# §1.*Определители и их свойства.*

**Опр.1**.

Пусть дана таблица из 4-х чисел, которую будем называть КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЕЙ.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ 2-го порядка называется число, обозначаемое $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляемое по правилу $\Delta = a_{11} - a_{22}$ (1).

Пример: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$

**Опр.2.**

Пусть дана таблица из 3-х чисел, то есть КВАДРАТНАЯ матрица. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ третьего порядка называется число, обозначаемое как $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и вычисляемое по формуле:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (2)$$

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

**Опр. 3.**

МИНОРОМ какого-либо элемента $a_{ij}$ данного определителя называется определитель, который получается из данного путем вычёркивания из него i-ой строки и j-ого столбца.

Пример:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**Опр.4.**

АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛНЕНИЕМ данного элемента определителя называется число

$$A = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

где i- номер строки, j- номер столбца.

Пример:

$$A_{ij} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

***Свойства определителей:***

**ТЕОРЕМА№1.** (о разложении определителя по элементам строки или столбца).
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их соответствующие алгебраические дополнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Разложим определитель третьего порядка по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Сравнив с (2)-видим, что получается то же самое. Что и требовалось доказать.

**Опр. 5.**

Замена строк столбцами называется ТРАНСПОНИРОВАНИЕМ определителя.

**ТЕОРЕМА№2.**(о транспонировании определителя).
«При транспонировании определитель не изменяется»

**ТЕОРЕМА№3**. (об умножении определителя на число).
«Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя, то есть

$$\begin{vmatrix} \kappa a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \kappa a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \kappa a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Или: если определитель умножается на число, то на это число умножаются все элементы какой-либо одной строки (столбца).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{vmatrix} \kappa a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \kappa a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \kappa a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{теор.1} = \kappa a_{11}A_{11} + \kappa a_{21}A_{21} + \kappa a_{31}A_{31} = \kappa(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) = \text{теор.1} =$$

$$= \kappa \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА№4.** (о замене местами двух строк или двух столбцов)
При замене местами двух строк или двух столбцов знак определителя меняется на противоположный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: легко провести, используя формулу (2).

**ТЕОРЕМА№5**.(первый признак нулевого определителя).

Определитель, имеющий нулевую строку или нулевой столбец, равен 0
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
Нулевую строку (столбец) можно представить как строку каких-то чисел, умноженных на 0, а согласно теореме 3, в этом случае весь определитель умножается на 0:

$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0a_{11} & a_{12} \\ 0a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ =теор.3=0 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ =0 Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА№6**. (второй признак нулевого определителя).
Определитель, имеющий две одинаковые строки или два одинаковых столбца,=0
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
При замене местами двух одинаковых строк (столбцов) в определителе ничего не меняется, однако, согласно теореме 4, знак определителя при этом должен поменяться на противоположный. А это возможно только тогда, когда $\Delta = 0$

**ТЕОРЕМА№7**. (о сложении определителей).
Если элементы какой-либо строки (столбца) представить в виде суммы, то такой определитель можно разбить на сумму двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 + a_{11}^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^1 + a_{21}^2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^1 + a_{31}^2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta_2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\begin{vmatrix} a_{11}^1 + a_{11}^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^1 + a_{21}^2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^1 + a_{31}^2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ =теорема1= $\left(a_{11}^1 + a_{11}^2\right)A_{11} + \left(a_{21}^1 + a_{21}^2\right)A_{21} + \left(a_{31}^1 + a_{31}^2\right)A_{31} =$

$\left(a_{11}^1 A_{11} + a_{21}^1 A_{21} + a_{31}^1 A_{31}\right) + \left(a_{11}^2 A_{11} + a_{21}^2 A_{21} + a_{31}^2 A_{31}\right)$ =теорема1= $\Delta_1 + \Delta_2$ Что и треб. доказать.

**ТЕОРЕМА№8**. (о тождественном преобразовании определителя).
Если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить числа, пропорциональные соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель от этого не изменится.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\begin{vmatrix} a_{11} + \kappa a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \kappa a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \kappa a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = теорема 7= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \kappa a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \kappa a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ =теорема 3=

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ =теорема 6 = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

**ТЕОРЕМА№9**. (о нулевом разложении определителя).
Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0. То есть:
$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

# §2 Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.

Уравнения (система уравнений), содержащие неизвестные только в первой степени, называются линейными.
Рассмотрим квадратную системы, когда число неизвестных равно числу уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

где $x_1, x_2 ... x_n$ - неизвестные, а $a_{ij}$ -коэффициенты системы(заданные числа). $b_1, b_2 ... b_n$ - свободные члены (заданные числа)
Если хотя бы один из свободных членов не равен 0, то система 1 называется *неоднородной*. Если же все свободные члены=0, то получаем систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

которая называется *однородной*.
Далее для краткости будем рассматривать частный случай системы трёх уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (3)$$

Из коэф. системы (3) составим определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, который называется *главным* определителем системы.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, называются *дополнительными* определителями.

