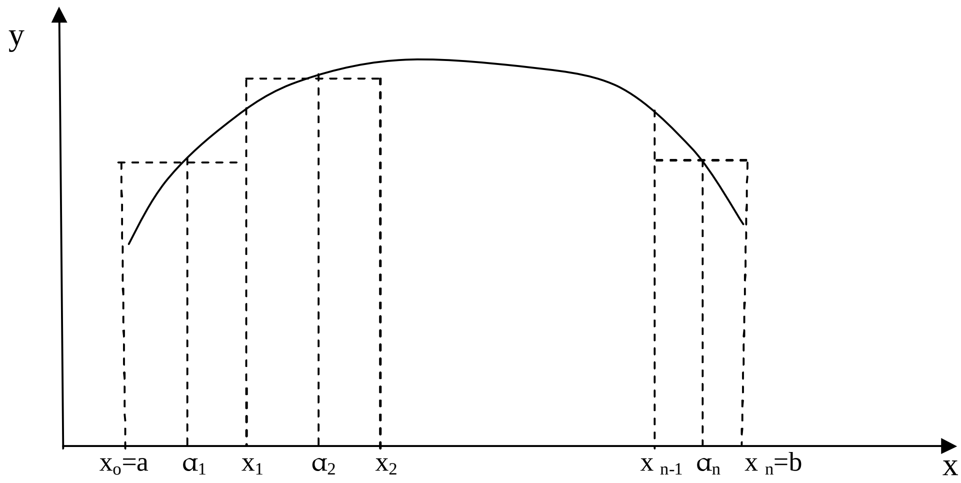
Определенный интеграл.

§8 Определенный интеграл как предел интегральной суммы.

Пусть на отрезке [ab] дана непрерывная функция y=f(x). Необходимо найти площадь криволинейной трапеции (криволинейная трапеция- часть плоскости, заключенная между графиком функции, осью OX и вертикальными прямыми x=a и x=b)



Разобьем отрезок [ab] на n отрезков точками $x_o=a$, x_1, x_2 …….. $x_n=b$. Длина каждого из отрезков будет равна: $\Delta x= x_o- x_1,\ldots,\Delta x_n= x_n- x_{n-1}$.

Внутри каждого отрезка разбиения возьмем точки $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ и вычислим значения функции в этих точках: $f(\alpha_1), f(\alpha_2),\ldots, f(\alpha_n)$. Составим сумму площадей полученных прямоугольников:

$$S_n = f(a_1)\Delta x_1 + f(a_2)\Delta x_2 + \ldots + f(a_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Сумма (1) называется интегральной суммой функции y=f(x) на отрезке [a,b] и представляет собой сумму площадей всех прямоугольников и, следовательно, приближенно выражает площадь криволинейной трапеции, и тем точнее, чем больше число участков разбиения и чем меньше длина каждого из них.

<u>Опр. 1</u> Определенным интегралом от функции y=f(x) на отрезке [a,b] называется предел интегральной суммы (1), когда число участков разбиения стремится к бесконечности, а длина каждого из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to 0 \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

Где a и b называются пределами интегрирования, причем **a** – нижний предел интегрирования, а **b** – верхний предел интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Геометрический смысл неопределенного интеграла - площадь криволинейной трапеции.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Теорема. (Теорема существования определенного интеграла).

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] , то интеграл от этой функции на данном отрезке существует.

Примечание: таким образом, определенный интеграл представляет собой число, зависящее от вида подынтегральной функции и от пределов интегрирования. А неопределенный интеграл представляет собой функцию от переменной **x**.

§9 Связь между неопределенным и определенным интегралом.

Опр. 1 Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Очевидно (из геометрического смысла), что интеграл с переменным верхним пределом является функцией от **x**. Для того, чтобы различать верхний предел и переменную интегрирования они обозначаются разными буквами.

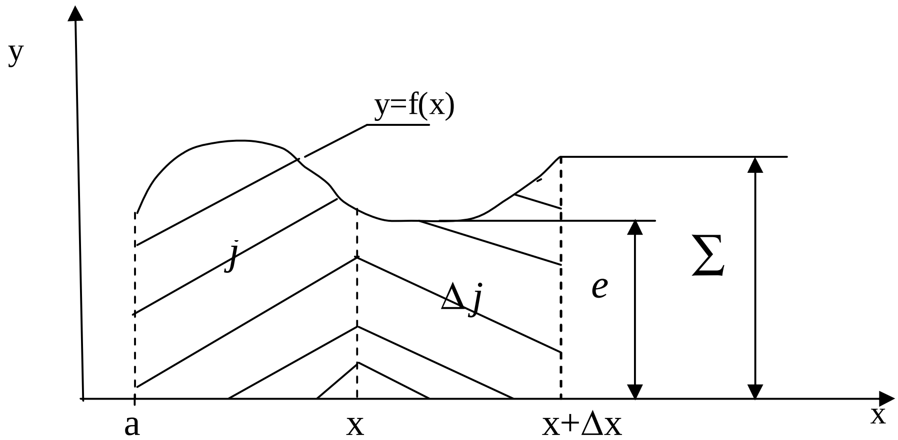
Теорема 1. Если подынтегральная функция непрерывна, то интеграл с переменным верхним пределом (1) равен сумме первообразной и произвольной постоянной, то есть:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \qquad (2)$$

где
$$F'(x) = f(x) \qquad (3)$$

Доказательство:

$$j(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (*)$$



M и m это наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке [x; x+Δx]. Очевидно (из геометрического смысла), что mΔx≤Δj ≤MΔx, или m≤ $\dfrac{\Delta j}{\Delta x}$ ≤M.

Переходим в этом неравенстве к пределу при Δx→0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta j}{\Delta x} = j'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x)$$

по свойству пределов (« предел функции, значение которой заключено между двумя другими»). Таким образом:

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$$j'(x) = f(x)$$

учитывая (3), получим $j'(x) = F'(x)$, следовательно $j(x) = F(x) + C$ (a).

Подставляя (a) в (*) получаем (2), что и требовалось доказать.

Примечание: таким образом, интеграл с переменным верхним пределом представляет собой неопределенный интеграл.

Теорема 2. Если функция f(x) непрерывна на интервале [a;b] и F(x) является ее первообразной, то определенный интеграл от функции f(x) на [a;b] равен разности значений первообразной по верхнему и нижнему пределам интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

(4) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Доказательство:

из геометрического смысла определенного интеграла, очевидно, что определенный интеграл, взятый на отрезке нулевой длины, равен нулю, то есть

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Тогда, подставив в формулу (2) x=a, получаем *0=F(a) +C* или *C= - F(a).*

Тогда (2) примет вид

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Теперь подставим $x=b$ и получим (4) . Ч.т.д.

