ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

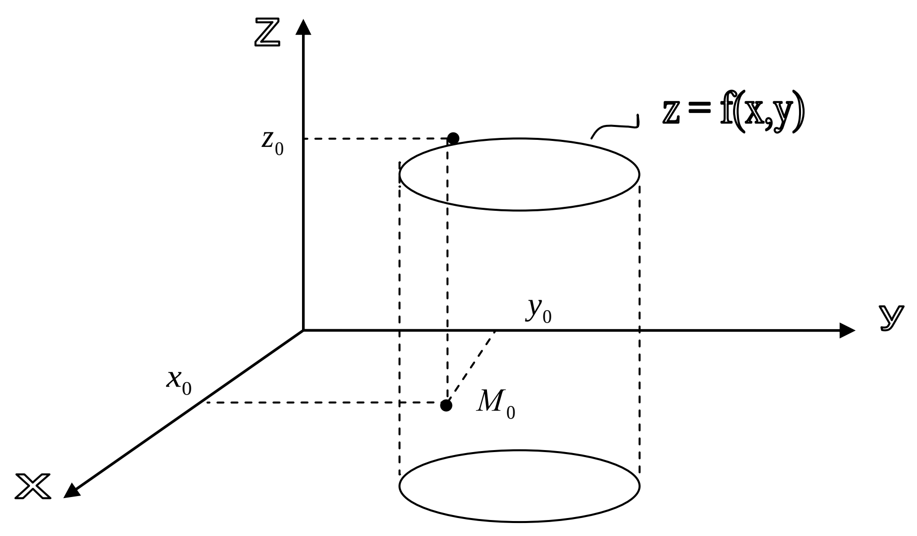
§ 1. Основные понятия.

Определение 1.

Если каждой паре независимых друг от друга переменных **x, y** из некоторого множества **D** ставится в соответствие переменная величина **z**, то **z** называется **функцией двух переменных**.

z = f (x,y) или **z = z(x,y)**

Графиком функции двух переменных в общем случае является **поверхность.**



Для функции двух переменных множество **D** представляет собой множество точек координатной плоскости **xOy**. В частном случае, это будет часть плоскости **xOy**.

Определение 2.

Если каждой совокупности независимых друг от друга переменных **x,y,z,…,t** из некоторого множества **D** ставится в соответствие определенное значение переменной величины **W**, то **W** называется **функцией n переменных.**

W = W(x, y, z, … t)

Функции трех и более переменных графического представления не имеют.

Определение 3.

Множество **D**, на котором задана функция **W**, называется **областью определения** этой функции, таким образом, **W(x,y,z)** – область определения представляет собой множество точек пространства.

Определение 4.
Область определения называется **замкнутой**, если она включает в себя все граничные точки, в противном случае она называется **незамкнутой**.

§ 2. Частные и полные приращения функции.

Пусть в некоторой области **D** задана функция **W = W(x,y,z)** и пусть в этой же области **D** задана фиксированная точка $\mathbf{M_0}$ **(α,β,γ),** принадлежащая области **D**.

Определение 1.
Величина $\Delta W = W(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y, \gamma + \Delta z) - W(\alpha, \beta, \gamma)$ называется **полным приращением функции ΔW в точке M_0.**

Определение 2.
Величины

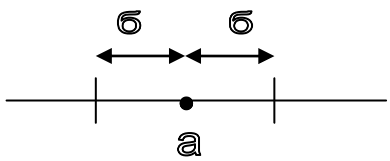
$\Delta W_x = W(\alpha + \Delta x, \beta, \gamma) - W(\alpha, \beta, \gamma)$

$\Delta W_y = W(\alpha, \beta + \Delta y, \gamma) - W(\alpha, \beta, \gamma)$

$\Delta W_z = W(\alpha, \beta, \gamma + \Delta z) - W(\alpha, \beta, \gamma)$

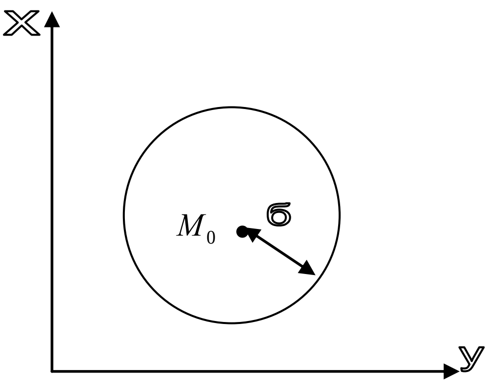
Называются частичными приращениями функции **W** в точке M_0.