Будем считать, что $A_{ij}$ представляет собой алгебраич. дополнение соответствующего элемента главного определителя.
Домножим первое уравнение системы (3) на алгебраическое дополнение $A_{11}$, второе на $A_{21}$,третье на $A_{31}$

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + A_{11}a_{13}x_3 = A_{11}b_1 \\ A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + A_{21}a_{23}x_3 = A_{21}b_2 \\ A_{31}a_{31}x_1 + A_{31}a_{32}x_2 + A_{31}a_{33}x_3 = A_{31}b_3 \end{cases} \qquad \text{складываем}$$

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})x_2 + (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})x_3 =$$
$$= A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3$$

Анализируя полученное с учётом теорем 1 и 9 в §1 получаем $\Delta x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \Delta_1$

Если теперь первое уравнение системы (3) умножить на $A_{12}$, второе на $A_{22}$, третье на $A_{32}$, то аналогично мы получим

$0x_1 + \Delta x_2 + 0x_3 = \Delta_2$

Повторяя процедуру третий раз, мы получим

$0x_1 + 0x_2 + \Delta x_3 = \Delta_3$

Таким образом имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta_1 \\ \Delta x_2 &= \Delta_2 \\ \Delta x_3 &= \Delta_3 \end{aligned}\right\} \quad (4) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases} \qquad \text{(5) – ФОРМУЛЫ КРАМЕРА.}$$

---

Формулы (4),(5) позволяют легко доказать следующую теорему:

**ТЕОРЕМА№1**

1.) Если главный определитель системы (1) или (3) $\neq 0$, то система имеет единственное решение.
2.) Если главный определитель системы (1) или (3) =0 и все дополнительные определители =0, то система имеет множество решений
3.) Если главный определитель системы (1) или (3) =0, а хотя бы один из дополнительных определителей $\neq 0$, то система решений не имеет и называется в этом случае НЕСОВМЕСТНОЙ.

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

На основании теоремы 5 §1 очевидно, что все дополнительные определители системы = 0. Следовательно в этом случае формулы (4) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= 0 \\ \Delta x_2 &= 0 \\ \Delta x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Это позволяет легко доказать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА№2.**

1.) Если главный определитель однородной системы (6) $\Delta \neq 0$, то однородная система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3$=0, которое называется ТРИВИАЛЬНЫМ.
2.) Если главный определитель однородной системы (6) $\Delta = 0$, то имеем бесчисленное множество решений.

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

Решений нет, система несовместна.

# §3 Векторная алгебра. Определение вектора.

**Опр.1.**

ВЕКТОР- направленный отрезок прямой, для которого каким-то образом заданы длина и направление.


**Опр.2.**

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой называются КОЛЛИНЕАРНЫМИ.

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ - коллинеарны и сонаправлены.

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ - коллинеарны и противоположно направлены.

**Опр.3.**

Длина вектора называется его модулем. $\left|\vec{a}\right|$

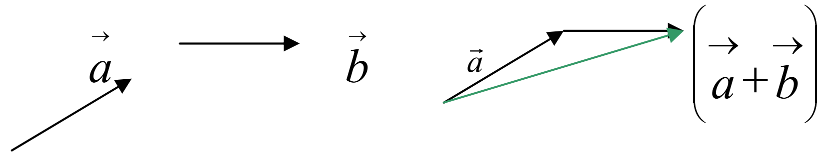
**Опр.4.**

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются РАВНЫМИ, если они коллинеарны, сонаправленны и при этом имеют одинаковые модули, то есть $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

# §4 Линейные действия над векторами.

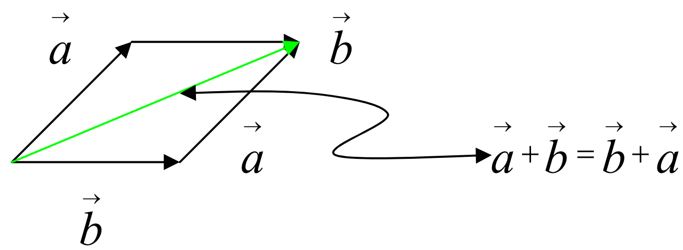
**Опр.1.**

СУММОЙ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый как $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ и получаемый по правилу треугольника: «если конец вектора $\vec{a}$ совместить с началом вектора $\vec{b}$ и затем построить вектор из начала первого вектора в конец второго, то данный вектор будет являться суммой этих векторов. »




