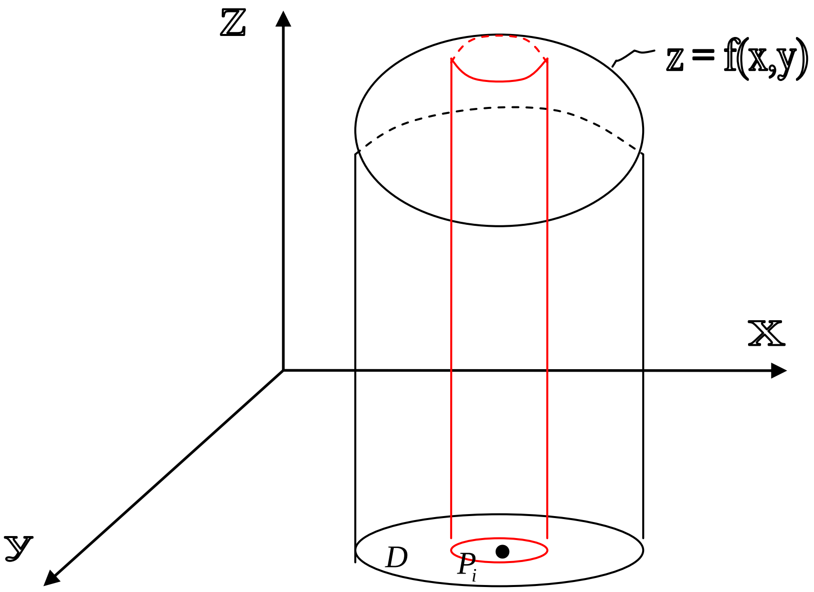
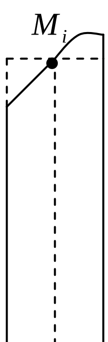
ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Задача, приводящая к двойному интегралу.

Найти **V** цилиндрического тела, основанием которого является часть координатной плоскости **xOy**, которую будем называть областью **D**. Сверху тело ограниченно поверхностью, которая является графиком функции **z=f(x,y).**



Разобьем область **D** на **n** элементарных площадок. Через границы этих площадок проведем цилиндрическое тело. Внутри каждой площадки возьмем точку $P_i(x_i;y_i)$, таким образом, данное цилиндрическое тело разбито на n элементарных цилиндрических тел. Площадь каждой элементарной площадки равна ΔS_i.



Заменим каждое элементарное цилиндрическое тело прямым цилиндром с высотой равной $P_iM_i = f(x_i; y_i)$

Объем такого цилиндра равен $V_i = f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$

Просуммировав все эти объемы, получим $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$ (1)

(1) – представляет собой интегральную сумму для функции **f(x,y)** по области **D**. Она приближенно выражает искомый объем всего цилиндрического тела. И тем точнее, чем больше n и чем меньше ΔS_i, переходя к пределу при $n \to \infty$ и $\Delta S_i \to 0$ получим точное значение объема.

<u>Определение 1.</u>

Двойным интегралом от функции **f(x,y)** по области **D** называется предел интегральной суммы (1), когда $n \to \infty$ и $\Delta S_i \to 0$.

$$\iint_D f(x,y)ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i \to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x,y)\Delta S_i \qquad (2)$$

Таким образом, объем цилиндрического тела равен двойном интегралу, в этом и заключается геометрический смысл двойного интеграла

$$V = \iint_D f(x,y)ds \qquad (3)$$

<u>Примечание.</u>

Двойной интеграл представляет из себя число, зависящее только от размеров области D и от вида подынтегральной функции **f(x,y).**

<u>Теорема</u> (Существования двойного интеграла).

Если функция **z=f(x,y)** непрерывна, в замкнутой ограниченной области **D**, то двойной интеграл от этой функции по заданной области существует.

<u>**§ 2.**</u> Свойства двойного интеграла.