Для удобства используется знак двойной подстановки

$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, то есть (4) окончательно выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (5)$$

Таким образом, (5) указывает на порядок действий по вычислению определенного интеграла:

1. Находим первообразную (то есть интегрируем).
2. Вычисляем значение первообразной на концах отрезка.
3. Находим разность значений первообразных по верхнему и по нижнему пределам интегрирования.

Рассмотрим пример:

$$\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} = \sin(\frac{p}{6}) - \sin(-\frac{p}{6}) = 2\sin\frac{p}{6} = 1$$

§10 Свойства определенного интеграла.

1. Если в определенном интеграле пределы интегрирования поменять местами, то знак интеграла поменяется на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Доказательство: по формуле (4) §9 имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = (4), №9 = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Константу можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство:

$$\int_a^b kf(x)dx = опр1, №8 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^n kf(a_i)\Delta x_i = k \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^n f(a_i)\Delta x_i =$$

$$= опр1, №8 = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int_a^b \left[f_1(x) \right] dx + \int_a^b \left[f_2(x) \right] dx.$$

Доказательство:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = опр1, парагр.8 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^n [f_1(a_i) + f_2(a_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \{\sum_{i=1}^n [f_1(a_i)]\Delta x_i + \sum_{i=1}^n [f_2(a_i)]\Delta x_i\} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^n [f_1(a_i)]\Delta x_i + \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^n [f_2(a_i)]\Delta x_i = опр1, парагр.8 =$$

$$= \int_a^b [f_1(x)]dx + \int_a^b [f_2(x)]dx$$

4. Теорема о среднем (значении).

Если функция y=f(x) непрерывна на [a;b], то определенный интеграл от этой функции на [a;b] равен произведению длины этого отрезка на значение подынтегральной функции в некоторой точке **α** (**α** расположена внутри отрезка):

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) \qquad (a < \alpha < b)$$

Доказательство:

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

по формуле Ньютона-Лейбница имеем $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,

Применим теорему Лагранжа о конечных приращениях для F(x):

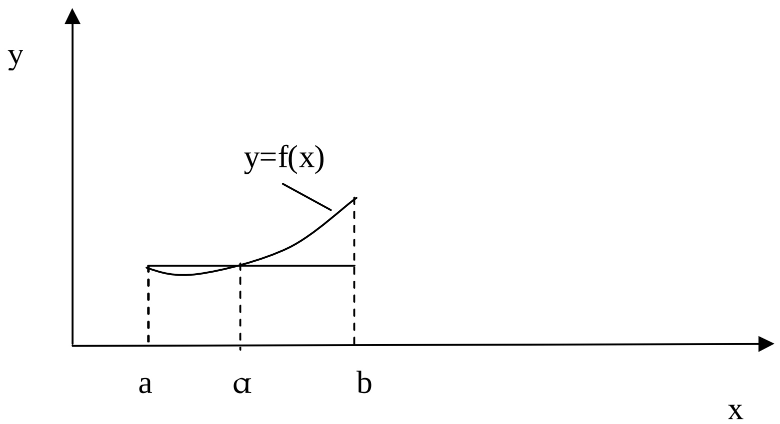
$F(b) - F(a) = (b-a)F'(a),\ \ (a < a < b)$ или $F(b) - F(a) = (b-a) f(a)$.

Подставим последнее выражение в формулу Ньютона-Лейбница и получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a) f(a), \qquad \text{отсюда}$$

$$f(a) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)},$$

f(α) называется средним значением функции на отрезке [a;b].



f(α) это высота такого прямоугольника, площадь которого равна площади криволинейной трапеции.

5. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на [a;b] и во всех точках этого интервала удовлетворяют неравенству f(x) ≥ φ(x), то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b j(x)dx$.

Доказательство: для простейшего случая, когда f(x) >0 и φ(x)>0, доказательство вытекает из геометрического смысла определенного интеграла.

6. Для любых чисел **a,b,c** справедливо $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

   Доказательство для частного случая, когда точка **c** лежит внутри отрезка [a;b]. Это свойство вытекает из геометрического смысла определенного интеграла:

§11 Подстановка в определенном интеграле.

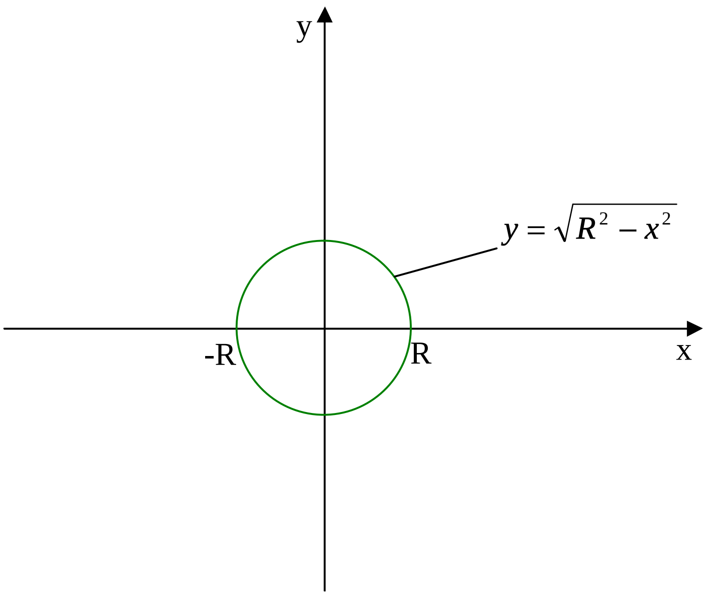
Вычисление определенного интеграла начинается с нахождения первообразной, при этом могут использоваться различные методы интегрирования, рассмотренные в разделе «неопределенный интеграл», в том числе и замена переменной (подстановка).

Пределы интегрирований относятся к первоначальной переменной *x*, поэтому после использования подстановки (перед тем, как подставлять пределы по формуле Ньютона-Лейбница) необходимо не забывать делать следующее:

<u>либо вернуться к старой переменной **x**, либо поменять пределы интегрирования.</u>

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Пример: найти площадь круга:



Используется тригонометрическая подстановка:

$$x = R\sin t \Rightarrow \begin{cases} -R = \sin t_1 \Rightarrow t_1 = -\frac{p}{2} \\ R = \sin t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{p}{2} \end{cases}$$

$$dx = R\cos t dt$$

$$S = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\int_{t_1}^{t_2} R\cos t R\cos t dt = 2R^2\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^2 t dt = 2R^2\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= R^2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\Bigg| = R^2\left[(\frac{p}{2}+0)-(-\frac{p}{2}-0)\right] = pR^2$$

§12 Интегрирование по частям в определенном интеграле.

