Ряды.
Числовые ряды.

§1 Общие понятия.

Опр.1. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определенному закону некоторое число a_n, то множество занумерованных чисел a_1 , a_2 .. a_n называется числовой последовательностью, а числа a_1 , a_2 .. a_n элементами числовой последовательности.
Числовая последовательность обозначается $\{a_n\}$.

Опр.2. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$
Выражение вида

$$u_1 + u_2 + .. + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

называется числовым рядом, а u_1 , $u_2 \ldots u_n$ членами ряда.

Опр.3. Сумма первых n членов ряда называется n-ой частичной суммой ряда и обозначается S_n. В свою очередь из n-ых частичных сумм ряда можно составить бесконечную числовую последовательность $\{S_n\}$,
$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, … , $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Опр.4. Числовой ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (2).$$

Предел S называется суммой ряда. Если предел (2) не существует как конечное число, то числовой ряд называется расходящимся.

Ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии.

Проиллюстрируем применение определения 4.
Геометрическая прогрессия—это числовая последовательность

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$$

где q—знаменатель прогрессии. Составим ряд из элементов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + .. + aq^{n-1} + .. = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (3)$$

Запишем n-ую частичную сумму для этого ряда:

$$S_n = a + aq + aq^2 + .. + aq^{n-1} \qquad (*)/q$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + .. + aq^n \quad (**), \quad \text{вычтем} \quad (**) \quad \text{из} \quad (*)$$

$$S_n - qS_n = a - aq^n \Rightarrow S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

$$\text{Согласно\_опр.4.\_} S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{(1-q)} \lim_{n\to\infty} q^n$$

$$1)|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow S = \frac{a}{(1-q)} \quad \text{согласно\_опр.4.\_ ряд(3)\_сходится.}$$

$$2)|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \text{ряд\_расходится}$$

$$3) q = 1 \Rightarrow S_n = a + a + a + .. + a = na \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \text{расходится}$$

$$4) q = -1 \begin{cases} (n - \text{четн.}) & S_n = 0 \\ (n - \text{нечетн.}) & S_n = a \end{cases}$$

в этом случае S_n предела не имеет.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad \begin{cases} |q| \geq 1 - \text{расходится} \\ |q| \langle\, 1 - \text{сходится} \end{cases}$

Рассмотрим пример:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \quad \text{сходится, т.к. } q = \frac{1}{2}.$$

Примечание: каждый раз использовать определение 4 для установления сходимости или расходимости ряда неудобно, поэтому используется ряд признаков, позволяющих установить сходимость или расходимость ряда гораздо быстрее.

<u>Теорема. (Необходимый признак сходимости).</u>

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (4)$$

(необходимый признак—т.е. без условия 4 ряд вообще не может сходиться).

Рассмотрим пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+5} \quad \text{расходится, т.к.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Примечание: условие (4) является необходимым, но недостаточным, то есть его

выполнение не гарантирует сходимости ряда.
Рассмотрим пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}} \quad \text{расходится (см. интегральныйпризнак)}$$

$$\text{Хотя} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

§2 Простейшие действия над рядами.

Опр.1. Произведением ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ (1)
на число C называется ряд $Cu_1+Cu_2\ldots+Cu_n+..$ (2)

Теорема 1. Если ряд (1) сходится и имеет сумму S, то ряд (2) также сходится и имеет сумму CS.
Доказательство:
Если n-ая частичная сумма ряда (1) равна S_n, то очевидно, что n-ая частичная сумма ряда (2) равна CS_n.

Если ряд (1) сходится, то согласно определению 4 §1 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. Тогда для ряда (2) имеем $\lim_{n\to\infty}CS_n=C\lim_{n\to\infty}S_n=CS$, что и требовалось доказать.

Опр.2. Суммой (разностью) двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n\pm V_n)$.

Теорема 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ сходятся и имеют соответсвенно суммы равные U и V, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)$ также сходится и имеет сумму равную U + V.
Доказательство:
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ сходятся и имеет частичную сумму равную U_n, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ имеет n-ую частичную сумму V_n, то тогда очевидно, что n-ая частичная сумма для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)$ будет равна U_n+V_n. По определению 4 §1 найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}(U_n+V_n)=\lim_{n\to\infty}U_n+\lim_{n\to\infty}V_n=U+V.$$

§3 Признаки сравнения.