1). Двойной интеграл от суммы функций по области **D** равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций по области **D**, то есть

$$\iint_D (f(x,y) + \varphi(x,y))ds = \iint_D f(x,y)ds + \iint_D \varphi(x,y)ds$$

<u>Доказательство</u>

$$\iint_D (f(x,y) + \varphi(x,y))ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i;y_i) + \varphi(x_i;y_i))dS_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i +$$

$$+ \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i;y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)ds + \iint_D \varphi(x,y)ds$$

2). Константу можно выносить за знак двойного интеграла, то есть

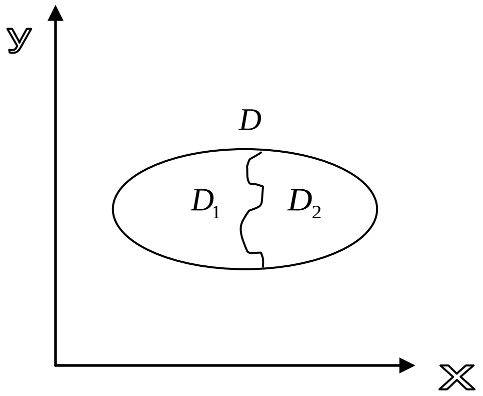
$$\iint\limits_D a\cdot f(x,y)ds = a\iint\limits_D f(x,y)ds$$

Доказательство

$$\iint\limits_D a\cdot f(x,y)ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} a\cdot f(x_i;y_i)\Delta S_i = a\cdot\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i = a\iint\limits_D f(x,y)ds$$

3). Если область **D** разбить на две области D_1 и D_2, то двойной интеграл по области D можно разбить на сумму двойных интегралов по области D_1 и D_2 соответственно.

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds$$



4). Если во всех точках области **D** функции $f(x,y)$ *и* $\varphi(x,y)$ удовлетворяют условию $f(x,y)\ge\varphi(x,y)$, то двойные интегралы от этих функций удовлетворяют следующему неравенству:

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)ds \ge \iint\limits_{D_2}\varphi(x,y)ds$$

Доказательство

Непосредственно вытекает из геометрического смысла двойного интеграла.

5). Значение двойного интеграла на области D лежит в следующем интервале

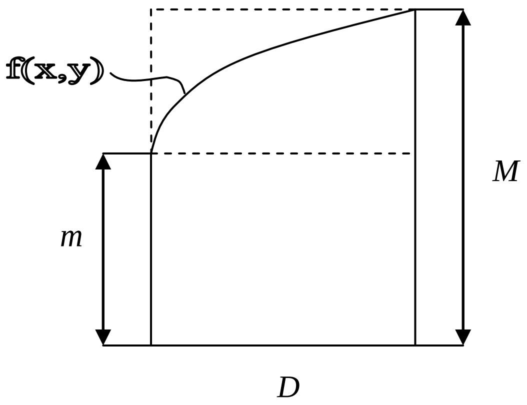
$$m\cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le MS \qquad (5)$$

где **m, M** – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции **f(x,y)** в области **D**;

S – площадь области **D**.

Доказательство

Сравнивая объемы двух цилиндров и цилиндрического тела, получаем двойное неравенство (5). Ч.т.д.



6). Теорема о среднем.

Двойной интеграл по области **D** равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке $P(\alpha,\beta)$ из области **D** на площадь области **D**, то есть

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = f(\alpha,\beta)\cdot S \qquad (6)$$

Доказательство

Введем обозначение $I=\iint\limits_D f(x,y)ds$, тогда поделив неравенство (5) на **S**, получим $m \le \frac{I}{S} \le M$;

То есть значение $\frac{I}{S}$ лежит между наименьшим и наибольшим значениями функции f(x,y) в области D. В силу своей непрерывности функция **f(x,y)** «пробегает» все свои значения в области **D** между **m** и **M** в том числе в некоторой точке $P(\alpha,\beta)$ она примет значение, равное значению $\frac{I}{S}$, то есть

$$f(\alpha,\beta)=\frac{I}{S};$$

$$I = f(\alpha,\beta)\cdot S$$

Подставим вместо **I** двойной интеграл. Отсюда $\iint\limits_D f(x,y)ds = f(\alpha,\beta)\cdot S$ получаем равенство (6). Ч.т.д.