**ТЕОРЕМА 1.**

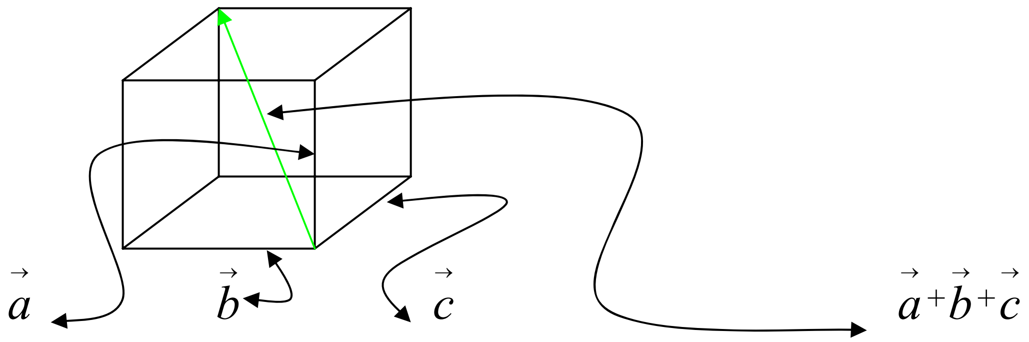
Сумма векторов обладает свойством коммутативности $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



СЛЕДСТВИЕ:

Т.о. сумма $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах.

Аналогично можно показать, что сумма трёх векторов представляет собой диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах.




**Опр.2.**

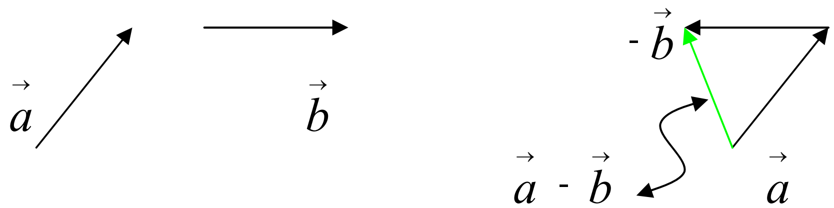
Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется НУЛЕВЫМ ВЕКТОРОМ. « $\vec{0}$ »

**Опр.3.**

Два вектора называются противоположными, если они имеют одинаковые модули, коллинеарны и противоположно направлены. Вектор, противоположный $\vec{a}$, обозначается - $\vec{a}$. При этом противоположные векторы обладают свойством $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

**Опр.4.**

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый как $\vec{a}-\vec{b}$ и представляющий собой сумму векторов $\vec{a}+(-\vec{b})$




**Опр.5.**

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, то есть $\vec{a} \,||\, \lambda\vec{a}$, и имеющий модуль равный $|\lambda| \bullet \left|\vec{a}\right|$.

Произведение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

1.) $0*\vec{a}=\vec{0}$

2.) $\lambda*\vec{0}=\vec{0}$

3.) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

4.) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

5.) $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=(\lambda\mu)\vec{a}$

6.) $\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}=n\vec{a}$, $n\in N$

## *§5. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и пространстве.*

**Опр.1.**
Пусть дана совокупность из n векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ldots\vec{a}_n$ и совокупность из n чисел $\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_n$.
Тогда сумма произведений $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$ (1)
называется ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ ВЕКТОРОВ.

**Опр.2.**
а) совокупность векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ldots\vec{a}_n$ называется ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМОЙ, если их линейная комбинация может быть равна 0 только в том случае, когда все числа $\lambda_i=0$
б) Совокупность векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ldots\vec{a}_n$ называется ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМОЙ, если их линейная комбинация может быть равна 0, когда не все числа $\lambda_i=0$. То есть

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda\vec{a}_n=\vec{0} \qquad (2)$$

Линейно зависимые вектора обладают двумя свойствами:

**ТЕОРЕМА 1** Хотя бы один вектор из совокупности линейно зависимых векторов может быть представлен линейной комбинацией остальных. То есть, если имеется совокупность линейно зависимых векторов $\alpha\vec{a}+\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$ (*),то
$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$ (3) - есть РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА $\vec{a}$ по векторам $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ldots\vec{a}_n$
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
В (*) переносим все слагаемые кроме первого слева-направо и делим всё на $\alpha$.