§ 3. Непрерывность функции многих переменных.



(a + δ ; a – δ)

Для функции двух переменных **δ** окрестностью точки $\mathbf{M_0}$ будет являться круг с радиусом **δ** и с центром в точке $\mathbf{M_0}$**.**



Для функции трех переменных **δ** окрестностью точки M_0 будет являться шар с радиусом **δ** и с центром в точке M_0.

Определение 1.

Число **A** называется **пределом** функции **W = W (x,y,z)** при стремлении точки **M(x,y,z)** к точке $\mathbf{M_0}$, если задавшись как угодно малым положительным числом **ε** можно указать такую **δ** окрестность точки M_0, что для всех точек **M** из этой **δ** окрестности выполняется неравенство:

$$|W(x,y,z)-A|<\varepsilon \qquad (1)$$

Если число **A** является пределом функции **W**, то

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta\\ z\to\gamma}} W(x,y,z)=A \qquad (2)$$

Определение 2.

Функция **W(x,y,z)** называется **непрерывной** в некоторой области **D**, если в каждой точке $\mathbf{M_0(\alpha,\beta,\gamma)}$ из области **D** выполняются следующие два условия:

1) Функция определена **W(α,β,γ),** то есть известно значение **W(α,β,γ)** как конечное число.
2) Односторонние пределы равны между собой и равны значению функции в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\pm0\\ y\to\beta\pm0\\ z\to\gamma\pm0}} W(x,y,z)=W(\alpha,\beta,\gamma) \qquad (3)$$

Теорема.

Для того чтобы функция **W(x,y,z)** была непрерывной в замкнутой области **D** необходимо и достаточно, чтобы бесконечно малым приращениям аргументов соответствовало бесконечно малое приращение функции, то есть

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\pm0\\ y\to\beta\pm0\\ z\to\gamma\pm0}} \Delta W=0 \qquad (4)$$

Доказательство.

Пусть функция W непрерывна, тогда согласно определению 2 должно выполняться равенство (3), откуда на основании свойств пределов получим:

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta\\ z\to\gamma}} [W(x,y,z)-W(\alpha,\beta,\gamma)]=0$$

X = α + Δx

Y = β + Δy

X = γ + Δz

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0\\ \Delta z\to0}} [W(\alpha+\Delta x,\beta+\Delta y,\gamma+\Delta z)-W(\alpha,\beta,\gamma)]=0$$

На основании ***§2 определения 1*****:**

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \Delta W = 0$$

§4. Частные производные функции многих переменных.

Определение 1.

Частной производной функции W(x,y,z) по одной из переменных называется предел отношения частного приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится нулю.

$$W'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta W_x}{\Delta x};$$

$$W'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta W_y}{\Delta y};$$

$$W'_z = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W_z}{\Delta z};$$

$$W'_x = \frac{\partial W}{\partial x}; \qquad W'_y = \frac{\partial W}{\partial y}; \qquad W'_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

Учитывая ***определение 2 § 2***, сформулируем правило нахождения частной производной:

При нахождении частной производной по **x** две другие переменные **y** и **z** мысленно считаются константами и при этом действуют правила нахождения производной для функции одной переменной.

Аналогично для других частных производных (для нахождения частных производных по **y**, константами считаем **x** и **z**).

Пример:

$$z = x^2y^3 + Sin(xy)$$

$$z'_x = 2y^3x + yCos(xy)$$

$$z'_y = 3x^2y^2 + xCos(xy)$$

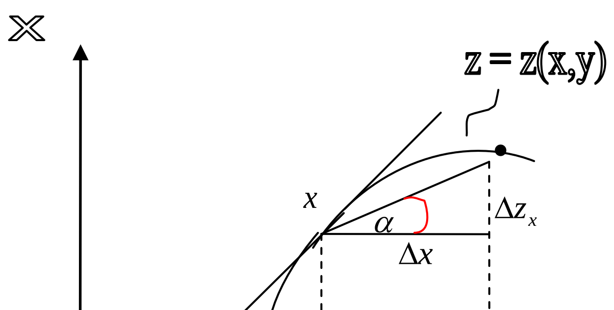
Геометрический смысл частных производных для функции двух переменных:

z = z (x,y)

Согласно ***определению 2 §2*** в том случае, если функция получает частное приращение Δ**Z**x, y при этом остается константой, то есть процесс такого приращения можно рассматривать в плоскости **y=const.**

Графиком функции трех переменных является **поверхность**.