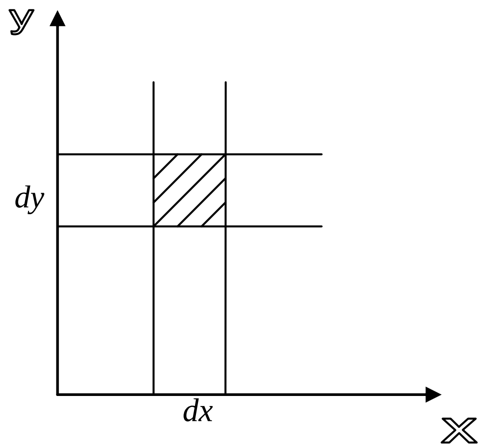
Следствие

Значение функции $f(\alpha,\beta)=\frac{\iint\limits_D f(x,y)ds}{S}$ называется средним значением функции в области **D**.

§ 3. Вычисление двойного интеграла.

Примечание

Элементарные площадки при разбиении области **D** могут быть получены с помощью двух систем координатных линий, проведенных параллельно осям координат.



Очевидно, что в этом случае элементарная площадка представляет собой прямоугольник, поэтому элемент площадки **ds** может быть выражен следующим образом:

$ds = dx \cdot dy$

В дальнейшем двойной интеграл принимает вид:

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Определение

Интеграл вида $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ называется двукратным интегралом от функции **f(x,y)** по области **D**.

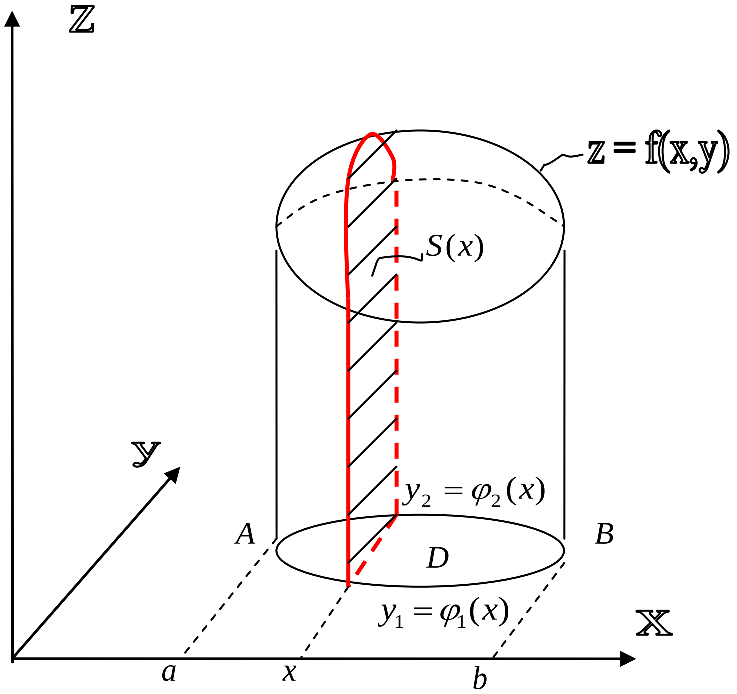
Теорема

Двойной интеграл от функции **f(x,y)** по области **D** равен двукратному интегралу от этой функции по данной области **D**, то есть