$$\vec{a}=-\frac{\alpha_1}{\alpha}\cdot\vec{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha}\cdot\vec{a}_2-\ldots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\cdot\vec{a}_n$$

Введя обозначение $\lambda_i=-\frac{\alpha_i}{\alpha}$ получим (3). Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА 2.** Если в данной совокупности векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ldots\vec{a}_n$ часть этих векторов линейно зависима, то и вся совокупность векторов линейно зависима.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
Пусть известно, что $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=\vec{0}$, где $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$.
Тогда $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+0\vec{a}_3+\ldots+0\vec{a}_n=\vec{0}$
На основании определения 2 можно утверждать что вся совокупность векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ldots\vec{a}_n$ линейно зависима.

**ТЕОРЕМА 3.** (признак линейной зависимости двух векторов).

Для того, чтобы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеаны.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ Тогда по определению 4, §4 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

$1\vec{a} - \lambda \vec{b} = 0$. следовательно $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

**Опр.3.**
Векторы, лежащие в одной плоскости или на параллельных плоскостях наз. *компланарными.*

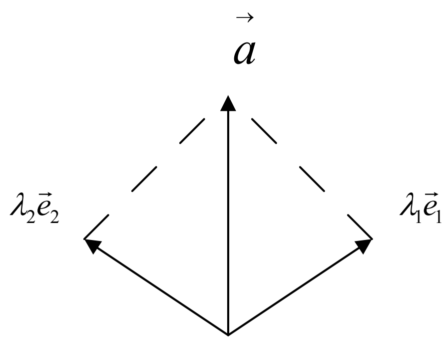
**<u>ТЕОРЕМА 4.</u>** (о разложении вектора на плоскости).
Если на плоскости даны два неколлинеарных (т.е. линейно независимых) вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$,

то любой третий вектор $\vec{a}$, компланарный с ними, можно представить в виде разложения:

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ (4)

которое является единственным.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
Доказательство проведём с помощью геометрических построений.

Построим параллелограмм с диагональю, совпадающей с вектором $\vec{a}$ и со сторонами, направленными вдоль векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Согласно правилу параллелограмма данное построение соответствует равенству (4).




**<u>ТЕОРЕМА 5.</u>** (условие линейной зависимости трёх векторов).
Любые три компланарных вектора всегда линейно зависимы.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Среди тройки компланарных векторов есть два неколлинеарных. По теореме 4 это означает, что третий вектор можно разложить по формуле (4), что в свою очередь, согласно теореме 1 означает, что все 3 вектора линейно зависимы.
2) Среди тройки компланарных векторов есть пара коллинеарных.

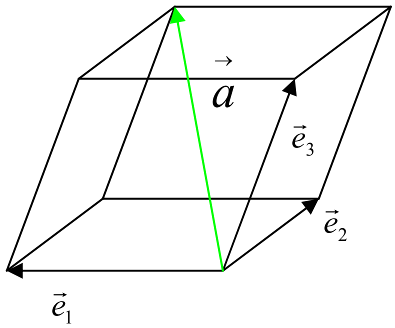
Согласно теореме 3 это означает, что эти два вектора линейно зависимы. Тогда по теореме 2 все три вектора линейно зависимы.
Что и требовалось доказать.

**<u>ТЕОРЕМА 6. (</u>**о разложении вектора в пространстве).
«Если даны 3 некомпланарных (т.е. линейно независимых) вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$., то любой

четвёртый вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде разложения

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$ (5), которое является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
Проводится с помощью геометрических построений. Построим параллелепипед с рёбрами, направленными вдоль векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. и с диагональю, совпадающей с вектором $\vec{a}$.
Построенный параллелепипед, согласно след. Теор. 1 соответствует равенству (5). Что и требовалось доказать.




**ТЕОРЕМА 7.** (признак линейной зависимости четырёх и более векторов).
Четыре и более векторов всегда линейно зависимы.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
Возможны два случая.
1) Среди 4-х векторов есть 3 некомпланарных, тогда согласно теореме 6 4-й вектор можно разложить по формуле (5), а это в свою очередь означает, что все 4 вектора линейно зависимы (теорема 1)
2) Среди четырёх векторов есть 3 компланарных, следовательно, по теореме 5 они линейно зависимы. Поэтому и все 4 вектора линейно зависимы. Что и требовалось доказать.

**Опр.4.**
Совокупность линейно независимых векторов, по которым осуществляется разложение других векторов, называется БАЗИСОМ.