Рассечем поверхность, являющуюся графиком этой функции, плоскостью **y = const**.



•

$$tg\alpha = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$$

$$tg\varphi_x = z'_x$$

Таким образом $\mathbf{Z'_x}$ (частная производная) равняется тангенсу угла наклона касательной, проведенной в плоскости **y = const**.

Аналогично можно показать, что $\mathbf{Z'_y}$ равняется тангенсу угла наклона касательной, проведенной в плоскости **x = const.**

§ 5. Частные дифференциалы и полный дифференциал функции многих переменных.

Определение 1.

Частным дифференциалом функции многих переменных называется величина, обозначаемая $\mathbf{d_xW}$ и равная произведению соответствующей частной производной на приращение соответствующей независимой переменной, то есть

$d_xW = W'_x\Delta x$

$d_yW = W'_y\,\Delta y$

$d_zW = W'_z\,\Delta z$

Аналогично функции одной переменной приращения аргументов равны их дифференциалам, то есть $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$; $\Delta z = dz$, поэтому частные дифференциалы запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} d_xW &= W'_x\,dx \\ d_yW &= W'_y\,dy \\ d_zW &= W'_z\,dz \end{aligned} \qquad (1)$$

Определение 2.

Полным дифференциалом функции многих переменных называется величина, равная сумме всех ее частных дифференциалов, то есть

$dW = d_xW + d_yW + d_zW$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz \qquad (2)$$

Определение 3.

Функция многих переменных называется непрерывно-дифференцируемой в некоторой области **D**, если в каждой точке этой области сама функция и все ее частные производные непрерывны.

§ 6. Производные и дифференциалы сложной функции многих переменных.

Пусть в некоторой области **D** даны непрерывно-дифференцируемые функции **Z = Z(u,v),** где **U = U (x,y)** и **V =V (x,y)** – промежуточные аргументы, а **x,y** - независимые переменные.

Для каждой из этих функций можно записать полный дифференциал по ***формуле (2) §5***:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \qquad (1)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1) и приводим подобные относительно **dx** и **dy**:

$$dz = (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy \qquad (3)$$

(3) называется полным дифференциалом сложной функции двух переменных.

Если **U (x,y)** и **V (x,y)** подставить в функцию **Z**, то станет очевидно, что **Z** в конечном счете является функцией **x** и **y**, и тогда полный дифференциал такой функции можно записать согласно ***формуле (2) §5***:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (4)$$

Сравнивая (4) и (3) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (5)$$

(5) являются частными производными сложной функции двух переменных.

Пример:

$$z = u^3 + v^2$$

$$u = e^{3x} Siny$$

$$v = \ln xtgy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 3e^{3x} Siny + 2v\frac{1}{x}tgy = 3(e^{3x} Siny)^2 3e^{3x} Siny + 2(\ln xtgy)\frac{1}{x}tgy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 e^{3x} Cosy + 2vLnx\frac{1}{Cos^2 y} = 2(e^{3x} Siny)^2 e^{3x} Cosy + 2(Lnxtgy)Lnx\frac{1}{Cos^2 y}$$

§ 7. Полная производная. Производная неявной функции.

Пусть даны непрерывно-дифференцируемые функции **Z = Z(x,u,v),** где **U = U (x)** и **V =V (x).** Очевидно, что данный случай является ***частным случаем §6***, но с учетом того, что, во-первых, промежуточные аргументы **U** и **V** зависят только от одной переменной **x** и, во-вторых, **x** является как бы одновременно и промежуточным аргументом и независимой переменной. Согласно формуле (5) и с учетом того, что **Z** является в конечном счете функцией одной переменной х получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

(1) – полная производная.