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (1)$$

Доказательство

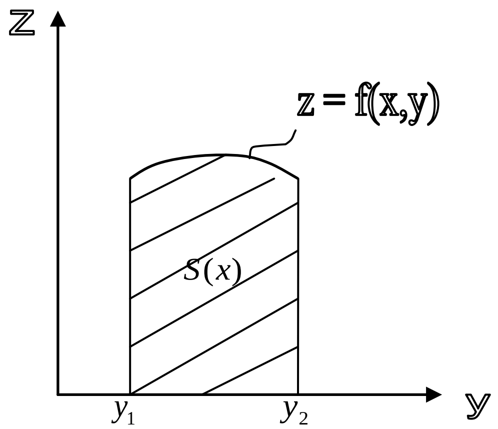
Область **D** проецируется на ось x в виде отрезка [a,b]. Граница области **D** разбивается точками **A** и **B** на две дуги: нижняя $y_1 = \varphi_1(x)$ и верхняя $y_2 = \varphi_2(x)$



Тело рассечено поперечной плоскостью, перпендикулярной оси x. Площадь поперечного сечения равна **S(x).**

Из геометрических соображений определенного интеграла (II семестр) известно, как вычисляется объем тела по площадям поперечных сечений.

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (*)$$



На основании геометрического смысла определенного интеграла получим площадь:

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (**)$$

Подставим (**) в (*) и учитывая геометрический смысл двойного интеграла получим (1). Ч.т.д.

Следствие 1

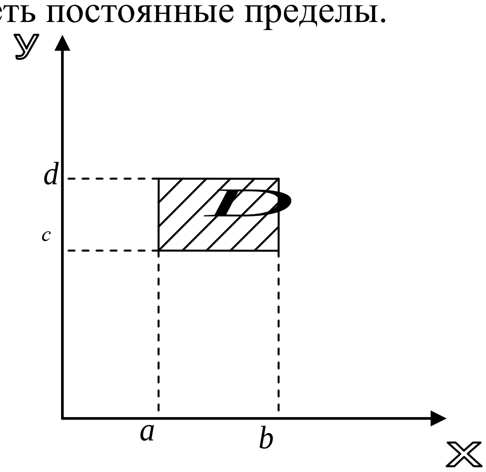
На практике скобки в двукратном интеграле не пишут

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Во внутреннем интеграле одна из переменных при интегрировании считается постоянной (в данном случае x = const)

Следствие 2

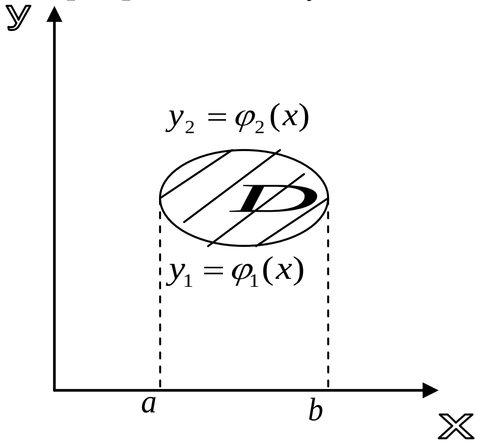
В общем случае внутренний интеграл имеет переменные пределы, но в простейшем случае, когда область **D** представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, внутренний интеграл будет иметь постоянные пределы.



$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Следствие 3. Замена порядка интегрирования

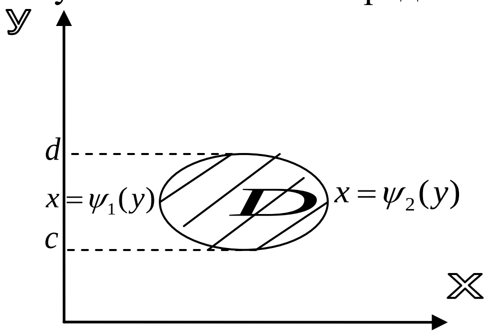
В рассмотренном выше случае область **D** проецировалась на ось x в виде отрезка [a,b]. В этом случае двойной интеграл принимал значение:



$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(\text{ч})}^{\varphi_2(\text{ч})} f(x,y)dy$$

y изменяется от нижней кривой до верхней.

