Неопределенный интеграл.

§1 Первообразная и неопределенный интеграл.

Как по данной функции *f(x)* найти такую функцию *F(x)*, производная которой равна данной функции.

Опр.1 Функция *F(x)* называется первообразной от функции *f(x)* если выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Например, $x^3/3$ является первообразной от функции x^2, т.к. $(x^3/3)' = x^2$.

Опр.2 Операция нахождения первообразной от функции *f(x)* называется интегрированием этой функции и записывается в виде: $\int f(x)dx$

Опр.3 Если *F(x)* является первообразной от *f(x)* и С - произвольная константа, то выражение *F(x)* + С называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и записывается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

Пример: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций.

Свойства неопределенных интегралов.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \tag{3}$$

Доказательство:

$$(\int f(x)dx)' = (2) = (F(x) + C)' = F'(x) = (1) = f(x) \quad ч.т.д.$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx \tag{4}$$

Доказательство: $d(\int f(x)dx) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = (3) = f(x)dx \quad ч.т.д.$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная С, то есть

$$\int dF(x) = F(x) + C \tag{5}$$

Доказательство: согласно определению дифференциала

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = (1) = \int f(x)dx = (2) = F(x) + C \quad ч.т.д.$$

Частный случай: F(x)=x, то $\int dx = x + C$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \qquad (6)$$

Доказательство: рассмотрим левую часть равенства (6):

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = (1) = \int [F_1(x) + F_2(x)]' dx = \int d[F_1(x) + F_2(x)] = (5)$$
$$= F_1(x) + F_2(x) + C \qquad (a)$$

а теперь рассмотрим правую часть равенства (6):

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = (2) = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2 = F_1(x) + F_2(x) + C \quad (b)$$

При условии, что $C_1+C_2 = C$. Сравнивая выражения (a) и (b), получаем равенство (6) ч.т.д.

5. Константу можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (7)$$

Доказательство:

$$\int af(x)dx = (1) = \int aF'(x)dx = \int (aF(x))' dx = \int d(aF(x)) = (5) = aF(x) + C_1 =$$
$$= a(F(x) + C) = (2) = a\int f(x)dx, \qquad где \quad C = \frac{C_1}{a}$$

Табличные интегралы:

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Беря производные от функций, стоящих справа в этой таблице, мы будем получать подынтегральные функции.

§2 **Замена переменных**.

Процесс интегрирования заключается в том, чтобы с помощью тождественных преобразований данный интеграл свести к табличному или комбинации табличных интегралов. Один из основных методов интегрирования является метод замены переменных или подстановка. Этот метод заключается в том, что путем введения новой переменной t=f(x) данный интеграл сводится к табличному. Рассмотрим пример:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dx = \int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int\frac{t^2}{t^2+1}dt = \int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= \int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt = \int dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt = t - arctgt + C = \sqrt{x^2-1} - arctg\sqrt{x^2-1} +$$

$$+C$$

В этом примере сделаны замены:

$$t^2 = x^2 - 1,\quad x = \sqrt{t^2-1},\quad dx = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}dt$$

Подведение констант под знак интеграла.

$d\left(x^2\right) = 2xdx$

$d\left(x^2+5\right) = 2xdx$

$d(x \pm a) = dx$

Т.е. под знаком дифференциала можно прибавлять или отнимать любое число.

Кроме того: $\dfrac{1}{b}d(bx \pm a) = dx$

Рассмотрим примеры:

$$\int\cos(2x+3)dx=\frac{1}{2}\int\cos(2x+3)d(2x+3)=\frac{1}{2}\int\cos t dt=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$$

$$\int e^{3-4x}dx=-\frac{1}{4}\int e^{3-4x}d(3-4x)=-\frac{1}{4}\int e^{t}dt=-\frac{1}{4}e^{t}+C=-\frac{1}{4}e^{-4x+3}+C$$

Подведение функций под знак дифференциала.