Пример:

$$z=x^3+Lnu+Sinv$$

$$u=arctgx$$

$$v=e^x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+\frac{1}{u}\frac{1}{1+x^2}+Cosv\cdot e^x$$

Пусть функция **у** задана в неявном виде **f (x,y) = 0** (2)

Данная ситуация является частным случаем полной производной, где у может рассматриваться как промежуточный аргумент **y = y (x).**

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Найдем полную производную от обеих частей равенства (2). Согласно ***формуле (1) данного §:***

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y} \qquad (3)$$

(3) – формула для нахождения производной неявно заданной функции.

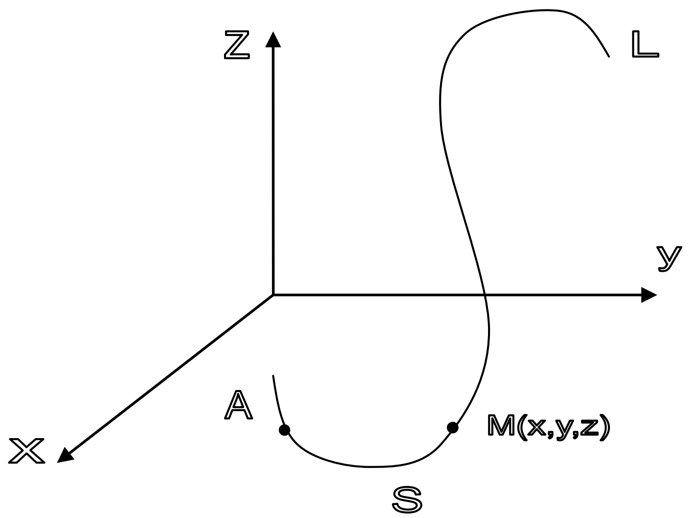
Пример:

$$tg^2xy+\sqrt{x^2+y^2}=5$$

$$f'_x=2tgxy\frac{y}{Cos^2xy}+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y=-\frac{\dfrac{2tgxy\cdot y}{Cos^2xy}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{2tgxy\cdot x}{Cos^{2xy}}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

§ 8. Производная по направлению. Градиент.

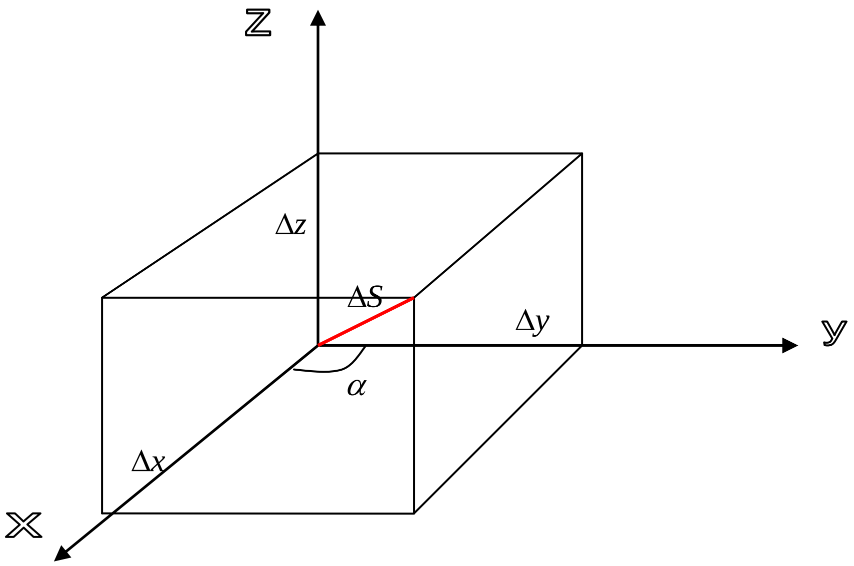


Пусть в декартовой системе координат задана пространственная кривая **L**.

S – длина дуги кривой от точки **A** до точки **M**.
A – фиксированная точка кривой.
M – текущая точка кривой.
Положение точки **M** на кривой однозначно определяется длиной дуги **S**, поэтому координаты этой точки можно считать функциями **S**, то есть
x = x(S), y = y(S), z = z(S).
Пусть во всех точках кривой **L** задана функция **W = W (x,y,z).**
В данном случае можем записать полную производную. Согласно *§ 7*:

$$\frac{\partial W}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial S} \qquad (1)$$

(1) называется производной по длине дуги.



