

Непрерывность функции. Замечательные пределы

Лекция 2

Определение непрерывности. Теорема о непрерывности суммы, произведения и частного функций

- Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если она **определена в точке x_0** и в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **Теорема.** Если функции $y = f(x), y = g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x)g(x)$ частное $\frac{f(x)}{g(x)}, g(x_0) \neq 0$ непрерывны в точке x_0 .

Непрерывность элементарных функций

- Функции C (постоянная), x^α (степенная), a^x (показательная), $\log_a x$ (логарифмическая), тригонометрические и гиперболические функции называются элементарными функциями.
- **Теорема 1.** Элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены.

Непрерывность сложной функции

- **Теорема 2.** Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , и функция $y = f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Гиперболические синус и косинус

- Гиперболический синус определяется формулой

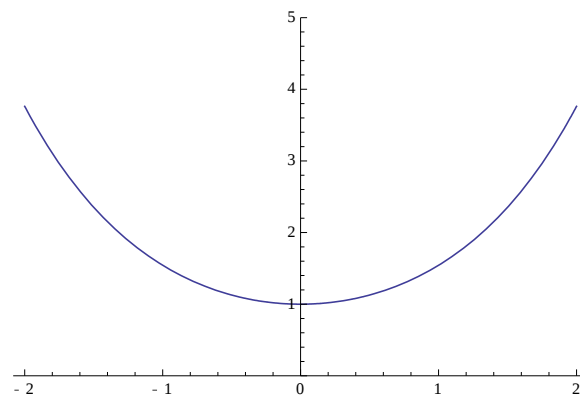
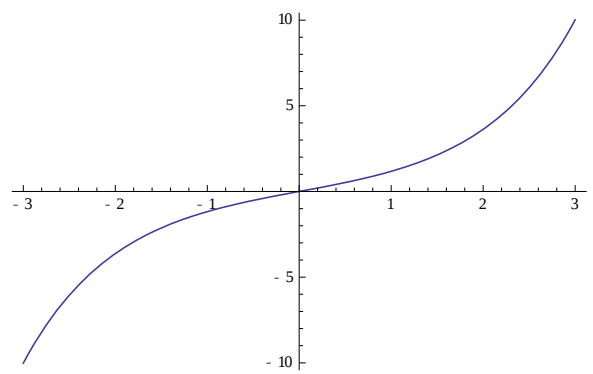
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in R.$$

- Гиперболический косинус –
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in R.$$

- Справедливо «основное тождество»

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

- Графики функций имеют вид 



Гиперболические тангенс и котангенс

- Гиперболический тангенс определяется формулой

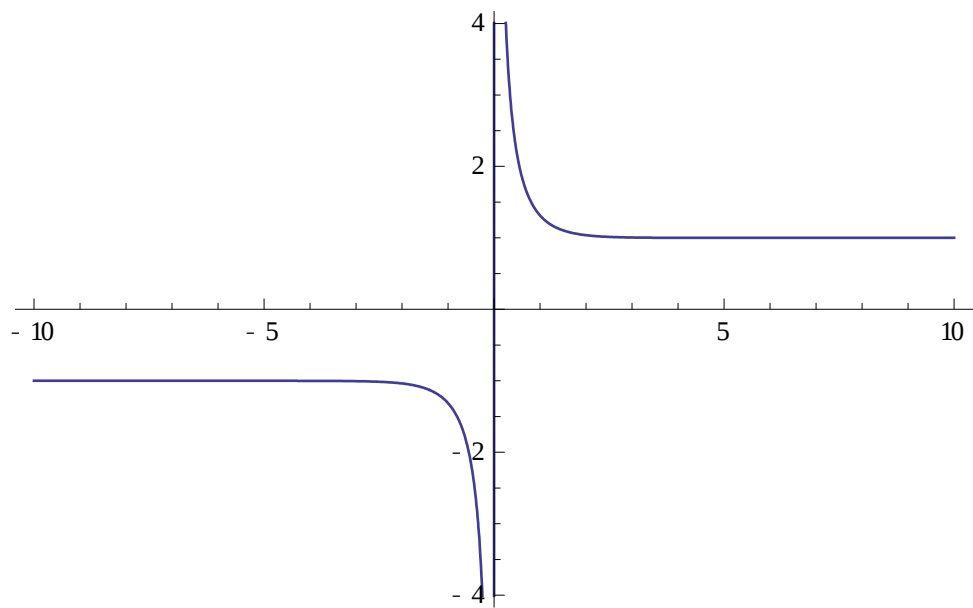
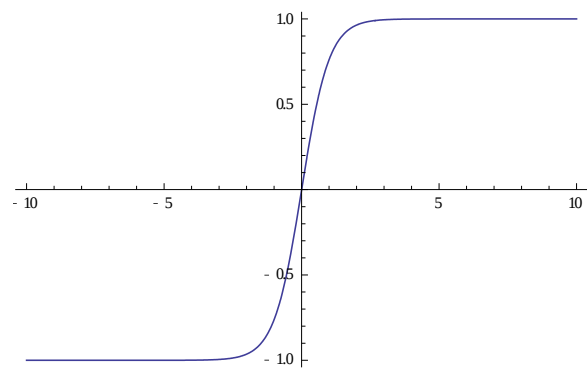
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Гиперболический котангенс, соответственно:

