

Образцы типовых практических заданий по курсу «Прикладные методы математической физики» для студентов специальности АТ, 5 семестр

Задание №1.

Найти собственные числа и собственные функции следующей краевой задачи (задача Штурма-Лиувилля):

$$y'' + \mu y = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\frac{3}{2}\pi) = 0, \quad \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi.$$

Задание №2.

Найти отклонение от равновесия $u(x,t)$ закреплённой на концах $x=0$, $x=1$ однородной, горизонтальной струны, если в начальный момент времени струна находилась в положении равновесия и ей была придана скорость $\sin 5\pi x$.

Задание №3. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности $u_t = 9u_{xx}$, $0 \leq x \leq 5$, $t > 0$.

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 5/2 \\ 5-x, & 5/2 \leq x \leq 5 \end{cases}, \quad u(0,t) = 5, \quad u(5,t) = 0.$$

Задание №4.

Определить тип уравнения и найти общее решение, приведя уравнение к каноническому виду

$$1. \quad u_{xx} + 14u_{xy} + 49u_{yy} + 2u_x + 14u_y = 0$$

$$2. \quad 2u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

Задание №5.

1. Включается ли экстремаль данного функционала в поле экстремалей:

$$I(y) = \int_0^2 (y'^3 + \sin^2 x) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 1$$

2. Исследовать на экстремум функционал

$$I(y) = \int_0^1 (y'^3 + y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

Задание №6.

1. Для заданного случайного процесса $X(t) = A \sin(3t + \Phi)$, где с.в. A имеет нормальное распределение $(2,1)$, а Φ - равномерное на $[-\pi, \pi]$. С.в. A и Φ - независимы. определить

1) является ли процесс стационарным в широком смысле?

2) Дифференцируем ли процесс? Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию производной.

3) Является ли процесс эргодическим относительно математического ожидания.

4) Будет ли процесс стационарно связным с процессом $X(t) = B \cos(\omega t + \Phi)$, где B -независимая от Φ случайная величина.

2. На входы линейных динамических систем

а) $Y'(t) + 3Y(t) = X(t)$ поступает телеграфный сигнал $X(t)$, принимающий заданные значения $a = 4$ и $b = 1$ и параметром распределения Пуассона $\lambda = 1$,

б) $Y''(t) + 5Y'(t) + 4Y(t) = 2U(t)$, $U(t)$ - белый шум.

Найти а) математическое ожидание и дисперсию на выходе.

в) ковариационную функцию и дисперсию на выходе.