См. введение в §11. Один из методов – *метод интегрирования по частям*.
Пусть даны две дифференцируемые функции u(x) и v(x).

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (1)$$

(1) - формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Рассмотрим пример:

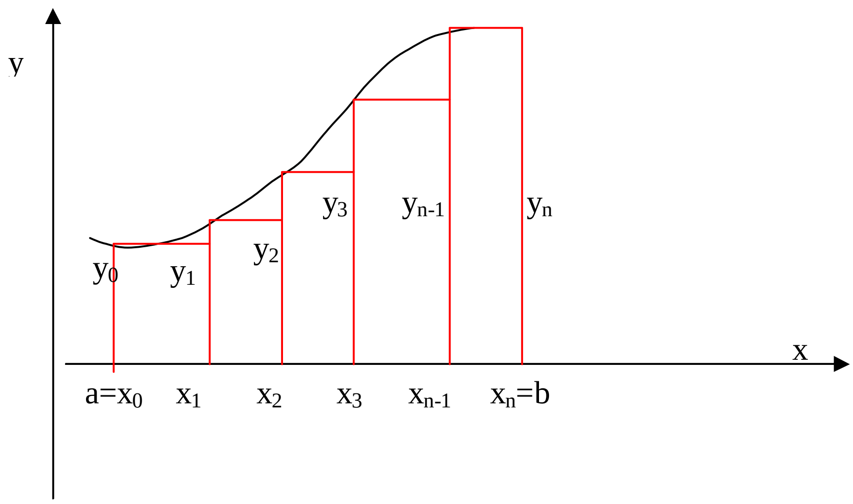
$$\int_1^e x\ln x dx = (u=\ln x, du=\frac{1}{x}dx, dv=xdx, v=\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

§13 Численные методы интегрирования.

Из теоремы существования определенного интеграла известно, что определенный интеграл на интервале [a;b] существует, если подынтегральная функция f(x) непрерывна. Если это условие выполняется, остается найти только первообразную. Однако, существуют такие функции, от которых первообразную найти невозможно, например $\frac{\sin x}{x}$; $\frac{\cos x}{x}$; $\frac{1}{\ln x}$; e^{-x^2}. В этом случае используются численные методы интегрирования, которые позволяют найти определенный интеграл приближенно, но с любой (наперед заданной) степенью точности. Все приближенные методы вычисления основаны на геометрическом смысле определенного интеграла.

1. <u>Метод прямоугольников</u>.



Пусть на [a;b] дана непрерывная функция f(x).
Разобьем отрезок [a;b] на <u>n равных </u>отрезков точками $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$.
Введем обозначения $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$,.., $y_n=f(x_n)$.
Определенный интеграл от f(x) на [a;b] приближенно равен:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx y_0h + y_1h + y_2h + \ldots + y_{n-1}h}$$

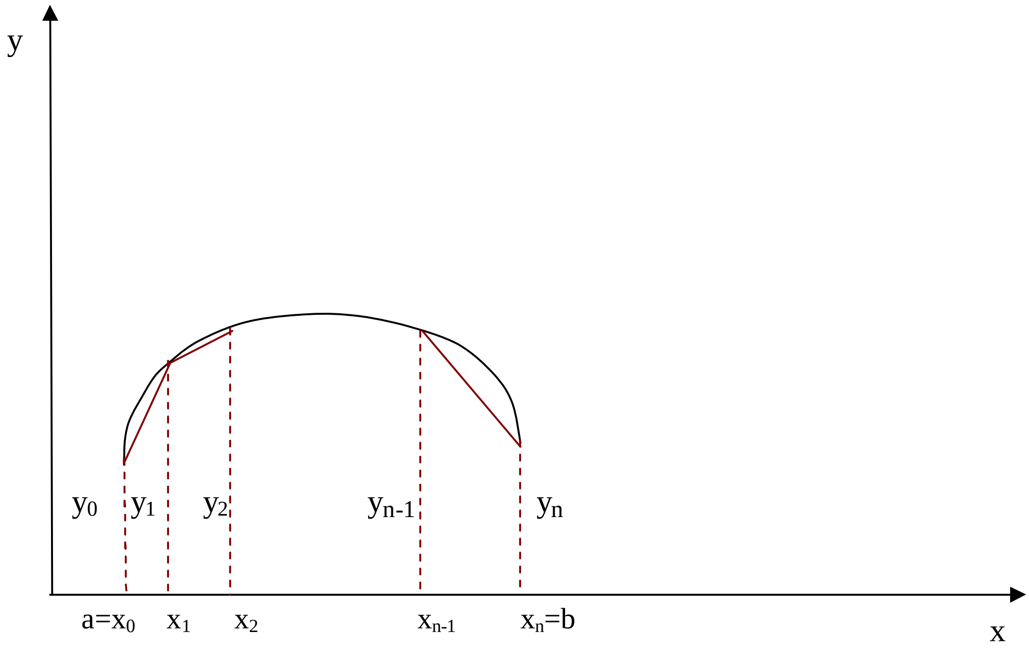
$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Приближенно заменяем площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямоугольников. Длина каждого отрезка разбиения обозначается h, h=$\frac{b-a}{h}$, h называют шагом интегрирования. Это не очень точный метод, он даже не учитывает значение

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

подынтегральной функции в точке x_n. Однако, точность этого метода можно увеличивать, увеличивая число участков разбиения и уменьшая шаг интегрирования.

2.Метод трапеций



В данном методе площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой площадей прямоугольных трапеций:

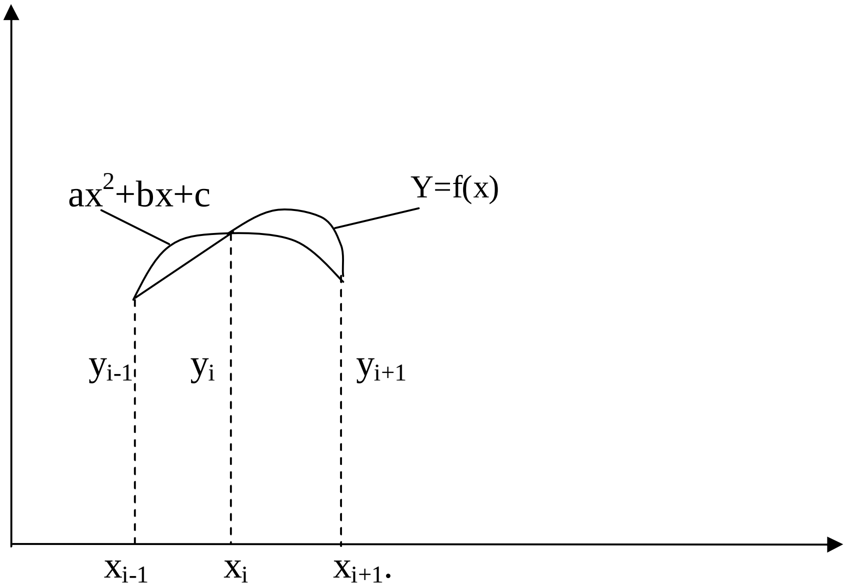
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{y_o+y_1}{2}h + \frac{y_1+y_2}{2}h + \frac{y_2+y_3}{2}h + .. + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h \approx h\left(\frac{y_o+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)}$$

Метод трапеции более точный, чем метод прямоугольников.