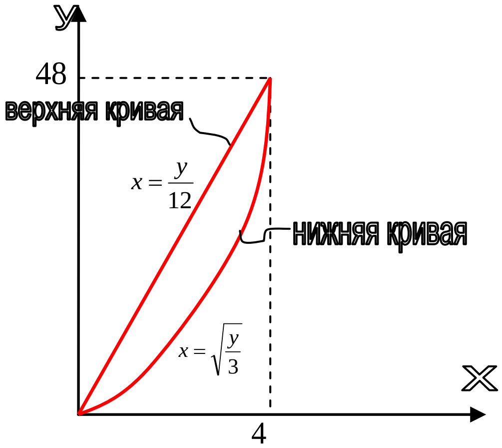
Однако область **D** может быть спроецирована и на ось **y** на отрезке [c,d]. В этом случае поменяется порядок интегрирования.



$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(\text{ч})}^{\psi_2(\text{ч})} f(x,y)dx$$

X меняется от левой кривой до правой.

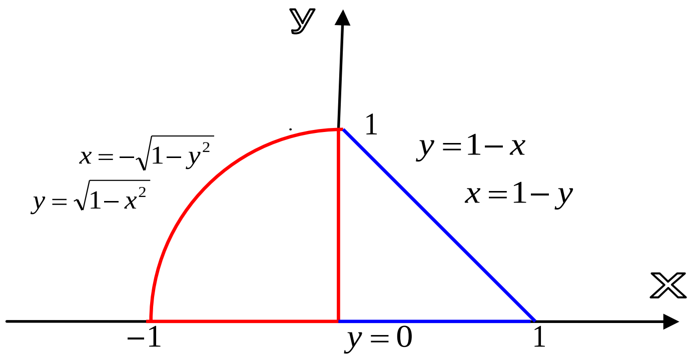
Пример 1:



$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy = \int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx$$

Пример 2:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dx$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1-y^2}$$

§ 4. Задача, приводящая к тройному интегралу.

Необходимо найти массу неоднородного тела, занимающего в пространстве область V.
Неоднородное тело – это тело, плотность которого является функцией координат точек этого тела, т.е. $\rho = f(x, y, z)$. От точки к точке плотность тела все время меняется.
Разобьем тело на n элементарных областей с объемами $\Delta v_1; \Delta v_2; ...; \Delta v_n$. Их размеры достаточно малы и поэтому плотность в пределах каждого элементарного объема не успевает сильно уменьшиться, поэтому в каждом элементарном объеме возьмем точку $P_i(x_i; y_i; z_i)$ и будем считать, что внутри каждого объема плотность постоянна и равна значению плотности в точке P_i, то есть равна значению $\rho_i = f(x_i; y_i; z_i)$. Тогда приближенная масса каждого элементарного объема равна $M_i = f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta v_i$. Просуммировав все эти массы получим:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta v_i \qquad (1)$$

(1) представляет собой интегральную сумму, которая приближенно выражает массу всего тела и тем точнее, чем больше n и чем меньше каждое из Δv_i.

Определение 1.
Тройным интегралом от функции f(x,y,z) по области V называется предел интегральной суммы (1), когда $n \to \infty; \Delta v_i \to 0$, т.е.

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta v_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta v_i \qquad (2)$$

Таким образом, масса неоднородного тела вычисляется с помощью тройного интеграла.

Теорема. (Существования тройного интеграла)
Если функция f(x,y,z) непрерывна в замкнутой области V, то тройной интеграл от этой функции по данной области существует.

§ 5. Свойства тройного интеграла.

1). Тройной интеграл от суммы функции по области V равен сумме тройных интегралов от слагаемых функций по области V, т.е.

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)]dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv + \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dv$$

Доказательство:

Смотреть аналогичные свойства двойного интеграла.

2). Константу можно выносить за знак тройного интеграла, т.е.

$$\iiint\limits_V a\cdot f(x,y,z)dv = a\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$$

Доказательство:

Смотреть аналогичные свойства двойного интеграла.

3). Если область V разбить на две области V_1 и V_2 плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, то тройной интеграл можно представить в виде суммы тройных интегралов по области V_1 и V_2 соответственно.

4). Оценка тройного интеграла.