Позволяют не использовать определение 4 §1.
С помощью них можно судить о сходимости ряда путем его сравнения с другим рядом, сходимость (или расходимость) которого заранее известна.
Для сравнения будем использовать 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \Rightarrow \begin{cases} q<1 \textit{сходится} \\ q \geq 1 \textit{расходится} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} p>1 \textit{сходится} \\ p \leq 1 \textit{расходится} \end{cases}$$ Обобщенный гармонический ряд.

Мы рассматриваем знакопостоянные ряды, для них справедлива теорема.
Теорема 1. Для того, чтобы знакопостоянный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.
Теорема 2. (Первый признак сравнения). Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, и члены первого ряда, начиная с какого-то номера n, не превосходят членов второго ряда, то есть

$$u_n \leq v_n \qquad (*).$$

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.
2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$.

Доказательство:

1) Из (*) очевидно вытекает $U_n \leq V_n$ (**). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходится, то по определению 4 §1 $\lim_{n\to\infty} V_n = V$, тогда для всех n $V_n<V$ и след. по (**) имеем $U_n<V$. Последнее неравенство означает, что последовательность частичных сумм $\{U_n\}$ ограниченная, что по теореме 1 означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится.

2) Если $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ расходится, то U_n с ростом номера неограниченно возрастает, а тогда, согласно (**) V_n также неограниченно возрастает, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ расходится.

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Сравним по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, $\frac{1}{n2^n}\le\frac{1}{2^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ сходится.

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Сравним наш ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится, $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$, значит, наш ряд также расходится.

Теорема 3. (Второй признак сравнения.) Если для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=L(L\neq 0)$, то ряды ведут себя одинаково, то есть сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

Сравним наш ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, который сходится

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}n^{\frac{3}{2}}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$ (предел существует как конечное число) значит, наш ряд также сходится.

§4 Признаки Даламбера и Коши.

Теорема 1. ***Признак Даламбера***.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=L$ (1), то при

L>1 Ряд расходится.
L<1 Ряд сходится.
L=1 ??? Ничего сказать нельзя.

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$U_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{n+1}{2^n 2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^n 2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=\frac{1}{2}\langle 1 \quad \textit{сходится}$$

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$.

$$U_{n+1}=\frac{2^n 2}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n 2}{(n+1)}\frac{n}{2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=2\rangle 1 \quad \textit{расходится}$$

<u>Теорема 2. </u>***Признак Коши***. Если для ряда с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$ (2),
то при
L>1 Ряд расходится.
L<1 Ряд сходится.
L=1 ??? Ничего сказать нельзя.

Док-во:

1) L>1. Начиная с n=N $\sqrt[n]{u_n}>1\Rightarrow u_n>1$, а значит, ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.
2) L<1. Существование предела (2) означает, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, что для n>N будет справедливо неравенство $\left|\sqrt[n]{u_n}-L\right|<\varepsilon$ или $L-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<L+\varepsilon$. Назначим ε таким, чтобы $L+\varepsilon<1$, обозначим $L+\varepsilon=q$, тогда $\sqrt[n]{u_n}<q$ (q<1) (a).

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$, составленный из элементов геометрической прогрессии $v_n=q^n$ (q<1), $q=\sqrt[n]{V_n}$ и подставим в (a):

$\sqrt[n]{u_n} < \sqrt[n]{v_n} \Rightarrow u_n < v_n$, так как $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходится, то по первому признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ также сходится.

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{2} = \frac{4}{9} < 1 \quad \textit{сходится}$$.

Заключение: признаки Даламбера и Коши просты и эффективны, однако часто они обладают низкой «чувствительностью» (L=1).

§5 Интегральный признак сходимости.

Рассмотрим несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx \qquad (1).$$

Если предел (1) существует как конечное число, то несобственный интеграл называется сходящимся, иначе он называется расходящимся.

Для формулировки интегрального признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ необходимо подобрать такую функцию f(x), чтобы выполнялось условие f(n)=U_n, например для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x^p}$.

<u>Теорема.</u> Пусть дан ряд с положительными членами, члены которого с ростом номера не возрастают $u_1 \ge u_2 \ge u_3 ... \ge u_n \ge ...$ и пусть подобрана монотонная функция f(x) для которой выполняется условие f(n)=U_n. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Исследуем с помощью интегрального признака обобщенный гармонический ряд:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{\infty} = \begin{cases} \infty\_при\_p<1 \\ \frac{1}{p-1}\_при\_p>1 \end{cases}$$

$$p=1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty$$

таким образом, обобщенный гармонический ряд при p>1 сходится, а при p≤1 расходится.