3.Метод Симпсона.

В этом методе число участков разбиения n должно быть четным. Сущность метода заключается в том, что на каждой смежной паре отрезков разбиения график функции $y=f(x)$ заменяется параболой ax^2+bx+c. На каждой паре отрезков коэффициенты a, b, c выражаются через y_{i-1}, y_i, y_{i+1}.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com



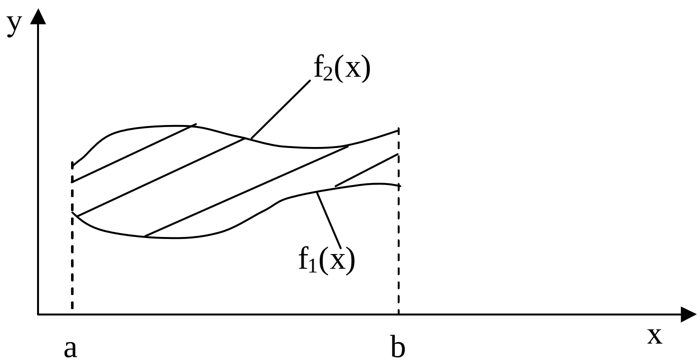
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=1,3,5}^{n-1}(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1})}$$ - формула Симпсона.

Этот метод является самым точным из трех методов.

§14 Геометрические приложения определенного интеграла.

1) *Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат*.

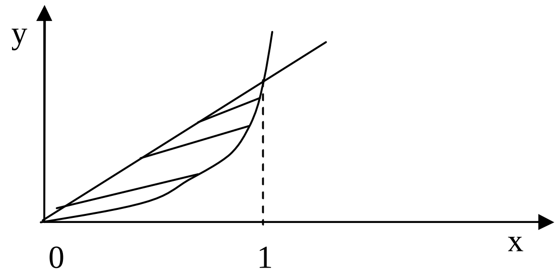
а)



$$\boxed{S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx}$$

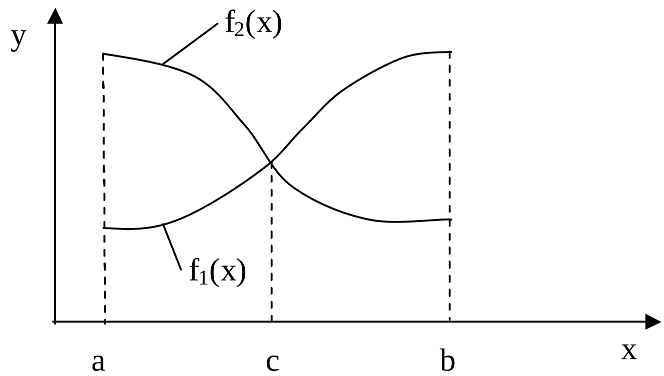
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Рассмотрим пример: найти площадь фигуры, заключенной между графиками функций y=x и y=x^2 на [0;1]



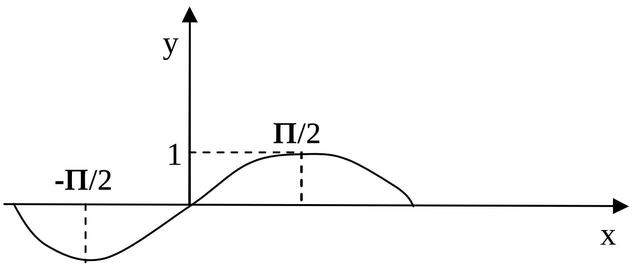
$$S=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-0-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{6}$$

б) Отрезок [a;b] надо разбить на 2 отрезка:



$$S=\int_a^c f_2(x)dx-\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_1(x)dx-\int_c^b f_2(x)dx$$

Рассмотрим пример: *y=Sinx,* [-π/2; π/2]



Рассматриваем частный случай, когда $f_2(x)=0$ (ось OX):

$$S=0-\int_{-\frac{p}{2}}^{0}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{p}{2}}\sin x\,dx-0=-(-\cos x)\Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{0}-\cos x\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=(1-0)-(0-1)=2$$

2) *Площадь фигур, ограниченных кривыми, заданными в параметрической форме*.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Пусть кривая L_2 ограничивает фигуру сверху, а кривая L_1 ограничивает снизу:

$$L_2:\begin{cases} y = f_2(x) \\ x = j_2(x) \end{cases} \qquad dx = j_2'(t)dt$$

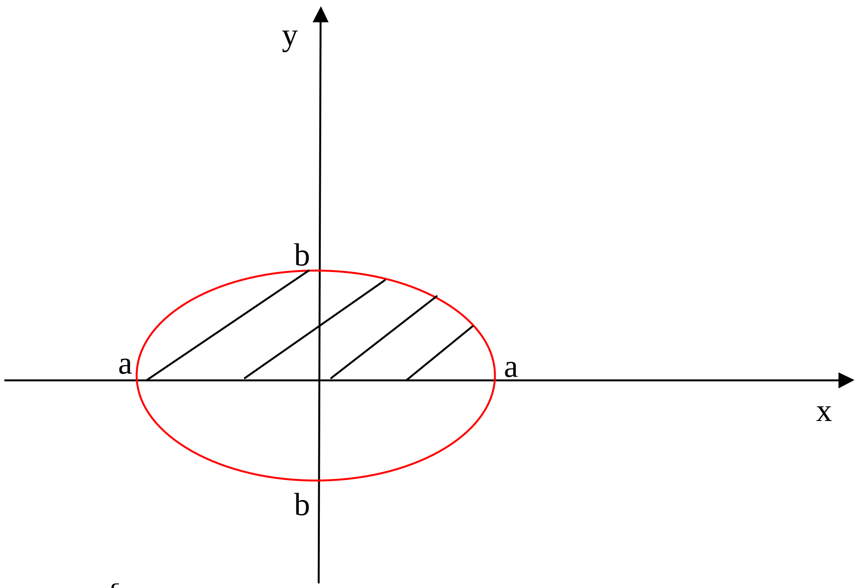
$$L_1:\begin{cases} y = f_1(x) \\ x = j_1(x) \end{cases} \qquad dx = j_1'(t)dt$$

Подставляем в формулу (1а):

$$\boxed{S = \int_{a_2}^{b_2} f_2(t)j_2'(t)dt - \int_{a_1}^{b_1} f_1(t)j_1'(t)dt,}$$

α и β – пределы интегрирования по параметру t.

