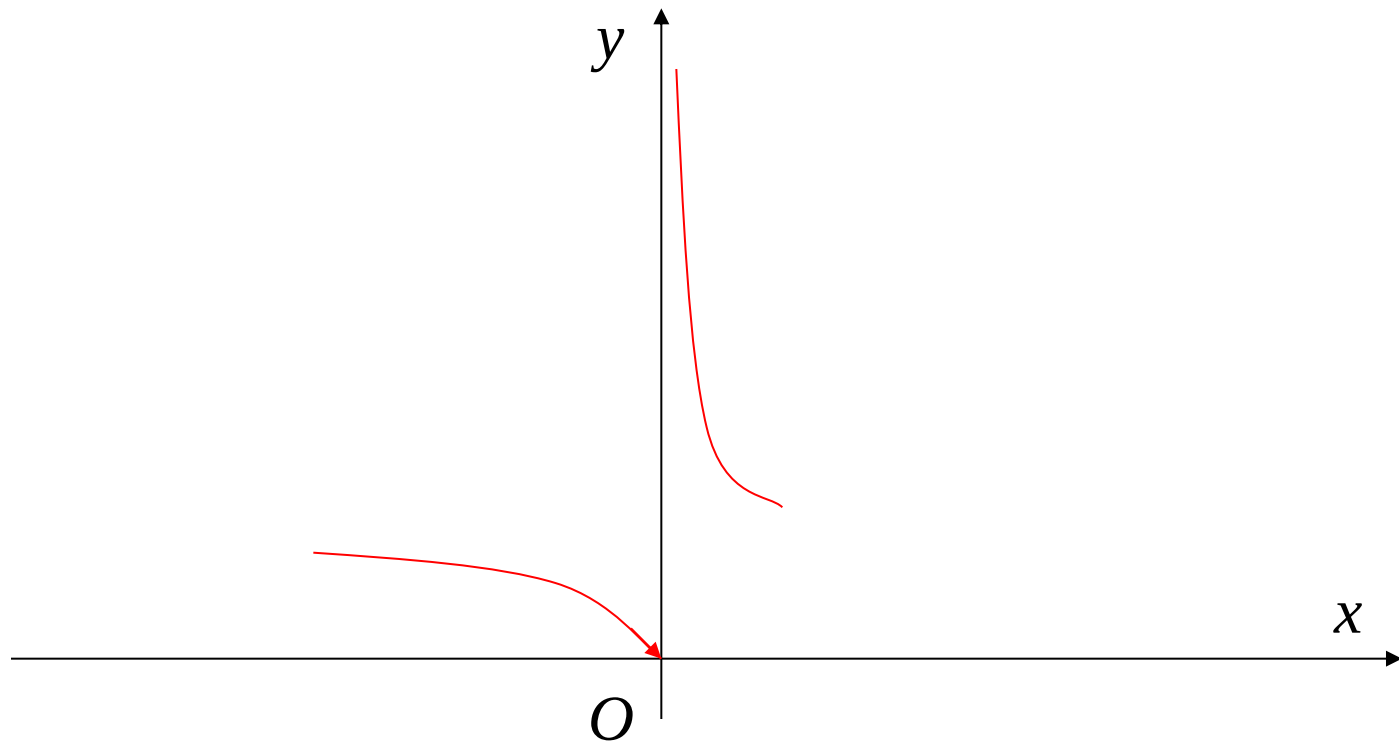
Пример разрыва второго рода

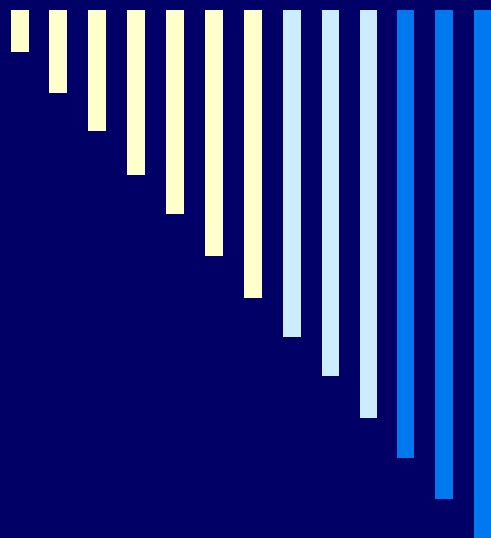
- Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода



Пример разрыва второго рода (бесконечного разрыва)

- Функция $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода (бесконечный разрыв)