§6 Остаток ряда и его оценка.

Опр. Пусть дан ряд

$$U_1 + U_2 + ... + U_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (1)$$

Тогда сумма ряда

$$U_{n+1} + U_{n+2} + ... + U_{n+3} + ... \qquad (2)$$

называется *n*-ным остатком ряда (1).

Можно показать, что если ряд (1) сходится, то и ряд (2) также сходится.
Если ряд (1) сходится, то его сумма равна S, тогда сумму ряда (2) обозначим r_n. В этом случае очевидно

$$S=S_n+ r_n \qquad (3).$$

Теорема. Если ряд (1) сходится, то остаток этого ряда r_n с ростом номера стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ (4).

Доказательство:

Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Перейдем в равенстве (3) к пределу при n→∞:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} r_n$$

$$S = S + \lim_{n\to\infty} r_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Следствие: из теоремы следует, что при достаточно больших *n* можно использовать приближенное равенство $S \approx S_n$. Погрешность такой замены равна остатку:

$$S - S_n = r_n$$

Оценить остаток ряда r_n можно с помощью интегрального признака:

$$r_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx \qquad (5)$$

Рассмотрим пример: необходимо рассчитать сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ с погрешностью

$\le \frac{1}{1000}$.

$$r_n \le \int_n^\infty \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_n^\infty = \frac{1}{n}$$

$r_n \le \frac{1}{n}$, тогда условие $r_n \le 0{,}001$ будет выполняться при n=1000. Про такие ряды говорят, что они медленно сходятся.

Рассмотрим пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

$$r_n \le \int_n^\infty \frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3}\Big|_n^\infty = \frac{1}{3n^3}$$

$r_n \le \frac{1}{3n^3}$, тогда условие $r_n \le 0{,}001$ будет выполняться при n=7. Про такие ряды говорят, что они быстро сходятся.

§7 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

Определение 1. Числовой ряд, члены которого имеют произвольные знаки, называется знакопеременным.

Определение 2. Числовой ряд, у которого любые два соседних члена имеют противоположные знаки, называется знакочередующимся.

Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$U_1 - U_2 + U_3 - \ldots + U_n - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n \tag{1}$$

где U_1, U_2, U_3 являются положительными числами. Сходимость ряда (1) устанавливается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. ***Признак Лейбница***. Если члены ряда (1) убывают по абсолютной величине и n- ый член ряда с ростом номера стремится к нулю, то есть $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ldots \ge u_n \ge \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \tag{2}$$

то ряд (1) сходится.

Доказательство: запишем n-ую частичную сумму ряда (1) для четного числа членов $S_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k})$.

В силу убывания членов ряда, каждая скобка положительна, то есть последовательность частичных сумм S_{2k} является монотонно возрастающей.

С другой стороны $S_{2k}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-...-u_{2k}$.

Так как каждая скобка положительна, то для любого k справедливо $S_{2k} < u_1$, таким образом последовательность $\{S_{2k}\}$ является монотонно возрастающей, но ограниченной сверху, следовательно, по теор.1 §3 такая последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2k}=S$ (а).

Последовательность частичных сумм с нечетным числом членов имеет тот же предел S, так как $S_{2k+1}=S_{2k}+u_{2k+1}$, перейдем в этом равенстве к пределу при $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty} S_{2k}+\lim_{k\to\infty} u_{2k+1}=S \qquad (б).$$

В совокупности (а) и (б) дают $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S\Rightarrow$ ряд (1) сходится.

Рассмотрим пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad \textit{ряд сходится}$$

<u>Опр. 3.</u> Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

<u>Теорема 2.</u> (О сходимости абсолютно сходящегося ряда).

Если ряд, составленный из модулей знакопеременного ряда, сходится, то и сам знакопеременный ряд сходится (абсолютно).

Доказательство:

Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+... \qquad (3),$$

$u_1, u_3 \ldots u_n$—числа произвольного знака. Известно, что ряд из модулей

$$|u_1|+|u_2|+..+|u_n| \qquad (4)$$

сходится. По теореме 1, §2 ряд

$$2|u_1|+2|u_2|+..+2|u_n|+... \qquad (5)$$

также сходится. Очевидно неравенство $u_n+|u_n|\le 2u_n$, тогда по первому признаку сравнения можно утверждать, что ряд

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+...+(u_n+|u_n|)+.. \qquad (6)$$

также сходится. Таким образом, ряд (3) сходится, так как представляет собой разность двух сходящихся рядов (6) и (4) (см. теорему 2 §2).