Δx, Δy, Δz – проекции **ΔS** на координатные оси.
Перейдем в этих равенствах к пределу при **ΔS → 0**.

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta S} = \frac{dx}{dS}$$

$$Cos\alpha = \frac{dx}{dS}$$

$$Cos\beta = \frac{dy}{dS} \qquad (*)$$

$$Cos\gamma = \frac{dz}{dS}$$

Где **Cos α, Cosβ, Cosγ** – **направляющие косинусы** касательной к данной кривой в данной точке.
Подставим (*) в (1):

$$\frac{dW}{dS} = \frac{\partial W}{\partial x} Cos\alpha + \frac{\partial W}{\partial y} Cos\beta + \frac{\partial W}{\partial z} Cos\gamma \qquad (2)$$

(2) называются **производной функции W по направлению**.
Направление задается **направляющими косинусами.**
Смысл: эта производная показывает скорость изменения функции в данном направлении.

Градиент.

Пусть в некоторой трехмерной области **D** задана скалярная функция
W = W (x,y,z).

<u>Определение 1.</u>

Градиентом функции **W = W(x,y,z)** называется **вектор**, обозначаемый **grad W** и имеющий координаты, равные соответствующим частным производным, то есть:

$$gradW = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k}$$

$$gradW = \{\frac{\partial W}{\partial x}; \frac{\partial W}{\partial y}; \frac{\partial W}{\partial z}\}$$

Пусть дан единичный вектор $\left|\vec{\varsigma}\right| = 1$, при этом координаты единичного вектора

$$\vec{\varsigma} = \{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\}$$

<u>Теорема</u>.

Производная функции по направлению, заданному единичным вектором, равна проекции градиента этой функции на данное направление, то есть производная функции по направлению равна:

$$\frac{dW}{dS} = \left|gradW\right| \cdot Cos\varphi \qquad (3)$$

$$\varphi = (gradW \wedge \vec{\varsigma})$$

<u>Доказательство:</u>

По определению скалярного произведения

$$gradW \cdot \vec{\varsigma} = \left|gradW\right| \left|\vec{\varsigma}\right| \cdot Cos\varphi = \left|gradW\right| \cdot Cos\varphi$$

С другой стороны скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат

$$gradW \cdot \vec{\varsigma} = \frac{\partial W}{\partial x} Cos\alpha + \frac{\partial W}{\partial y} Cos\beta + \frac{\partial W}{\partial z} Cos\gamma = \frac{dW}{dS}$$

Приравнивая правые части между собой в этих двух равенствах получим (3).

<u>Следствие 1.</u>

При $\varphi = 0$ производная по направлению имеет свое максимальное значение в данной точке, равное | grad W | , то есть $\frac{dW}{dS} = \left|gradW\right|$

Таким образом, **Grad W** показывает направление, в котором функция изменяется с наибольшей скоростью в данной точке, а сам модуль градиента $\left|gradW\right| = \sqrt{(W'_x)^2 + (W'_y)^2 + (W'_z)^2}$ показывает величину этой наибольшей скорости.

<u>Следствие 2.</u>

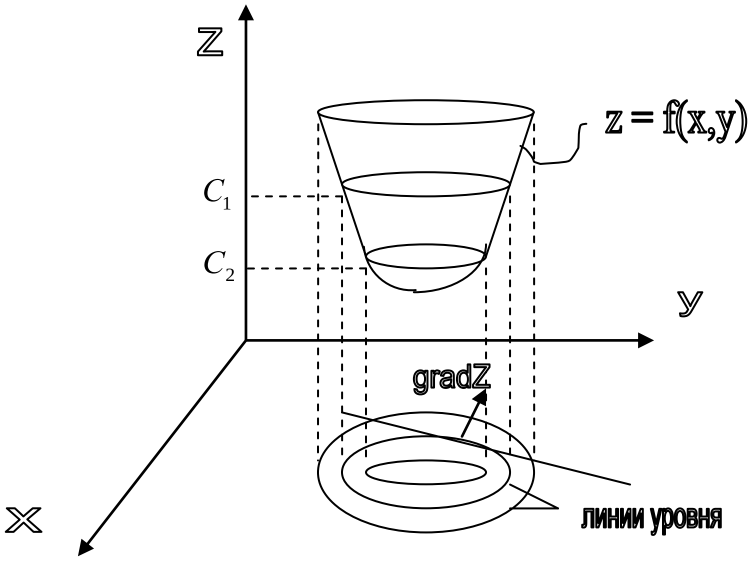
При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ производная по направлению $\frac{dW}{dS} = 0$, то есть в направлении, ортогональном направлению градиента в данной точке, функция не меняется.