Основано на определении дифференциала функции $dy=y'dx$

1. $xdx=\frac{1}{2}dx^2$
2. $x^2dx=\frac{1}{3}dx^3$
3. $\frac{1}{x^2}dx=-d\frac{1}{x}$
4. $\frac{1}{x}dx=d\ln|x|$
5. $e^x dx=de^x$
6. $\cos xdx=d\sin x$
7. $\sin xdx=-d\cos x$
8. $\frac{1}{\cos^2 x}dx=dtgx$
9. $\frac{1}{\sin^2 x}dx=-dctgx$
10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d\arcsin x=-d\arccos x$
11. $\frac{1}{1+x^2}dx=darctgx$

Рассмотрим примеры:

$$\int\frac{xdx}{x^2-3}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-3\right)}{x^2-3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-3\right|+C$$

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{1+x^6}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}arctgx^3+C$$

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}=\int\frac{dt}{t}=\ln\left|\ln x\right|+C$$

$$\int\frac{e^xdx}{1-e^{2x}}=\int\frac{de^x}{1-e^{2x}}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right|+C$$

$$\int\sin^5x\cos xdx=\int\sin^5xd\sin x=\int t^5dt=\frac{\sin^6x}{6}+C$$

$$\int\frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2x}dx=\int\sqrt{tgx}dtgx=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\int\frac{tg^{\frac{3}{2}}x}{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int\frac{\arcsin^3x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\arcsin^3xd\arcsin x=\frac{\arcsin^4x}{4}+C$$

§3 Интегрирование по частям.

Пусть даны две дифференцируемые функции u(x) и v(x), тогда d(uv)=udv+vdu, проинтегрируем

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu=по\ свойству\ 3\ параграфа 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int udv=uv-\int vdu$$

Это формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Интегрирование по частям применяется для определенных типов интегралов:

$\int x^k \sin ax\,dx$ $\qquad$ $\int x^k \cos ax\,dx$

$\int x^k e^{ax}\,dx$ $\qquad$ $\int x^k \ln ax\,dx$

$\int x^k \operatorname{arctg} ax\,dx$ $\qquad$ $\int x^k \arcsin x\,dx$

Где к и а—числа. Красным цветом отмечены функции, которые мы принимаем за u.

Рассмотрим пример:

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{2}xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C,$$

$$\textit{где\_}u=\ln x,\ dv=xdx,\ du=\frac{1}{x}dx,\ v=\frac{x^2}{2}$$

Примечание: формула интегрирования по частям может применяться 2 и более раз. Кроме того, метод интегрирования по частям может совмещаться с подведением под знак дифференциала. Рассмотрим примеры:

$$\int x^2e^{-x}dx=(1)=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right)=$$

$$=(2)=-e^{-x}x^2+2(-xe^{-x}-e^{-x}+C),$$

$$\textit{первый раз}:\ u=x^2,\quad dv=e^{-x}dx,\quad du=2xdx,\ v=-e^{-x},$$

$$\textit{второй раз}:\ u=x,\ dv=e^{-x}dx,\quad du=dx,\quad v=-e^{-x}.$$

$$\int\frac{arctg\ln x}{x}dx=\int arctg\ln x d\ln x=\int arctgtdt=tarctgt-\int\frac{tdt}{1+t^2}=$$

$$=tarctgt-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{1+t^2}==tarctgt-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C=$$

$$=\ln x arctg\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+(\ln x)^2\right)+C;$$

$$u=arctgt,\quad dv=dt,\quad du=\frac{dt}{1+t^2},\quad v=t,\qquad tdt=\frac{1}{2}d(t^2).$$

§4 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

v (1) $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\Rightarrow$ ...выделяем полный квадрат суммы или разности:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm K^2$$

$$....\Rightarrow \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm K^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm K^2}=\left[x+\frac{b}{2a}=t\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm K^2}="+"\Rightarrow 10\,\textit{табличный интеграл},"-"\Rightarrow 11\textit{табличный интеграл}.$$

Рассмотрим пример:

$$\int\frac{dx}{2x^2+6x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+3x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+2*\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})+5-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}}arctg\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+C$$

- (2) $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx\Rightarrow$ ....В числителе «лепим» производную от знаменателя т.е.: 2ax+b

$$...\Rightarrow\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b-b)+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\left[\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\ \textit{вычисляем по}\ (1),\quad (ax^2+bx+c)=t\Rightarrow dt=(2ax+b)dx\right]=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)*(1)=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)*(1)+C.$$