Т.о. из теоремы 4 вытекает, что базисом на плоскости могут быть любые два неколлинеарных вектора. А из теоремы 6 вытекает, что базисом в пространстве могут быть любые три компланарных вектора.

**Опр. 5.**
Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - базис на плоскости и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.- базис в пространстве, то $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в разложениях (4) и (5) называются *координатами* вектора.

Следствие:
На плоскости в заданном базисе каждому вектору соответствует единственная пара чисел (координат). В пространстве каждому вектору в заданном базисе соответсвует единственная тройка чисел (координат).

# §6. *Проекция вектора на вектор.*

**Опр.**
ПРОЕКЦИЕЙ ВЕКТОРА $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется скаляр , обозначаемый $Пр_{в}\vec{a}$ и вычисляемый по формуле :

$Пр_{в}\vec{a} = |\vec{a}| \bullet \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ (1)

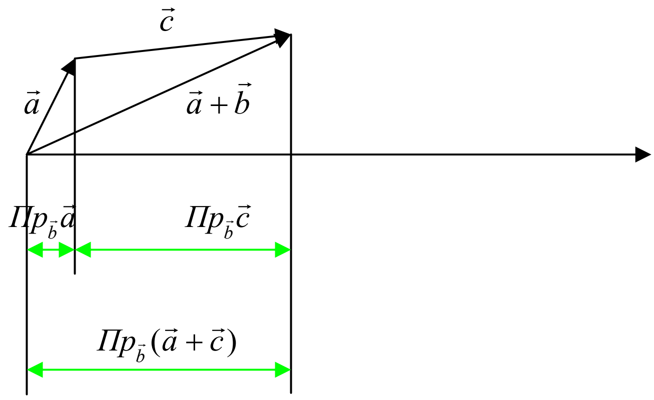
Свойства проекции вектора на вектор

1) $Пр_{\vec{b}} \lambda \vec{a} = \lambda Пр_{\vec{b}} \vec{a}$

2) $Пр_{\vec{b}} (\vec{a} + \vec{c}) = Пр_{\vec{b}} \vec{a} + Пр_{\vec{b}} \vec{c}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО свойства 2

Из рисунка видно, что проекция суммы равна сумме проекций.




# *§ 7 Скалярное произведение векторов .*

**ОПР 1**

**Скалярным произведением векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. скаляр , обозначаемый $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равный произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \textbf{( 1 )}$$

**ТЕОРЕМА 1** (Связь между скалярным произведением и проекцией вектора на вектор)

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их проекции друг на друга связаны соотношениями

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot Пр_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot Пр_{\vec{b}} \vec{a} \qquad \textbf{( 2 )}$$

Доказательство:

Формула (2) вытекает из сопоставления формулы (1) § 6 , и (1) § 7.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРИЗВЕДЕНИЯ.

**1)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность)

**2)** $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (ассоциативность)

**3)** $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивность)

Первое свойство вытекает из (1).

Второе свойство вытекает из (2) с учетом первого свойства проекции §6.

Третье свойство вытекает из (2) с учетом второго свойства проекции §6.

**ТЕОРЕМА 2** (Условие ортогональности двух векторов)

Для того, чтобы $\vec{a} \perp \vec{b}$ неоходимо и достаточно , чтобы их скалярное произведение равнялось 0.

**Доказательство:**

Пусть нам известно , что $\vec{a} \perp \vec{b}$ , тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$.

**Ч.Т.Д.**

**ОПР 2**
Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ самого на себя называется **скалярным квадратом** и обозначается $\vec{a}^2$

**ТЕОРЕМА 3** (Теорема о скалярном квадрате)
Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля , т.е. :

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \qquad \textbf{(3)}$$

**Доказательство:**
$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$

**ПРИМЕР:**
Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, чтобы они были перпендикулярны?
$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$, $\quad \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$, $\quad \vec{a}^2 = \vec{b}^2$ теорема 3
$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$, $\quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$

**Ответ :** для этого достаточно , чтобы $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

## ***§8 Прямоугольные декартовы координаты.***

**ОПР 1**
Вектор , имеющий единичную длину, называется **единичным вектором** или **ортом.**

**ОПР 2**
**1)** если базисные векторы взаимно (попарно) перпендикулярны , то такой **базис** называется **прямоугольным** или **ортогональным** .
**2)** если все базисные векторы единичной длинны , то такие вектора называются – **базисными ортами** , а сам базис называется **нормированным.**
**3)** ортогональный и нормированный базис называется **ортонормированным** или **Декартовым** .