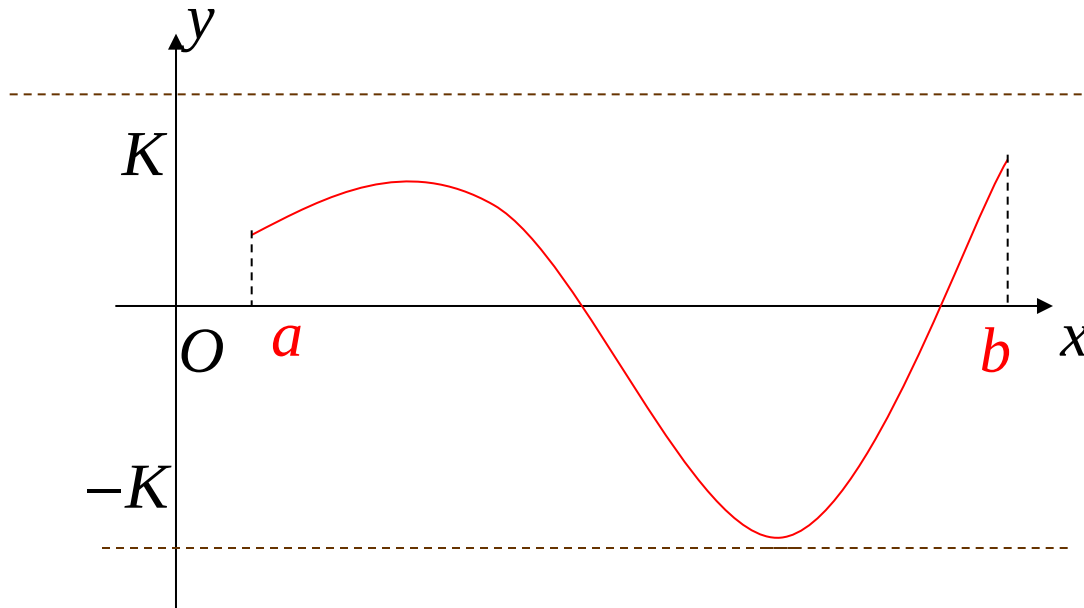




Свойства функций непрерывных на отрезке

Теорема 1

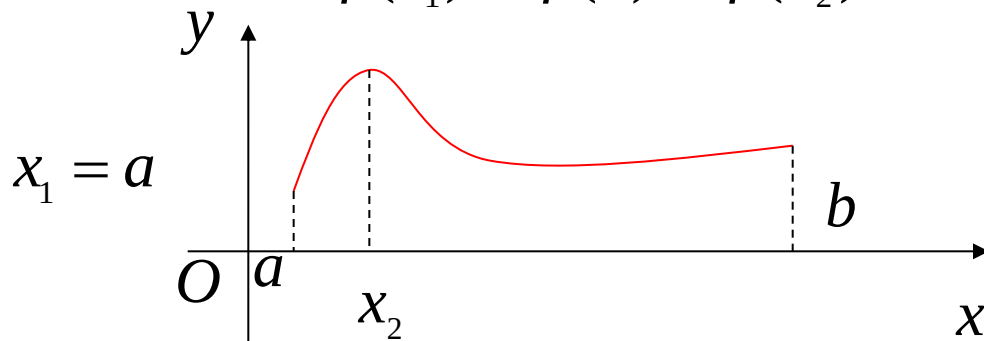
- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нём, т.е. существует число $K > 0$ такая, что $|f(x)| \leq K$ для всех точек x из отрезка $[a, b]$.



Теорема 2 (Вейерштрасса)

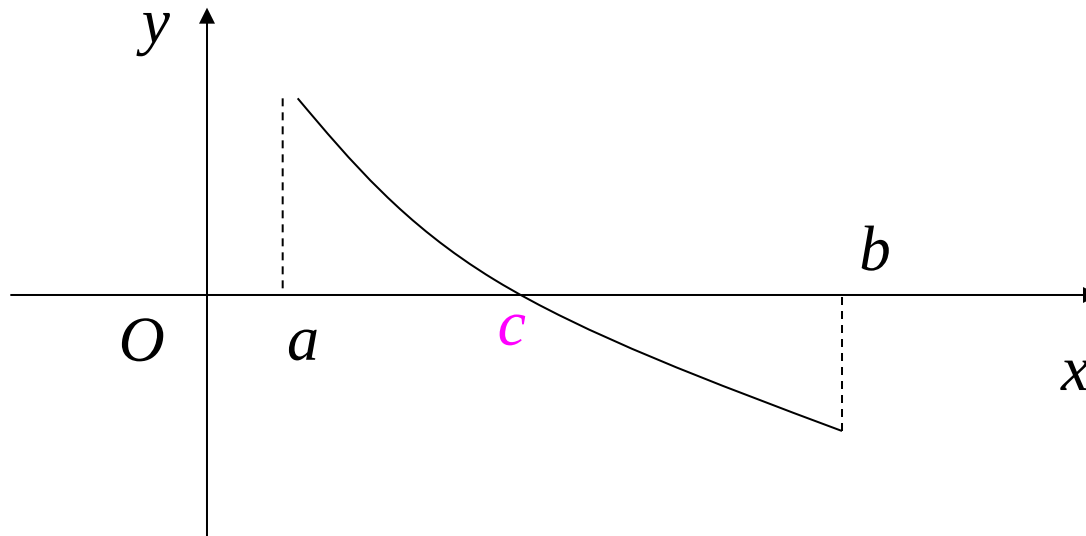
- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют точки x_1, x_2 , принадлежащие отрезку $[a, b]$, такие, что для любых точек x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$



Теорема 3

- Если функция $y = f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$ и принимает на концах отрезка разные знаки, то существует **хотя бы одна** точка $c \in (a, b)$ внутри отрезка такая, что $f(c) = 0$.



Теорема о промежуточном значении

- Если функция $y = f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$ и M - наибольшее значение функции на отрезке, а m – наименьшее, то функция $y = f(x)$ принимает все значения функции из отрезка $y \in [m, M]$.

Пример

- Найти интервал, содержащий корень уравнения
$$2^x + x - 2 = 0.$$