Рассмотрим пример:

$$\int\frac{3x+5}{x^2+4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4-4)+5}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx-1\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=$$

$$\left[x^2+4x+8=t,dt=(2x+4)dx\right]=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C$$

- (3) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

(3a) a>0: аналогично (1)

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}=(1)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm K^2}}\Rightarrow 12\ \textit{табличный интеграл}.$$

(3b) a<0: $\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{K^2\pm t^2}}\Rightarrow 9\ \textit{табличный интеграл}.$

v (4) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Аналогично (2), в числителе надо получить производную от квадратного трехчлена и разбить интеграл на сумму (разность) двух интегралов, согласно (2):

$$\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)*(3)=\frac{A}{2a}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)*(3)+C.$$

§5 Интегрирование рациональных дробей.

$P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+...+A_mx^m}{B_0+B_1x+B_2x^2+...+B_nx^n} \qquad (1)$$

Интегрирование дроби (1) осуществляется путем разложения этой дроби на сумму простейших дробей, тогда интеграл от дроби (1) разбивается на сумму простых интегралов.
Различают три вида простейших дробей:
1)Простейшая дробь первого типа: c, a – константы
$\frac{c}{x-a}$, тогда $\int\frac{c}{x-a}dx=c\int\frac{d(x-a)}{x-a}=c\ln|x-a|$ – второй табличный интеграл.
2) Простейшая дробь второго типа:
$\frac{c}{(x-a)^k}$, тогда $\int\frac{c}{(x-a)^k}dx=c\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=c\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}$ – первый табличный интеграл
3) Простейшая дробь третьего типа:
$\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ интегрируем согласно §4 (2). Корни знаменателя являются комплексными (если бы они были действительные, то эта дробь интегрировалась по 1) или 2) типу).
Примечание:
Дробь (1) должна быть *правильной, то есть максимальная степень числителя должна быть меньше максимальной степени знаменателя* ($m<n$), в противном случае ($m\geq n$) дробь (1) считается неправильной. В этом случае необходимо выделить целую часть (в виде целой рациональной функции) путем деления многочлен на многочлен (уголком).

Пример: $\frac{x^4+2x^3+3x^2-4x+2}{x^2-3x+2}...\Rightarrow$

$$
\begin{array}{l}
\_\,\underline{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}\,|\,\underline{x^2-3x+2} \\
\underline{x^4-3x^3+2x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^2+x+4 \rightarrow \textit{целая часть} \\
\_\,x^3+x^2-4x \\
\underline{x^3-3x^2+2x} \\
\_\,4x^2-6x+2 \\
\underline{4x^2-12x+8} \\
6x-6 \rightarrow \textit{остаток}
\end{array}
$$

$$\ldots \Rightarrow x^2+x+4+\frac{6x-6}{x^2-3x+2}$$

Правильная дробь (1) разбивается на сумму простейших дробей следующим образом:

(Первый случай) Знаменатель дроби (1) имеет n различных действительных корней, тогда этот знаменатель можно разложить на множители:

$Q_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, где a_1, a_2, a_n– корни знаменателя.

В этом случае дробь (1) раскладывается на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{C_1}{x-a_1}+\frac{C_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{C_n}{x-a_n} \qquad (2)$$

Для нахождения неизвестных C_1, C_2..C_n существует два метода:

(¤)*Метод неопределенных коэффициентов.*

$$\frac{x-6}{x^2-3x+2}=\frac{x-6}{(x-2)(x-1)}=\frac{C_1}{(x-2)}+\frac{C_2}{(x-1)}$$

$$\frac{x-6}{x^2-3x+2}=\frac{C_1(x-1)+C_2(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$x-6=C_1(x-1)+C_2(x-2)$$

$$x-6=x(C_1+C_2)-C_1-2C_2$$

Согласно методу неопределенных коэффициентов, мы приравниваем между собой коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, приравниваем и свободные члены: $\begin{cases} C_1+C_2=1 \Rightarrow C_1=1-C_2 \\ -6=-C_1-2C_2 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=5 \end{cases}$, тогда

$$\int\frac{x-6}{x^2-3x+2}dx=-4\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-1}=-4\ln|x-2|+5\ln|x-1|+C$$

(¤¤) Метод выборных значений x.