Рассмотрим пример: найти площадь эллипса.



$$\begin{cases} y = b\sin t \\ x = a\cos t \end{cases}$$

Рассматриваем случай, когда $f_1(x)=0$.

$$dx = -a\sin t dt$$

$$x = a\cos t$$

$$-a = a\cos a \Rightarrow a = p$$

$$a = a\cos b \Rightarrow b = 0$$

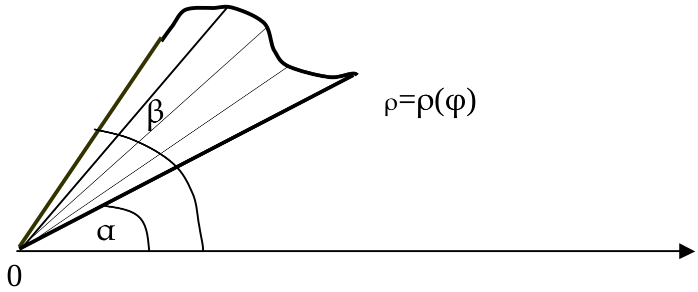
$$S = 2\int_a^b b\sin t(-a\sin t)dt = -2ab\int_p^0 \sin^2 t dt = 1 св - во =$$

$$= 2ab\int_0^p \sin^2 t dt = 2ab\int_0^p \frac{1-\cos 2t}{2}dt = ab(t\Big|_0^p - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^p) = pab$$

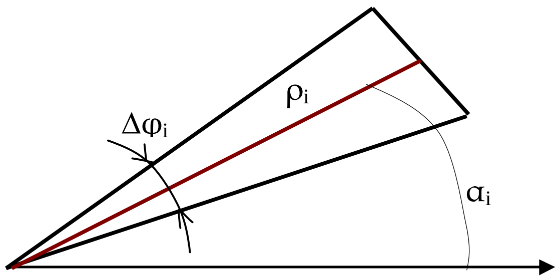
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

3) <u>Площадь фигур в полярной системе координат.</u>

Напомним, что в ПСК точки на плоскости определяются двумя координатами, r - полярный радиус, φ- полярный угол (против часовой стрелки - отсчет угла положительный).
Необходимо найти площадь:



Разобьем угол β **-** a на n углов*:*$\Delta\, \varphi_1$**,** $\Delta\, \varphi_2$**,…,**$\Delta\, \varphi_n$, и, соответственно, данную фигуру на ***n*** элементарных секторов.



Внутри каждого сектора возьмем фиксированное значение угла a_i и введем обозначение $\rho_i=\rho(a_i)$. Приближенно площадь данного элементарного сектора берем как площадь треугольника с высотой ρ_i и с основанием $\Delta\varphi_i\, \rho_i$: $S_i \approx \frac{1}{2} r_i^{\,2} \Delta j_i$

Просуммировав, получим:

$$S_n \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^{\,2} \Delta j_i$$

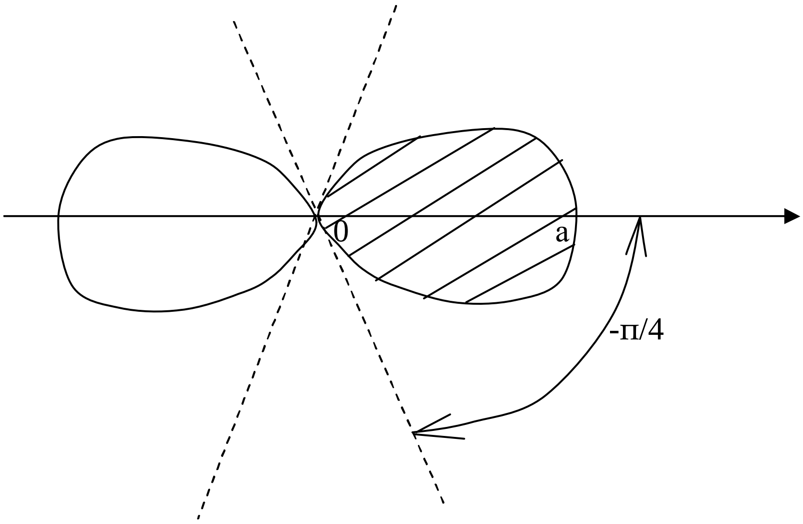
$\boldsymbol{S_n}$ приближенно выражает площадь данной фигуры. И тем точнее, чем больше ***n*** и чем меньше каждое из $\Delta\varphi_i$. Тогда точное значение площади получим, переходя к пределу при $\boldsymbol{n}\to\infty$ *и* $\Delta\varphi_i \to \boldsymbol{0}$. А так как предел интегральной суммы есть определенный интеграл, то:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(j)\,dj}$$

Рассмотрим пример: найти площадь одного лепестка лемнискаты.
Уравнение лемнискаты

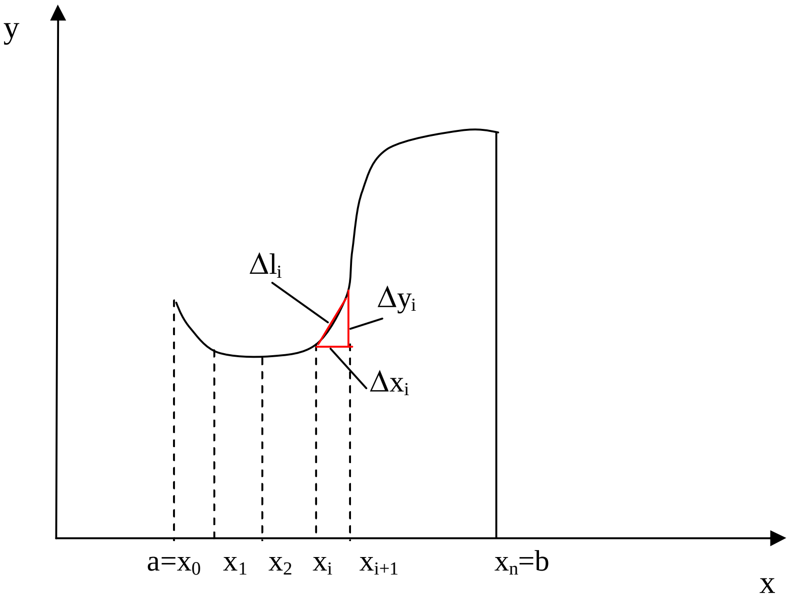
$$r = a\sqrt{\cos 2j}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com