В декартовом базисе базисные орты обозначаются :
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$\vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \qquad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

**ОПР 3**
В трехмерном пространстве зафиксируем точку О и назовем ее **началом координат** . Разместим в этой точке декартов базис. Вдоль базисных ортов проведем оси X,Y,Z и будем считать, что базисные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. задают масштаб этих осей. Полученная таким образом система координат называется **прямоугольной Декартовой системой координат .**
В Декартовом базисе координаты $\vec{a}$ обозначаются : $a_x, a_y, a_z$ ,
Если в произвольном базисе разложение $\vec{a}$ имело вид : $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ ,
То в Декартовом базисе разложение того же вектора $\vec{a}$ имеет вид :

$$\boxed{\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k}$$

**<u>ТЕОРЕМА 1</u> (**Геометрический смысл координат вектора в декартовом базисе **)**
В Декартовом базисе координаты вектора равны его проекциям на соответствующие базисные орты

| | | |
|---|---|---|
| $a_x = Пр_{\vec i}\vec a$ | $a_y = Пр_{\vec j}\vec a$ | $a_z = Пр_{\vec k}\vec a$ |

**Доказательство:**

$Пр_{\vec i}\vec a = Пр_i\left(a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k\right) =$ § 6 , 2 свойство =

$Пр._{\vec i}\, a_x\vec i + Пр._{\vec i}\, a_y\vec j + Пр._{\vec i}\, a_z\vec k =$ § 6 , 1свойство=

$= a_x Пр._{\vec i}\,\vec i + a_y Пр._{\vec i}\,\vec j + a_z Пр._{\vec i}\,\vec k =$ § 6 , определение=

$$= a_x\overset{1}{|\vec i|}\cdot\overset{1}{\cos 0} + a_y|\vec j|\cdot\overset{0}{\cos 90^o} + a_z|\vec k|\cdot\overset{0}{\cos 90^o} = a_x$$

**<u>ОПР 4</u>**

Координатой точки *M* будем называть координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ , начало которого совпадает с началом координат, а конец с данной точкой.
Координаты точки записываются следующим образом *M (x,y,z)*. Сравни с записью координат вектора $\vec a = \{a_x, a_y, a_z\}$.

# <u>*§9 Действия над векторами, заданными в координатной форме.*</u>

**<u>ТЕОРЕМА 1</u>**

При сложении векторов их соответствующие координаты складываются , при вычитании – вычитаются, а при умножении вектора на число , все координаты этого вектора умножаются на это число, т.е.

$\vec a + \vec b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$

$\vec a - \vec b = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}$

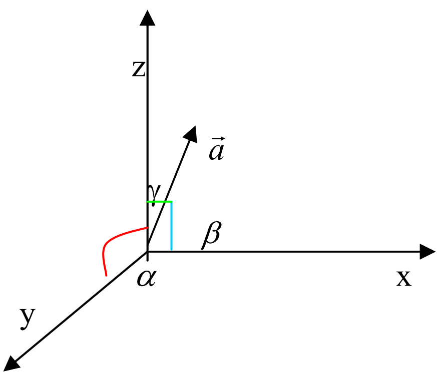
$\lambda\vec a = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$

**Доказательство:**

$\vec a + \vec b = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k + b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k =$ § 4 , опр.5, 3 сво-во=

$(a_x + b_x)\vec i + (a_y + b_y)\vec j + (a_z + b_z)\vec k$

**<u>ОПР 1</u>**




Введем следующие обозначения :

$\alpha = \angle(\vec a x)$ , $\beta = \angle(\vec a y)$ , $\gamma = \angle(\vec a z)$

Тогда

$\cos\alpha$ , $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - называются **<u>направляющими косинусами</u>** вектора.

**<u>ТЕОРЕМА 2</u> (**Скалярное произведение в декартовом базисе)

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

в декартовом базисе , равно сумме произведений их соответствующих координат

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \textbf{(1)}$$

**Доказательство:**

Отметим еще раз , то что $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$

$$\vec{a}\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= a_x b_x\vec{i}^{\,2} + a_y b_y\vec{j}^{\,2} + a_z b_z\vec{k}^{\,2} + \overset{0}{\left(a_x b_y + a_y b_x\right)}\vec{i}\vec{j} + \overset{0}{\left(a_x b_z + a_z b_x\right)}\vec{i}\vec{k} + \left(a_z b_y + a_y b_z\right)\vec{j}\vec{k} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Получается (1), ЧТД

**<u>ТЕОРЕМА 3</u> (**Теорема Пифагора**)**

В Декарто~~вом ба~~зисе модуль вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ равен

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} \qquad \textbf{(2)}$$

**Доказательство:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \text{§ 7 , Т 3} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = (1) = \sqrt{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z} = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} = \text{ЧТД}$$

**<u>ТЕОРЕМА 4</u>**

Координаты $\vec{a}$ в декартовом базисе можно записать следующим образом :

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma \qquad \textbf{(3)}$$

**Доказательство:**

По Теореме 1 §8 , $a_x = Пр_{\vec{i}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{i}) =$ опр.1 $= |\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},x) = |\vec{a}|\cos\alpha$ ,

ЧТД.