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0.$$

- Графики функций имеют вид





Первый замечательный предел

- Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

- Теорема.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

- Пример. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{x^2-1}}$$

Эквивалентные функции

- Функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются **эквивалентными** при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.
- Если $\alpha(x), \beta(x)$ эквивалентные функции при $x \rightarrow x_0$, то пишут $\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow x_0$,
- Из первого и второго замечательных пределов получаем **таблицу эквивалентных**:

$$\sin x \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0$$

Теорема о замене эквивалентными при вычислении пределов

- **Теорема.** Если $\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

- **Пример.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x^2} - 1}{1 - \cos 3x}$$

Сравнение бесконечно малых функций.

- Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** функцией при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.
- Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка**, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

- Пример. $\sin^2 x = o(x)$, $x \rightarrow 0$.

Теорема об асимптотическом равенстве эквивалентных

- **Теорема.** Необходимым и достаточным условием эквивалентности функций $\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \rightarrow x_0$ является **асимптотическое равенство**

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad x \rightarrow x_0$$

- **Пример.** Из таблицы эквивалентных вытекают следующие **асимптотические** равенства:

$$\sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$e^x - 1 = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

Выделение главной части функции

- Если существуют числа A и k такие, что справедливо

$$\alpha(x) = A(x - x_0)^k + o(x - x_0)^k, x \rightarrow x_0,$$

- то функция $A(x - x_0)^k$ называется **главным членом асимптотики** функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$
- Пример. Найти главный член асимптотики функции

$$\alpha(x) = \sqrt{4 + \sin 3x^2} - 2$$

при $x \rightarrow 0$.

Символ O (О большое)

- Будем писать $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, если существует проколота окрестность $\dot{U}(x_0)$ и константа $C > 0$ такая, что $|f(x)| \leq C|g(x)|$ для всех $x \in \dot{U}(x_0)$.
- **Пример.** Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то
$$f(x) = O(1), x \rightarrow x_0$$

так как $f(x)$ ограничена в некоторой проколоте окрестности точки x_0 .

Бесконечно большие функции

- Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** функцией при $x \rightarrow x_0$, **если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует проколота окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что**

$$|f(x)| > M, x \in \dot{U}(x_0).$$

- Будем писать в этом случае $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.
- Если бесконечно большая функция положительна в $\dot{U}(x_0)$ то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, если отрицательна, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

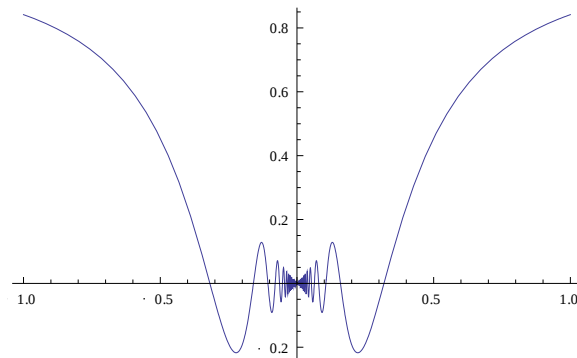
- Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями справедливы соотношения аналогичные для бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.
- Если $f(x)$ **ограничена** в $\dot{U}(x_0)$, а $g(x)$ - **бесконечно большая** при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ **бесконечно малая** функция при $x \rightarrow x_0$.
- Если $|f(x)|$ **ограничен снизу** положительным числом в $\dot{U}(x_0)$, а $\alpha(x)$ **бесконечно малая** при $x \rightarrow x_0$, то $f(x)/\alpha(x)$ - бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$.
- 3. Произведение **бесконечно малой** на **ограниченную** является **бесконечно малой**.

Пример

- Справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

- График функции 



Примеры

Вычислить пределы

- 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2+x) - \ln x)$
- 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \sin \frac{x-1}{2}$
- 3. Найти главную часть (главный член асимптотики) функции
$$\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x, x \rightarrow 0$$