$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{p}{4}}^{\frac{p}{4}} a^2\cos 2j\,dj=\frac{1}{2}\frac{a^2}{2}\sin 2j\Bigg|_{-\frac{p}{4}}^{\frac{p}{4}}=\frac{a^2}{4}(1+1)=\frac{a^2}{2}$$

4) *<u>Длина дуги кривой в декартовой системе координат.</u>*



На [a;b] кривая описывается уравнением $y=f(x)$. $y=f(x)$ непрерывна на [a;b]. Необходимо найти длину этой линии.
Разобьем отрезок [a;b] на n отрезков точками $a=x_0$, $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n=b$.

Заменим кривую ломаной линией, длина каждого звена которой равна

$$\Delta l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i,$$ по теореме Лагранжа

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$$\Delta y_i = \Delta x_i f'(a_i), \quad x_i < a_i < x_{i+1},$$ поделим на Δx_i и получим

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + [f'(a)]^2}\,\Delta x_i$$

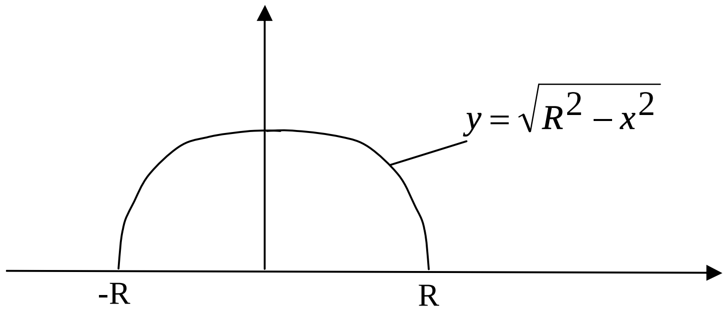
Суммируя все величины, получим длину всей ломаной линии

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(a_i)]^2}\,\Delta x_i,$$

которая приближенно выражает длину кривой на [a;b], и тем точнее, чем больше n и чем меньше каждый из Δx_i. Переходя к пределу при $\boldsymbol{n \to \infty}$ *и* $\boldsymbol{\Delta x_i \to 0}$, получим точное значение длины кривой в виде определенного интеграла:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.}$$

Рассмотрим пример: найти длину



окружности.

$$l = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 2R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= -2R(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = 2pR$$

5) *<u>Длина дуги кривой, заданной параметрически.</u>*

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow dx = x'(t)dt \end{cases}$$

Подставим это в формулу пункта 4:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\;dt}$$

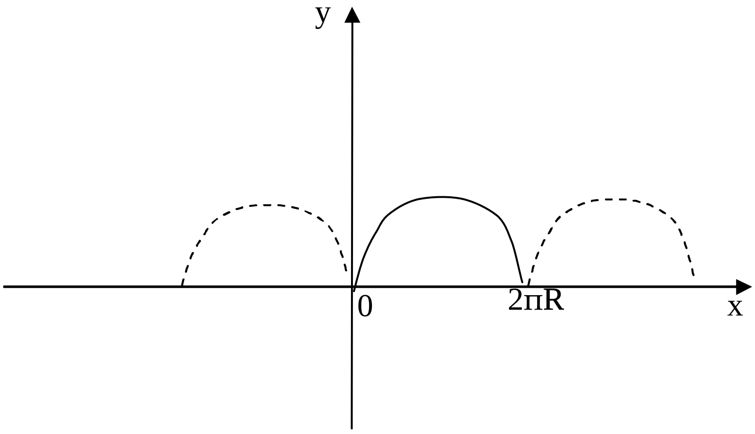
Рассмотрим пример: найти длину первой арки циклоиды

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$$\begin{cases} y = R(1-\cos t) \Rightarrow y'(t) = R\sin t \\ x = R(t-\sin t) \Rightarrow x'(t) = R(1-\cos t) \end{cases}$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 (1-\cos t)^2}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= R \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = -4R\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R$$



6) *<u>Длина дуги кривой в полярной системе координат.</u>*

Кривая в ПСК задана уравнением: *ρ=f(φ)*.
Как известно, декартовая и полярная системы координат связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y = \rho \sin \varphi \\ x = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

т.е. кривую можно рассматривать как заданную в параметрическом виде, где φ - параметр, тогда можно использовать формулу пункта 5

$$y'_\varphi = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi$$

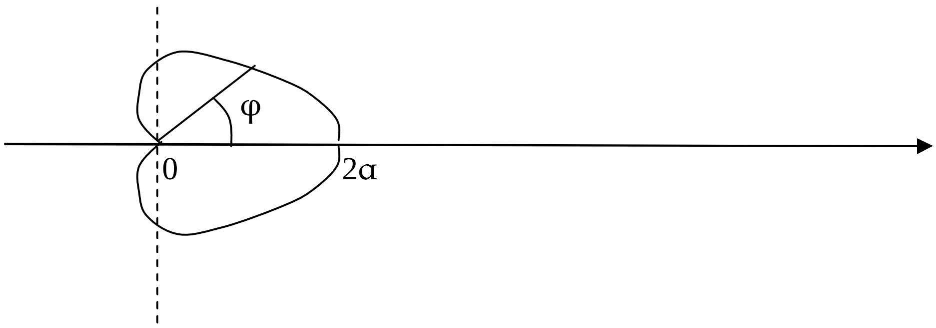
$$x'_\varphi = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi$$

подставим эти производные в формулу пункта 5:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2}\, d\varphi \; .$$

Рассмотрим пример: найти длину кардиоиды, ее уравнение имеет вид $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com