**<u>ТЕОРЕМА 5</u>**

Координаты единичного вектора равны его направляющим косинусам

Если $|\vec{n}_0| = 1$ , то $\quad \vec{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

**Доказательство:**

Доказательство вытекает из формулы (3)

**<u>ТЕОРЕМА 6</u>**

Направляющие косинусы вектора

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}}}$$

**(4)**

**Доказательство:**

Доказательство вытекает из формулы (3) , используя формулу (2)

**<u>ТЕОРЕМА 7</u>**

Сумма квадратов направляющих косинусов равна 1 , т.е.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \textbf{(5)}$$

**Доказательство:**
Доказательство вытекает из формул (4)

**ТЕОРЕМА 8** (угол между векторами)
Косинус угла между векторами $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ в декартовом базисе находится по следующей формуле:

$$\cos\angle(\vec{a};\vec{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_z{}^2+a_y{}^2+a_y{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}} \qquad \textbf{(6)}$$

**Доказательство:**
По опр. 1 §7 $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a};\vec{b})\Rightarrow \cos\angle(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ подставляя сюда (1) и (2) §9

получаем

$$\cos\angle(\vec{a};\vec{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_z{}^2+a_y{}^2+a_y{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}},$$
ЧТД.

**ТЕОРЕМА 9** (условие перпендикулярности векторов)
В декартовом базисе условие перпендикулярности векторов $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ имеет вид :

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \qquad \textbf{(7)}$$

**Доказательство:**
Согласно Теор.2 § 7 , если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0 . Следовательно, из формулы (1) данного параграфа вытекает (7)

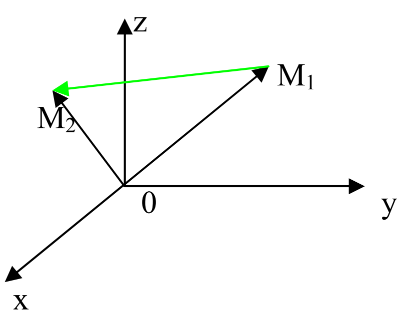
**ТЕОРЕМА 10** (Условие коллинеарности 2-х векторов )
Два вектора $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda \qquad \textbf{(8)}$$

**Доказательство:**
Пусть $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, тогда § 4, опр.5 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, но $\lambda\vec{b}=\{\lambda b_x;\lambda b_y;\lambda b_z\}$, приравнивая между собой соотв. координаты получаем $a_x=\lambda b_x$, $a_y=\lambda b_y$, $a_z=\lambda b_z$ , откуда получается (8).

**ТЕОРЕМА 11** (координаты вектора, заданного точками начала и конца)
Если $M_1(x_1y_1z_1)$ и $M_2(x_2y_2z_2)$ , то $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$;
Т.е. из координат конца вектора вычитаются соответствующие координаты начала .

**Доказательство:**




Согласно опр.4 §8

$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$

$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$

Согласно определению суммы векторов

$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}$

$\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{M_1M_2}$ ,согласно теореме1 получаем то,ЧТД.

**ТЕОРЕМА 12**

Расстояние между 2-мя точками , расстояние d,между точками $M_1(x_1y_1z_1)$ и $M_2(x_2y_2z_2)$ определяется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad \textbf{(9)}$$

**Доказательство:**

Формула (9) представляет собой $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$

# *§10 Векторное произведение векторов.*

**ОПР 1**

**Векторное произведение векторов** $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ - ВЕКТОР обозначаемый как $\vec{a}\times\vec{b}$ и в декартовом базисе вычисляемый по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Lля нахождения координат и модуля этого вектора разложим (1) по элементам 1-ой строки:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k} \qquad \textbf{(2)}$$

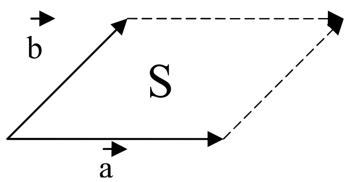
(2)- это разложение векторного произведения по базисным ортам $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ . Тогда

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2} \qquad \textbf{(3)}$$

**ТЕОРЕМА 1** (О модуле векторного произведения)

Модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах , как на сторонах , и поэтому может быть вычислен по формуле:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a};\vec{b}) \qquad \textbf{(4)}$$




**ТЕОРЕМА 2** (Направление векторного произведения)

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярно плоскости , в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлено по правилу правой руки: $\vec{a}$-указательный палец, $\vec{b}$ -средний палец, тогда $\vec{a}\times\vec{b}$ - большой палец.