Замечание. Обратное утверждение неверно. Ряд из модулей может быть расходящимся, а сам знакопеременный ряд—сходящимся.

<u>Опр.4.</u> Если знакопеременный ряд сходится, а ряд из его модулей расходится, то такой знакопеременный ряд называется условно сходящимся.

Рассмотрим пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, он сходится, след. по теореме 2 наш ряд абсолютно сходится.

Рассмотрим пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, он расходится; исследуем сам знакопеременный ряд по признаку Лейбница:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ След. данный ряд условно сходится.

§8 Оценка остатка для знакочередующегося ряда.

Пусть дан знакочередующийся ряд

$$U_1-U_2+U_3-\ldots+U_n-\ldots.=\sum_{n=1}^{\infty}(1)^{n+1}U_n \qquad (1),$$

если выполняется признак Лейбница, то есть ряд (1) сходится, то поведение частичной суммы S_n этого ряда выглядит так:

Таким образом, последовательность частичных сумм S_{2k} монотонно возрастает и стремится к пределу S, а последовательность S_{2k+1} монотонно убывает и стремится к тому же пределу S. Т.е., для любого k справедливо $S_{2k}<S<S_{2k+1}$.

<u>Следствие 1</u>. Сумма знакочередующегося ряда (1) меньше первого члена ряда $S<U_1$.

<u>Следствие 2.</u> Остаток знакочередующегося ряда (1) по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого из отбрасываемых членов $|r_n|<U_{n+1}$.

Доказательство:

$r_n=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-..$. Применяя к этому знакочередующемуся ряду следствие (1), получим $|r_n|<U_{n+1}$ (2).

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, надо вычислить сумму с погрешностью, не превышающую 0,001. Тогда r_n<0,001 начнет выполняться при n=999, т.е. ряд сходится медленно.

Функциональные ряды.

§9 Общие понятия. Равномерная сходимость.

Опр.1.
Если каждый член ряда представляет собой некоторую функцию аргумента x:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x) \qquad (1),$$

то такой ряд называется функциональным рядом.
Если аргументу x придать некоторое фиксированное значение x_0, то получим числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \qquad (2),$$

В зависимости от значения x_0, числовой ряд может оказаться сходящимся или расходящимся.

Опр.2. Совокупность всех значений аргумента x, при которых функциональный ряд (1) сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Очевидно, что для различных значений x из области сходимости, сумма ряда будет разной, то есть сумма есть функция переменной, т.е. S=S(x), так же как и все частичные суммы. Составим последовательность этих частичных сумм

$$S_1(x), S_2(x),\ldots, S_n(x),\ldots \qquad (3)$$

Для всех x из области сходимости последовательность (3) имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x) \qquad (4).$$

Условие (4) означает, что график функции $S_n(x)$ с возрастанием номера n стремится занять положение графика S(x).
Однако, скорость сходимости при различных x может быть разной, то есть, различные участки графика $S_n(x)$ будут приближаться к графику S(x) с разной скоростью.

На первом рисунке график $S_n(x)$ с возрастанием номера приближается к графику S(x) примерно с одинаковой скоростью при различных x. Этот рисунок иллюстрирует *равномерную сходимость.*
На втором рисунке скорость приближения разных участков графика $S_n(x)$ к предельной функции S(x) очевидно зависит от x. Этот рисунок иллюстрирует *неравномерную сходимость.*
Опр. 3. Последовательность функций $S_1(x)$, $S_2(x)$,….., $S_n(x)$,... сходится к своей

предельной функции S(x) равномерно на некотором интервале [a;b] если, задавшись как угодно малым положительным числом ε, можно указать такой номер N, что для всех n>N и при любом *x* из интервала [a;b] справедливо неравенство:

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon$$

Для любого малого ε можно указать такой N,что для всех n>N функция $S_n(x)$ будет удовлетворять следующему неравенству:

$$S(x)-\varepsilon<S_n(x)<S(x)+\varepsilon$$

То есть, график $S_n(x)$ должен целиком лежать внутри заштрихованной полосы.

Опр. 4. Функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (5)$$

называется равномерно сходящимся в некоторой области, если для всех *x* из этой области последовательность частичных сумм этого ряда $S_1(x), S_2(x),\ldots, S_n(x),\ldots$ сходится равномерно к предельной функции S(x).