Значение двойного интеграла на области D лежит в следующем интервале

$$m\cdot V \le \iiint\limits_v f(x,y,z)dv \le MS$$

где **m, M** – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции **f(x,y)** в данной области;

V – объем данной области .

<u>Доказательство</u>

Учитывая, что тройной интеграл показывает массу неоднородного тела, то данное неравенство становится очевидным.

5). Теорема о среднем.

Тройной интеграл от непрерывной функции по области V равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке $P(\alpha,\beta,\gamma)$ из данной области на объем этой области, то есть

$$\iiint\limits_v f(x,y,z)dv = f(\alpha,\beta,\gamma)\cdot V$$

Доказательство
Проводится на основании предыдущего неравенства (свойство 4) аналогично двойному интегралу.

Следствие

Значение функции $f(\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{\iiint\limits_{v} f(x,y.z)dv}{V}$ называется средним значением функции в данной области.

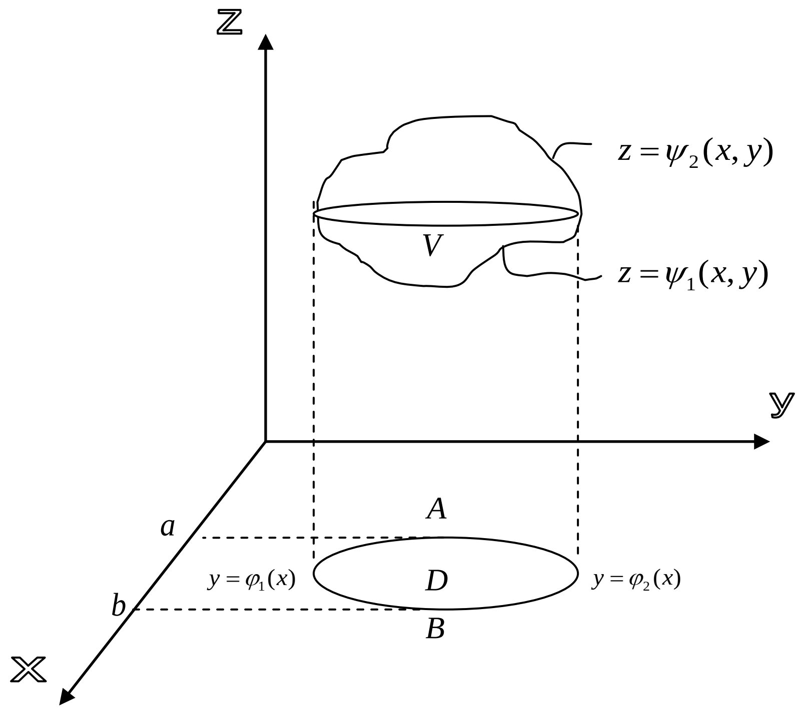
§ 6. Вычисление тройного интеграла.

Если тело разбивать на элементарные объемы с помощью плоскостей, параллельных координатным плоскостям, то каждый элементарный объем будет представлять собой прямоугольный параллелепипед, следовательно, элемент объема dv в тройном интеграле можно записать:
$$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dxdydz$$

Теорема
Тройной интеграл от непрерывной функции по области V равен трехкратному интегралу от этой функции по данной области, т.е.

$$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

$z=\psi_2(x,y)$- уравнение поверхности, которое ограничивает данное тело сверху.
$z=\psi_1(x,y)$- уравнение поверхности, которое ограничивает данное тело снизу.
Тело проецируется на координатную плоскость xOy в виде области D, которая в свою очередь проецируется на ось ох в виде отрезка [a,b].
Точки А,В делят границу области D на две кривые $y=\varphi_2(x)$ и $y=\varphi_1(x)$.



<u>Примечание</u>

В общем случае пределы во внутренних интегралах являются переменными, однако в простейшем случае, когда тело представляет собой прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, все пределы в тройном интеграле будут константами.

$$\int_a^b dx\int_c^d dy\int_g^h f(x,y,z)dz$$