**Доказательство:**

Найдем скалярное произведение

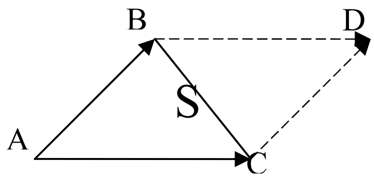
$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(1)\ §9=a_x(a_yb_z-a_zb_y)+a_y(a_zb_x-a_xb_z)+a_z(a_xb_y-a_yb_x)=$$

$$=a_xa_yb_z-a_xa_zb_y+a_ya_zb_x-a_xa_yb_z+a_xa_zb_y-a_ya_zb_x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}}$$

Аналогично можно доказать ,что $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0\Rightarrow\boxed{\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}}$

**ПРИМЕР 1** (к теореме 1):
Найти S треугольника с вершинами
A(1,-1,2) , B(-1,2,3) , C(0,-2,1)
Решение :



$S_{ABC}=1/2 S_{ABCD}=1/2\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=1/2\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$\overrightarrow{AB}=\{-2;3;1\}\quad \overrightarrow{AC}=\{-1;-1;-1\}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}=$$

$$S_{abc}=\frac{\sqrt{38}}{2}$$

**Свойства векторного произведения**

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ антикоммутативность

**Доказательство:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\text{теорема 4 §1}=-\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\text{опр}=-\vec{b}\times\vec{a}\quad \text{ЧТД}$$

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$- ассоциативность.

**Доказательство:**

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda a_x & \lambda a_y & \lambda a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$$

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ - дистрибутивность

**Доказательство:**

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x+c_x & b_y+c_y & b_z+c_z\end{vmatrix}=\text{теор.7 §1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

# *§11 Смешанное произведение векторов*

**ОПР 1**

**Смешанным произведением** векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ и представляющее собой скалярное произведение векторов $(\vec{a}\times\vec{b})$ и $\vec{c}$ .

**ТЕОРЕМА 1.** (вычисление смешанного произведения в декартовом базисе).

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z\\ \vec{c}_x & \vec{c}_y & \vec{c}_z\end{vmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{k}$$

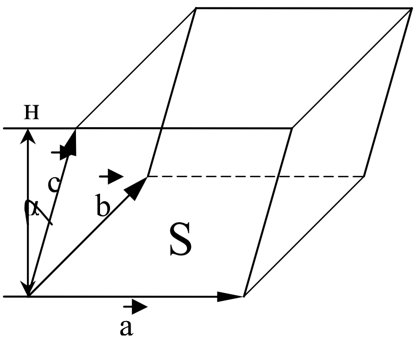
Разложим определитель (1) по 3-й строке:

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}==\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_z$$

Мы получили сумму произведений соответствующих координат векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$, что в свою очередь является их скалярным произведением.

**ТЕОРЕМА 2** **(Геометрический смысл смешанного произведения векторов )**

Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равно (по абсолютной величине) объему параллелепипеда , построенного на этих векторах как на ребрах.




V=S*H **(*)** Теорема1 §10 ,

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$=S **(**)**

$H=\left|\vec{c}\right|\cos\alpha$ **(***)** Согласно опр. скалярного произведения

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha$ = (**)(***) = S*H = $\pm V$ , ЧТД

Т.о. $\pm\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=V$

**ТЕОРЕМА 3** (Условие компланарности 3-х векторов )

Для того ,чтобы 3 вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы их смешенное произведение равнялось 0

**Доказательство:**

Пусть известно , что $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ -компланарны, тогда очевидно, что V параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен 0, а по Теор.2 ,это значит, что смешанное произведение равно 0. ЧТД

**СЛЕДСТВИЕ**

В декартовом базисе условие компланарности 3-х векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

**ТРИ КИТА, НА КОТОРЫХ ДЕРЖИТСЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Условие перпендикулярности векторов**

$$\mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0}$$

**Условие коллинеарности векторов**

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = 0$$

**Условие компланарности 3-х векторов**

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$