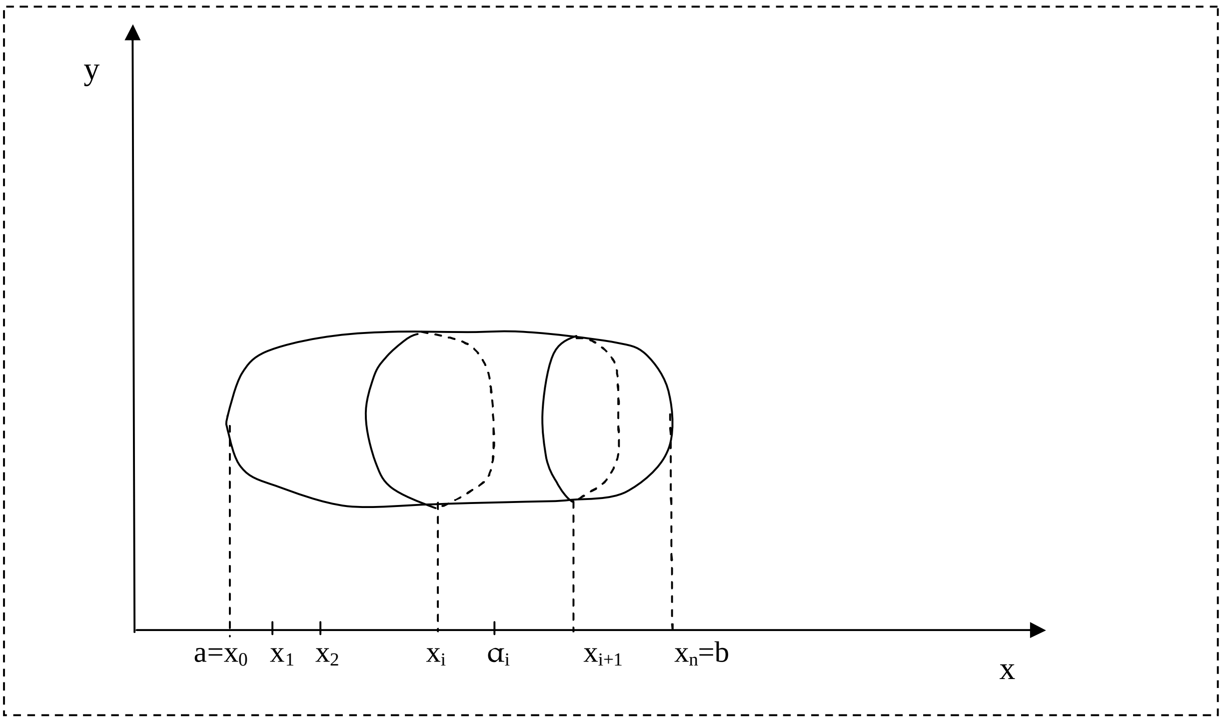
Найдем длину половинки и умножим ее на 2,

$$r'(j) = -a\sin j$$

$$l = 2\int_0^p \sqrt{a^2\sin^2 j + a^2(1+\cos j)^2}\,dj = 2a\int_0^p \sqrt{2+2\cos j}\,dj =$$

$$= 2a\int_0^p \sqrt{4\cos^2\frac{j}{2}}\,dj = 4a\int_0^p \cos\frac{j}{2}\,dj = 8a\int_0^p \cos\frac{j}{2}\,d\frac{j}{2} = 8a\sin\frac{j}{2}\Big|_0^p = 8a$$

7) <u>Объем тела по площадям поперечных сечений</u>



Тело ориентировано в пространстве так, что располагается над отрезком [a;b] оси OX. Необходимо найти объем тела.

Разобьем отрезок [a;b] на n отрезков точками $a=x_0$ x_1, x_2, ……, $x_n=b$. Разрежем тело на n частей плоскостями $x=x_i$ (плоскость, перпендикулярная оси OX) . Площади поперечных сечений тела будут представлять из себя непрерывную функцию $S(x)$. Внутри каждого

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

отрезка разбиения берем точку α_i и вычисляем площадь поперечного сечения тела для этой координаты. Тогда приближенно объем *i*-ой части тела будет равен

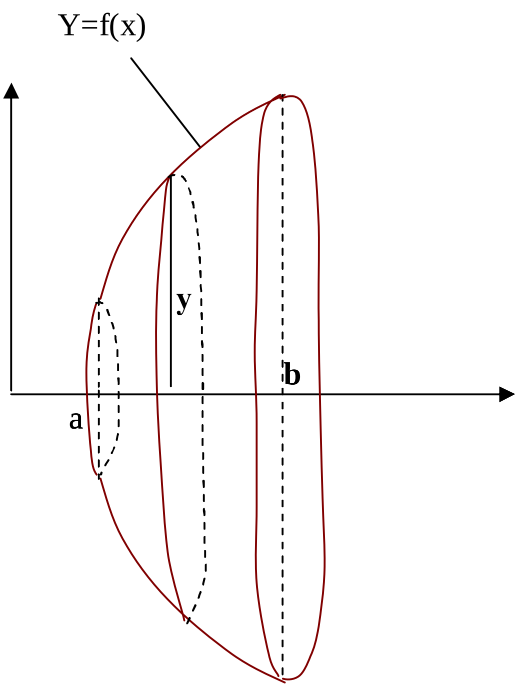
$V_i \approx S(a_i)\Delta x_i$. Просуммировав все эти значения получим

$$V_n \approx \sum_{i=1}^{n} S(a_i)\Delta x_i.$$

Последнее выражение представляет собой интегральную сумму, приближенно выражающую объем данного тела, и тем точнее, чем больше *n* и чем меньше каждый из Δx_i. Переходя к пределу при $n \to \infty$ *и* $\Delta x_i \to 0$, получим точное значение объема тела в виде определенного интеграла:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

8) *__Объем тела вращения.__*



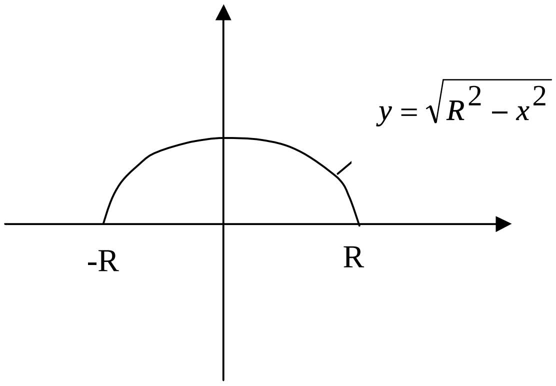
Тело получено вращением непрерывной на отрезке [a;b] функции вокруг оси OX. Так как это – тело вращения, то поперечное сечение представляет собой круг с радиусом y , значит $S(x) = py^2 = p(f(x))^2$.