<u>§ 9.</u> Линии и поверхности уровня.

Пусть в некоторой области **D** (часть координатной плоскости **xOy**) задана функция **z = f (x,y).**

<u>Определение 1.</u>

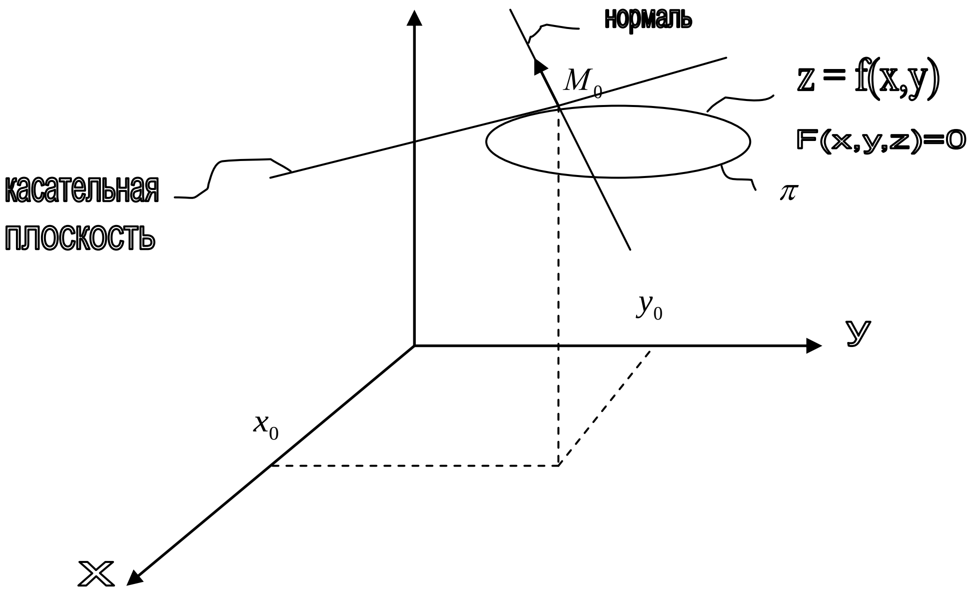
Линиями уровня функции **z = f (x,y)** называются линии в области **D** на плоскости **xOy** при движении вдоль каждой из которых функция **z** не меняется. Очевидно, что уравнением линии уровня будет являться **f (x,y) = C**.
Придавая константе **C** различные значения будем получать разные линии уровня.



<u>Определение 2.</u>

Поверхностями уровня функции **W = W(x,y,z)** в области **D** называются поверхности, при движении вдоль каждой из которых, функция **W** не меняется. Из этого определения очевидно вытекает, что уравнением поверхности уровня является **W(x,y,z) = C**.
Придавая **C** различные значения будем получать разные уравнения разных поверхностей уровня.
Из ***следствия 2*** вытекает, что в каждой точке области **D** градиент **Grad W** перпендикулярен поверхности уровня, проходящий через данную точку.

<u>**§ 10.**</u> Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



Задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$

I. Функция **Z** задана в неявном виде, то есть **F (x,y,z) = 0**. Предположим, что данная поверхность π является поверхностью уровня некоторой функции **W = W(x,y,z).** А из ***§ 9*** известно, что уравнение поверхности уровня записывается **W(x,y,z) = C**.

Так как поверхность **π** и поверхность уровня в данном случае совпадают, то **F(x,y,z) = W(x,y,z) – C**.

Отсюда очевидно, что все частные производные у них совпадают.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad \text{(a)}$$

Из ***§ 9*** известно, что **grad W** перпендикулярен поверхности уровня, то есть перпендикулярен поверхности **π**, отсюда следует:

$$gradW = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k}$$

На основании равенств (а) очевидно, что вектор $\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$ также перпендикулярен поверхности.