$$\frac{x-6}{x^2-3x+2}=\frac{x-6}{(x-2)(x-1)}=\frac{C_1}{(x-2)}+\frac{C_2}{(x-1)}$$
$$x-6=C_1(x-1)+C_2(x-2)$$
$$\text{при} \quad x=1: \ -5=-C_2 \Rightarrow C_2=5$$
$$\text{при} \quad x=2: \ -4=C_1 \Rightarrow C_1=-4.$$

(Второй случай) Знаменатель имеет n одинаковых действительных корней, то есть он имеет один корень кратности n. В этом случае знаменатель дроби (1) можно записать:

$Q_n(x) = (x - a)^n$

Тогда дробь (1) раскладывается на сумму простейших дробей первого и второго типов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{C_1}{(x-a)}+\frac{C_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{C_n}{(x-a)^n} \qquad (3)$$

Пример:

$$\frac{x-6}{(x-3)^3}=\text{согласно}(3)=\frac{C_1}{(x-3)}+\frac{C_2}{(x-3)^2}+\frac{C_3}{(x-3)^3},$$

нахождение C_1, C_2 и C_3 смотри (первый случай)

$$(x-6)=C_1(x-3)^2+C_2(x-3)+C_3$$

(Третий случай) Знаменатель имеет n только комплексных корней. Знаменатель $Q_n(x)$ можно представить так:

$$Qn(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots(x^2+p_tx+q_t), \ \text{где} \ t=\frac{n}{2}$$

В этом случае вся дробь (1) представляется в виде суммы простейших дробей третьего типа:

$$\frac{Pn(x)}{Qn(x)}=\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{C_tx+D_t}{x^2+p_tx+q_t}$$

$$\frac{(x+3)}{(x^2+2)(x^2+1)}=\frac{(C_1x+D_1)}{(x^2+1)}+\frac{(C_2x+D_2)}{(x^2+2)}$$

$$(x+3)=(C_1x+D_1)(x^2+2)+(C_2x+D_2)(x^2+1)$$

Находим неизвестные коэффициенты методом неопределенных коэффициентов:

$$(x+3)=(C_1+C_2)x^3+(D_1+D_2)x^2+x(2C_1+C_2)+2D_1+D_2$$

Коэффициенты при одинаковых степенях *x* приравниваются слева и справа между собой:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \Rightarrow \quad C_1=1 \\ D_1+D_2=0 \Rightarrow \quad D_1=3 \\ 2C_1+C_2=1 \Rightarrow \quad C_2=-1 \\ 2D_1+D_2=3 \Rightarrow \quad D_2=-3 \end{cases}$$

$$\frac{(x+3)}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x+3}{(x^2+1)}-\frac{x+3}{(x^2+2)}$$

(Четвертый случай) Комбинированный случай. Знаменатель имеет различные и кратные действительные, а также мнимые корни. В этом случае дробь (1) раскладывается на сумму простейших дробей всех трех типов по формуле, представляющей собой комбинацию первых трех пунктов.

Пример:

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx ...... \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{C_1}{(x-1)}+\frac{C_2}{(x+1)}+\frac{C_3x+D}{(x^2+1)}$$

$$1=C_1(x+1)(x^2+1)+C_2(x-1)(x^2+1)+(C_3x+D)(x-1)(x+1)$$

$$x=1 \Rightarrow C_1=\frac{1}{4}$$

$$x=-1 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{4}$$

$$x=0 \Rightarrow D=-\frac{1}{2}$$

$$x=2 \Rightarrow C_3=0$$

$$.... \Rightarrow \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}arctgx+C$$

§6 Интегрирование простейших иррациональностей.

1) $\int R(x, x^{\frac{l}{m}}, x^{\frac{n}{p}}, ..., x^{\frac{r}{s}})dx$, используется подстановка $x = t^k$, где k общий знаменатель дробей $\frac{l}{m}, \frac{n}{p} ... \frac{r}{s}$, тогда $dx = kt^{k-1}dt$.

Пример:

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2}dx = \int \frac{t^3}{t^2+2}6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+2}dt \ldots \Rightarrow$$

.