Теорема. (Признак равномерной сходимости Вейерштрассе).
Функциональный ряд (5) сходится равномерно на некотором интервале [a;b], если существует такой знакоположительный сходящийся числовой ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \qquad (6),$$

что для всех *x* из интервала [a;b] и для любого n справедливо неравенство (7):

$$\left|U_n(x)\right|\le C_n \qquad (7)$$

Доказательство:
Из (7) по первому признаку сравнения следует, что функциональный ряд (5) на [a;b] сходится. Это означает, что для ряда (5) существует сумма этого ряда:

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x) \text{ или } \left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|r_n(x)\right| \qquad (а)$$

если ряд (6) сходится, то, согласно теореме §6 , имеем:

$$\lim_{n\to\infty} r_n=0 \Rightarrow r_n<\varepsilon \qquad (б)$$

Из (7) также очевидно, что $\left|r_n(x)\right|\le r_n$ (в),

из (б) и (в) следует $\left|r_n(x)\right|<\varepsilon$, и, подставляя последнее неравенство в (а), получим:

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon$$

последнее неравенство, согласно определению 3 и 4 означает, что ряд (5) равномерно сходится на интервале [a;b].

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$. Возьмем для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится.

$\frac{\left|\sin nx\right|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$, для любого *x* из интервала (-∞;∞). Т.е. функциональный ряд равномерно сходится на всей числовой оси.

§10 Степенные ряды.

Опр. 1. Степенным рядом называется следующий функциональный ряд:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1),$$

где a_0, a_1, a_2,...—коэффициенты степенного ряда;
a_0— нулевой член ряда; $a_n x^n$ — n-ый член ряда.

Теорема Абеля.
1. Если степенной ряд (1) сходится при $x=x_0$ ($x_0 \neq 0$), то этот ряд сходится и притом абсолютно при всех x, удовлетворяющих $|x|<|x_0|$.
2. Если известно, что ряд (1) расходится при $x=x_0$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих $|x|>|x_0|$.

Доказательство:
Докажем первую часть. Пусть известно, что ряд (1) сходится при $x=x_0$, это означает, что сходится следующий числовой ряд:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n + ... \qquad (2)$$

По необходимому признаку имеем $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$
последнее условие означает, что все члены ряда (2) ограничены, то есть можно указать такое положительное число M, что для всех n будет выполняться условие

$$\left| a_n x_0^n \right| < M \qquad (3).$$

Преобразуем ряд (1) к следующему виду:

$$a_0 + a_1 x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + ... + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + ... \qquad (4).$$

Составим ряд из модулей для ряда (4):

$$\left|a_0\right| + \left|a_1 x_0\right| \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2 x_0\right|^2 \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + ... + \left|a_n x_0^n\right| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| + ... \qquad (5).$$

В ряде (5) введем обозначение $\left|\frac{x}{x_0}\right| = q$ и если $|x|<|x_0|$, то q<1, то есть ряд (5) принимает вид:

$$\left|a_0\right|+\left|a_1x_0\right|q+\left|a_2x_0\right|^2q^2+.......+\left|a_nx_0{}^n\right|q^n+.... \qquad (6).$$

Сравним ряд (6) с рядом (7)

$$\left|a_0\right|+Mq+Mq^2+...+Mq^n+...... \qquad (7)$$

Известно, что при q<1 ряд (7) сходится. Учитывая неравенство (3) согласно первому признаку сравнения ряд из модулей (5) также сходится, а значит и сам ряд (4) или (1) абсолютно сходится при q<1.

<u>Следствие:</u> из теоремы Абеля вытекает, что существует такое положительное число R, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ расходится. (8)

<u>Опр. 2.</u> Число R, удовлетворяющее условию (8), называется радиусом сходимости ряда, а интервал (-R;R) называется интервалом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости R можно определить с помощью признаков Даламбера и Коши.

По Даламберу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_{n+1}\right|}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L,$$

ряд (1) сходится при L<1, то есть

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$, то есть $$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

ряд расходится при L>1:

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$$ или $$|x|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Последние два неравенства, согласно 8, означают, что

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (9),$$

Аналогично можно показать, что при использовании признака Коши

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|a_n\right|}} \qquad (10).$$

Свойства степенных рядов.

1. Степенной ряд (1) сходится равномерно на любом отрезке [a;b], целиком лежащем внутри интервала сходимости (- R;R).