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)} \qquad (1)$$

$F'_x(M_o)$ – частная производная в точке M_o

Уравнение касательной плоскости:

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0 \qquad (2)$$

II. z = f(x,y)

F(x,y) – z = 0

F(x,y) = f(x,y) – z

$F'_x = f'_x$; $F'_y = f'_y$; $F'_z = -1$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \qquad (3)$$

Уравнение касательной плоскости:

$$(x - x_0) f'_x(M_0) + (y - y_0) f'_y(M_0) - (z - z_0) = 0 \qquad (4)$$

Отсюда выразим **приращение аппликаты касательной плоскости**:

$$\Delta Z к.пл. = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y \qquad (*)$$

Полный дифференциал функции двух переменных для точки **Мо**:

$$dZ = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y \qquad (**)$$

Из сравнения (*) и (**) вытекает доказательство теоремы:

Теорема (Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных).
Полный дифференциал функции равен приращению аппликаты касательной плоскости, проведенной к поверхности, являющейся графиком данной функции.

§ 11. Производные и дифференциалы высших порядков.

Определение 1.
Частные производные от частных производных первого порядка называются **частными производными второго порядка**.

Например, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$

или

$$W''_{xx}, W''_{yy}, W''_{zz}, W''_{xy}, W''_{xz}, W''_{zy}$$

Производные, взятые по одной и той же переменной, называются **одноименными**, а производные, взятые по разным переменным, называются **смешанными**.

Пример:

$z = x^3 y^2 + 2x + 3xy + 5$

$z'_x = y^2 3x^2 + 2 + 3y$

$z''_x = 6y^2 x;$

$z'_y = 2x^3 y + 3x$

$z''_y = 2x^3$

$$\left.\begin{matrix} z''_{xy} = 6x^2 y + 3 \\ z''_{yx} = 6x^2 y + 3 \end{matrix}\right. \longrightarrow z''_{xy} = z''_{yx}$$

Теорема 1 (О независимости смешанной производной от порядка дифференцирования).
Если функция **z = f (x,y),** а также ее частные производные z''_{xy}, z''_{yx}, z'_z, z'_y определены и непрерывны в некоторой замкнутой области **D**, то во всех внутренних точках этой области смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования, то есть $z''_{xy} = z''_{yx}$

Определение 2.
Полный дифференциал от полного дифференциала функции называется **полным дифференциалом второго порядка**.
$d^2z = d(dz)$

Теорема 2 (О полном дифференциале второго порядка).

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y^2 \qquad (1)$$

Доказательство:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Согласно ***определению 2***: $d^2z = d(dz)$

$$d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial(dz)}{\partial y}\Delta y \qquad (*)$$

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta y$$

$$\frac{\partial(dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x$$

Подставим два последних уравнения в $(*)$, получим (1).

§ 12. Экстремум функции двух переменных.

Определение 1.
Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой максимума** для функции **z = f (x,y),** если для всех точек **M (x,y)** из некоторой окрестности этой точки, достаточно близких к $M_0(x_0, y_0)$, но отличных от нее, выполняется условие:

$f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума** для функции **z = f (x,y),** если для всех точек **M (x,y)** из некоторой окрестности этой точки, достаточно близких к $M_0(x_0, y_0)$, но отличных от нее, выполняется условие:

$f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.

Определение 2.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **стационарной**, если в этой точке равны нулю обе частные производные первого порядка.

Таким образом, очевидно, что **координаты стационарных точек** определяются из решения системы (1):

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array}\right\}$$

Теорема 1 (О касательной плоскости в стационарной точке).

В стационарной точке касательная плоскость к графику функции проходит параллельно координатной плоскости **xOy** (горизонтально).

Доказательство:

§ 10 II: $(x-x_0)f'_x(M_0)+(y-y_0)f'_y(M_0)-(z-z_0)=0$

Согласно ***определению 2***:

В стационарной точке $\begin{array}{l} f'_x(M_0)=0 \\ f'_y(M_0)=0 \end{array}$, то есть $z=z_0$, которое и является **уравнением горизонтальной плоскости**.

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума).