После деления уголком

$$.\Rightarrow 6\int (t^6 - 2t^4 + 4t^2 - 8 + \frac{16}{t^2+2})dt =$$

$$= 6\left(\int t^6 dt - 2\int t^4 dt + 4\int t^2 dt - 8\int dt + \int \frac{16}{t^2+2}dt\right) =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3} - 8t + \frac{16}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C\right) =$$

$$= 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - 2\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + 4\frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} - 8x^{\frac{1}{6}} + \frac{16}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{2}} + C\right)$$

2) $\int P(x,(ax+b)^{\frac{l}{m}},(ax+b)^{\frac{n}{p}},\ldots,(ax+b)^{\frac{r}{s}})dx$, используется подстановка

$ax+b = t^k$, $x = \dfrac{t^k - b}{a}$, $dx = \dfrac{k}{a}t^{k-1}dt$

где k общий знаменатель дробей $\dfrac{l}{m},\dfrac{n}{p}\ldots\dfrac{r}{s}$.

§7 Интегрирование тригонометрических функций.

1) *Универсальная тригонометрическая подстановка*: $t = tg\dfrac{x}{2}$,

применяется для всех интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Однако данная подстановка является довольно громоздкой, поэтому ее рекомендуется использовать только для интегралов вида:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

Выразим Sinx , Cosx и dx через *t*.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctgt$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Рассмотрим пример:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{(1+t^2)2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt = 2\int \frac{dt}{(1-t^2)} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + C$$

2) $\int R(\sin x)\cos^n xdx = \int R(\sin x)\cos^{n-1} x\cos xdx$,

n- целое нечетное число.

$t = \sin x, \quad dt = \cos xdx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$

Рассмотрим пример:

$$\int \sin^6 x\cos^3 xdx = \int \sin^6 x\cos^2 x\cos xdx = \int t^6(1-t^2)dt =$$

$$= \int t^6 dt - \int t^8 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C$$

3) $\int R(\cos x)\sin^n xdx = \int R\cos x\sin^{n-1} x\sin xdx$,

n- целое нечетное число.

$t = \cos x, \quad dt = -\sin xdx$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$

Рассмотрим пример:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\sin xdx = -\int \frac{1-t^2}{t^6}dt =$$

$$= -\int t^{-6}dt + \int t^{-4}dt = -\frac{t^{-5}}{-5} + \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{(\cos x)^{-5}}{5} - \frac{(\cos x)^{-3}}{3} + C$$

Примечание: в случае $\int \sin^m x\cos^n xdx$, когда m и n- целые нечетные числа, используем любой метод (за основу берем тот случай, где степень меньше).

4) $\int \sin^m x\cos^n xdx$, где m и n-натуральные четные числа.

Используются формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Рассмотрим пример:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \frac{(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)}{4} dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x dx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$

5)

$$\int R(tgx)dx \qquad\qquad \int R(ctgx)dx$$

$$t = tgx \qquad\qquad t = ctgx$$

$$x = arctgt \quad \text{или} \quad x = arcctgt$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad\qquad dx = -\frac{dt}{1+t^2}$$

Примечание: если интеграл имеет вид $\int R(tgx, ctgx)dx$,

то этот интеграл сводится к одному из вышепредставленных с помощью формулы $tgx = \dfrac{1}{ctgx}$

Рассмотрим пример:

$$\int tg^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \int t dt - \int \frac{t dt}{1+t^2} = \int t dt - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + C = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|tg^2 x + 1\right| + C$$

6) $\displaystyle\int \frac{R_1(\cos^m x)}{R_2(\sin^n x)} dx$ или $\displaystyle\int \frac{R_1(\sin^m x)}{R_2(\cos^n x)} dx$, где m и n – целые четные числа (включая случай, когда одно из них равняется нулю).

Подстановка:

$$t = tgx$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Рассмотрим пример:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{1}{2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)}{2+t^2} \frac{dt}{(1+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{tgx}{\sqrt{2}} + C$$

7) $\int \cos mx \cos nx dx$; $\int \sin mx \sin nx dx$; $\int \sin mx \cos nx dx$;

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

Рассмотрим пример:

$$\int \sin 8x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 11x dx = \frac{1}{2}\frac{\sin 5x}{5} - \frac{1}{2}\frac{\sin 11x}{11} + C$$