Доказательство:

Внутри интервала сходимости берем точку x_0, эта точка находится дальше от начала координат, чем a и b. По теореме Абеля ряд (1) в точке x_0 сходится абсолютно, то есть сходится следующий ряд из модулей:

$$|a_0|+|a_1x_0|q+|a_2x_0{}^2|+\ldots+|a_nx_0{}^n|+\ldots$$

Учитывая (*) можно утверждать, что при любых x из интервала [a;b] будет выполняться условие $|a_nx^n|<|a_nx_0^n|$, последнее неравенство по теореме Вейерштрассе означает, что ряд (1) на интервале [a;b] сходится равномерно.

2. Степенной ряд (1) в интервале сходимости можно почленно дифференцировать. Полученный при этом ряд (составленный из производных) имеет тот же радиус сходимости что и исходный степенной ряд.
Доказательство: продифференцируем ряд (1):

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots..+na_nx^{n-1}+\ldots.$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots..+b_nx^n+\ldots.. \qquad (3),$$

где $b_n=(n+1)a_{n+1}$
Пусть радиус сходимости степенного ряда (1) равен R, а радиус сходимости степенного ряда (3) - R*.
Согласно (9) радиус сходимости ряда(3):

$$R^*=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+2)a_{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$$

то есть R=R*.

3. Степенной ряд (1) в интервале сходимости можно почленно интегрировать. Радиус сходимости не изменится, то есть, если для $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ известен R, то ряд, полученный после почленного интегрирования $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}x^{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости R

__Заключение:__ как было показано, сумма всякого функционального (степенного) ряда представляет из себя в области сходимости некоторую функцию. В связи с этим могут возникнуть две задачи:

1. Как по заданному ряду найти функцию, которая в области сходимости представляет собой сумму данного ряда. Такая задача называется суммированием ряда.
2. Как по заданной функции найти ряд, для которого данная функция представляла бы собой (в области сходимости) сумму этого рада. Такая задача называется разложением функции в ряд.

Вторая задача является более важной, так как часто используется в различных математических приложениях, в частности, в приближенных вычислениях.
Рассмотрим пример: пусть нам не удается найти первообразную для данного интеграла $\int_0^x f(x)dx$. В этом случае можно разложить f(x) в степенной ряд $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда: $\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

§11 Ряд Тейлора.

Предположим, что y=f(x) бесконечное число раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x=x_0$. Предположим, что эту функцию можно представить в виде суммы степенного ряда, сходящегося в каком-то интервале, содержащем точку x_0

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+....+a_n(x-x_0)^n+... \qquad (1),$$

где a_0 ,…, a_n—неизвестные коэффициенты степенного ряда.
Найдем эти коэффициенты, используя известные значения функции, а также всех ее производных в точке x_0:

$$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0),...$$

$$при\_x=x_0 \Rightarrow a_0=f(x_0) \qquad (2)$$

Чтобы найти a_1 продифференцируем степенной ряд (1):

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_n(x-x_0)^{n-1}...$$

$$при\_x=x_0 \Rightarrow a_1=\frac{f'(x_0)}{1!} \qquad (3)$$

Для нахождения a_2 снова продифференцируем степенной ряд:

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+...$$

$$при\_x=x_0 \Rightarrow a_2=\frac{f''(x_0)}{2!} \qquad (4)$$

После третьего дифференцирования аналогично получим:

$$f'''(x) = 6a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3} + \ldots$$

$$при\_x = x_0 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!} \qquad (5)$$

После n-кратного дифференцирования получим:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (6)$$

Подставим (2)—(6) в (1).

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + .. \qquad (7)$$

(7) называется рядом Тейлора для функции *f(x)* в окрестности точки x_0.
Когда функцию *f(x)* можно представить в виде степенного ряда (1)? Т.е. когда ряд Тейлора, составленный для данной функции, действительно сходится в некотором интервале именно к функции *f(x)*?

Известно что $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$. Если *f(x)* можно разложить в ряд (1), то это значит, что в области сходимости должно выполняться условие

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x), \quad отсюда \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (8).$$

Таким образом, ряд Тейлора представляет данную функцию *f(x)* только тогда, когда выполняется условие (8). В противном случае ряд Тейлора не будет представлять данную функцию (т.е. ряд расходится или он сходится к другой функции).
В частном случае, когда $x_0=0$, получаем ряд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \qquad (9),$$

который называется рядом Маклорена.

Примеры разложения основных функций в ряд Маклорена.

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(0) = 1$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$