Подставляя последнее равенство в формулу пункта 7, получим объем тела вращения:

$$\boxed{V = p\int_a^b (f(x))^2 dx}$$

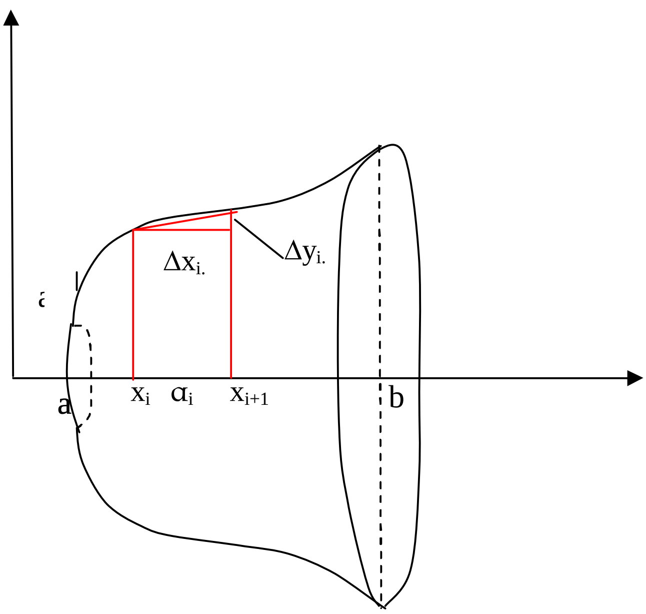
Рассмотрим пример: найти объем шара.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com



$$V = p\int\limits_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = p\left[R^2x\Big|_{-R}^{R} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}\right] = \frac{4}{3}pR^3$$

9) *Площадь поверхности тела вращения.*



Тело образовано вращением непрерывной кривой y=f(x) вокруг оси OX на [a;b]. Разобьем [a;b] на ***n*** отрезков точками $a=x_0$ x_1 , x_2 ,… , $x_n=b$. Заменим кривую f(x) ломаной линией, длина каждого звена которой равна (смотри пункт 4)

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(a_i)]^2}\,\Delta x_i$$

Приближенно площадь поверхности вращения i-ого звена имеет вид:

$$S_i \approx 2pf(a_i)\sqrt{1 + [f'(a_i)]^2}\,\Delta x_i .$$ Просуммировав, получим

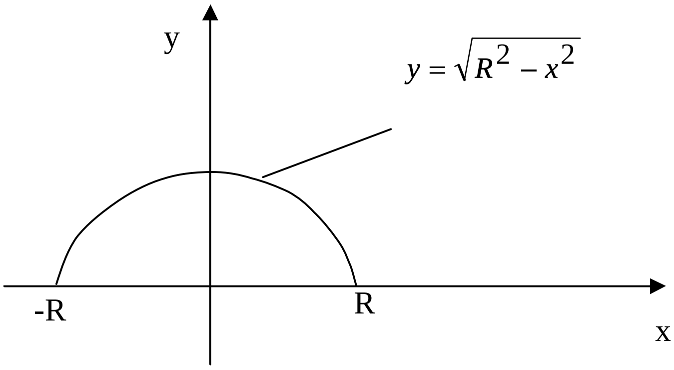
$$S_n = 2p\sum_{i=0}^{n} f(a_i)\sqrt{1 + [f'(a_i)]^2}\,\Delta x .$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Последнее выражение представляет собой интегральную сумму, приближенно выражающую искомую площадь поверхности вращения, и тем точнее, чем больше *n* и чем меньше каждый из Δx_i. Переходя к пределу при $\boldsymbol{n\to\infty}$ и $\boldsymbol{\Delta x_i \to 0}$, получим точное значение площади поверхности вращения в виде определенного интеграла:

$$S = 2p\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f(x)]^2}\,dx$$

Рассмотрим пример: найти площадь поверхности шара.



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$S = 2p\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}\,dx = 2p\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 2pRx\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= 2pR(R+R) = 4pR^2$$

§15 Несобственные интегралы.

1) Интегралы с бесконечными пределами.

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом:

$\int_a^t f(x)dx$, когда $t\to\infty$.

Определение: предел $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$

называется несобственным интегралом с бесконечно большим верхним пределом

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \qquad (1).$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Если предел (1) существует как конечное число, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся (то есть когда он равен бесконечности или вообще не существует). Аналогично вводится понятие несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом:

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx \qquad (2).$$

Несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами вводится следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int_c^{\infty} f(x)dx \qquad (3).$$

Если оба интеграла, стоящих в правой части равенства (3) сходятся, то тогда сходится и интеграл, стоящий слева.

Рассмотрим пример:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^{\infty} = 0+1; \textit{сходится}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Bigg|_1^{\infty} = \infty - 0; \textit{расходится}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Bigg|_1^{\infty} = \infty; \textit{расходится.} \quad \textit{Т.о. приходим к выводу:}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx \quad \begin{matrix} p > 1 \textit{сходится} \\ p \le 1 \textit{расходится} \end{matrix}$$

<u>Теорема.</u> Признак сравнения: если для всех $x \ge a$ выполняется неравенство $\varphi(x) \le f(x)$ и известно, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то тогда сходится и интеграл $\int_a^{\infty} j(x)dx$.

Если для всех $x \ge a$ $f(x) \le \varphi(x)$ и известно, что $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то так же расходится и интеграл $\int_a^{\infty} j(x)dx$.

Рассмотрим пример: исследовать на сходимость

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^3}$. Возьмем для сравнения интеграл, который сходится - $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$, $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^3} < \frac{1}{x^3}$ значит, исследуемый интеграл также сходится.

2) <u>Интегралы от разрывных функций.</u>

Пусть функция *y=f(x)* определена на [a;b], а в точке *x=b* функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным и определяется следующим образом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} \int\limits_a^t f(x)dx \qquad (1).$$

Если предел (1) существует (как конечное число), то такой интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся.

Если *y=f(x)* непрерывна на интервале [a;b] , а в точке *x=a* терпит разрыв, то тогда несобственный интеграл имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} \int\limits_t^b f(x)dx \qquad (2)$$

Если предел (2) существует (как конечное число), то такой интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся.

Если же подынтегральная функция терпит разрыв внутри интервала [a;b], то несобственный интеграл определяется так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

где несобственные интегралы, стоящие справа, определяются формулами (1) и (2) соответственно. Интеграл, стоящий слева сходится, когда сходятся оба несобственных интеграла, стоящих справа.

Рассмотрим пример:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0-0} \int\limits_{-1}^{t} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{t \to 0+0} \int\limits_{t}^{1} \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\lim_{t \to -0} \left. \frac{1}{x} \right|_{-1}^{t} - \lim_{t \to 0+0} \left. \frac{1}{x} \right|_{t}^{1} = (\infty - 1) - (1 - \infty) = \infty$$

Интеграл расходится.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com