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция **z = f (x,y)** имеет экстремум, то обе частные производные в этой точке равны нулю, то есть $\begin{array}{l} f'_x(M_0)=0 \\ f'_y(M_0)=0 \end{array}$

Доказательство:

Зафиксируем y в точке y_0: $z=f(x,y_0)$, тогда функция **z** является функцией одной переменной. И если известно, что при $x=x_0$ эта функция имеет экстремум, то согласно необходимому признаку экстремума для функции одной переменной получаем: $f'_x(x_0,y_0)=0$

Аналогично доказывается и условие $f'_y(x_0,y_0)=0$

Примечание:

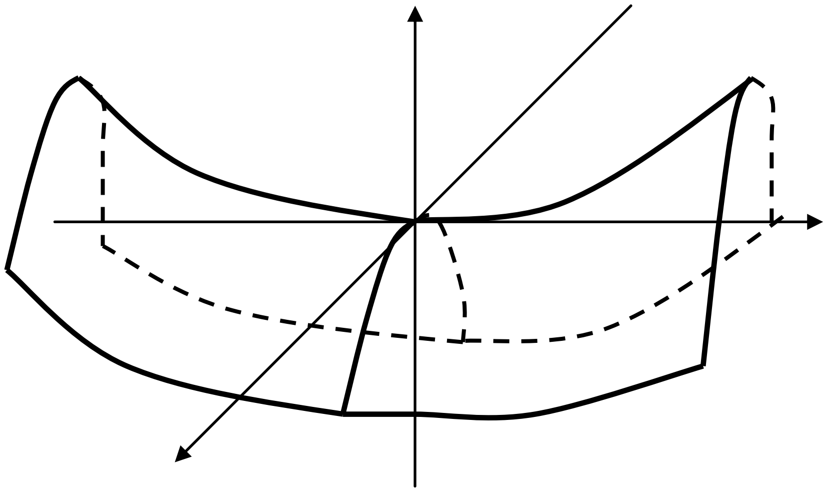
Из ***определения 2 и теоремы 2*** вытекает, что всякая точка экстремума является стационарной точкой. Однако обратное утверждение неверно: не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пример: $z=y^2-x^2$

$M_0(0,0)$

$z'_x(M_0)=0$

$z'_y(M_0)=0$



<u>Теорема 3</u> (Достаточное условие экстремума).
Функция **z = f (x,y)** имеет в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, если в этой точке выполняется условие:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

При этом, если $z''_{xx} > 0$ - **max**
$z''_{xx} < 0$ - **min**
Если $\Delta < 0$ - **экстремума нет**
Если $\Delta = 0$ - ? нужны дальнейшие исследования

Пример: $z = y^2 - x^2$
$M_0(0,0)$ - стационарная точка
$z'_x = -2x$
$z'_y = 2y$
$z''_{xx} = -2$
$z''_{xx} = 2$
$z''_{xy} = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$ Экстремума нет

Пример: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$; $z'_y = 6xy - 12$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$xy = 5$; $x = \dfrac{2}{y}$

$$\frac{4}{y^2}+y^2-5=0$$

$$y^4-5y^2+4=0$$

$$t=y^2;t^2=y^4$$

$$t^2-5t^2+4=0$$

$$t_1=4 \qquad t_2=1$$

$$y^2=4 \qquad y^2=1$$

$$y_{1,2}=\pm 2 \qquad y_{1,2}=\pm 1$$

$M_1(2;1)$; $M_2(-2;-1)$; $M_3(1;2)$; $M_4(-1;-2)$

$z''_{xx}=6x$; $z''_{yy}=6x$; $z''_{yx}=6y$

1). $M_1(2;1)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{vmatrix}=144-36>0$$

$$z''_{xx}=12>0$$

Точка минимума

$$z_{\min}=-28$$

2). $M_2(-2;-1)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-12 & -6\\ -6 & -12\end{vmatrix}=144-36>0$$

$$z''_{xx}=-12>0$$

Точка максимума

$$z_{\min}=-28$$

3). $M_3(1;2)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{vmatrix}=36-144<0$$

Экстремума нет

4). $M_4(-1;-2)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-6 & -12\\ -12 & -6\end{vmatrix}=36-144<0$$

Экстремума нет