§1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Опр.1
Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее первую производную y'.

В самом общем виде уравнение выглядит следующим образом:
$F(x, y, y') = 0$

Если мы разделим его относительно производной, то получим уравнение:
$y' = f(x, y)$ (1)

Теорема Коши
Если уравнение 1, функция $f(x, y)$, а также ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на некоторой области D, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то уравнение 1 имеет единственное решение, удовлетворяющее условию при $x = x_0, y = y_0$. (2)

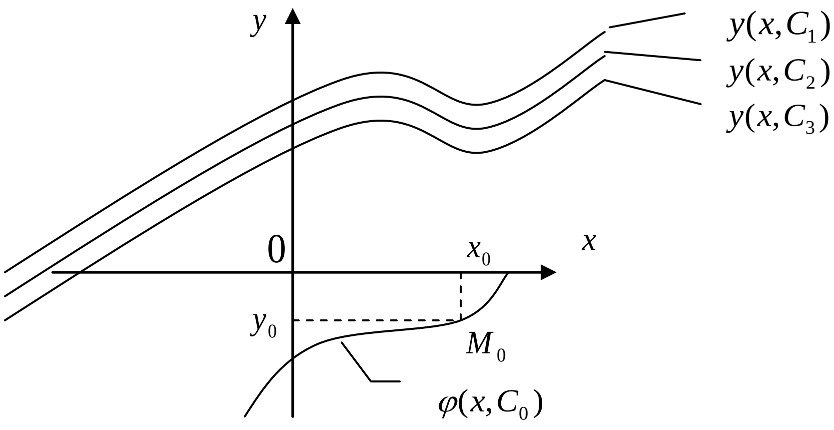
Опр.2
Условие 2 называется начальным условием уравнения 1.

Опр.3
Общим решением уравнения 1 называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая произвольную постоянную C и удовлетворяющая следующим двум условиям:
1) она является решением уравнения 1 при любом значении C (т.е. при подстановке этой функции в уравнение 1, это уравнение обращается в тождество);
2) при любом начальном условии 2 можно подобрать такое значение произвольной постоянной C_0, что это условие 2 будет удовлетворяться (т.е. $\varphi(x_0, C_0) = y_0$).

Опр.4
Частным решением уравнения 1 называется любая функция, полученная из общего решения, путем придания произвольной постоянной какого-либо конкретного значения.

Опр.5
График частного решения называется интегральной кривой.

Таким образом, общее решение уравнения 1 представляет собой семейство интегральных кривых.



С геометрической точки зрения, использование начальных условий означает, что мы должны подобрать такое значение C_0, чтобы интегральная кривая прошла через точку M_0.

Вот такая задача называется задачей Коши.

§2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Эти уравнения имеют следующий вид:

$$X_1(x)Y_1(y)dy + X_2(x)Y_2(y)dx = 0 \quad (1)$$

Операция преобразования уравнения 1 к виду, когда слагаемые с dy содержат в себе только y, а слагаемые с dx только x, называется разделением переменных.

Разделив все слагаемые уравнения 1 на X_1 и Y_2, получим:

$$\frac{Y_1(y)}{Y_2(y)}dy + \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = 0 \quad (2)$$

Уравнение 2 называется уравнением с разделенными переменными, которое можно теперь интегрировать.

$$\int \frac{Y_1(y)}{Y_2(y)}dy + \int \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx$$

Если обозначим через $F_1(y)$ и $F_2(x)$ первообразные от 1-ого и 2-ого интегралов соответственно, то общее решение уравнения 1 будет иметь следующий вид:

$$F_1(y) + F_2(x) = C \quad (3)$$

<u>Пример:</u>

$$(1+e^x)\cos y dy + e^x \sin^2 y dx = 0$$

$$\frac{\cos y}{\sin^2 y}dy + \frac{e^x}{1+e^x}dx = 0$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin^2 y}dy + \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = 0$$

$$\int \frac{d\sin y}{\sin^2 y} + \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x} = 0$$

$$-\frac{1}{\sin y} + \ln(e^x+1) = C$$

§3. Уравнения с однородными коэффициентами при дифференциалах (однородные уравнения).

Опр.1

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-ого порядка, если при подстановке вместо x и y в это уравнение λx и λy соответственно, получается та же самая функция $f(x,y)$, умноженная на λ:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Например, $x^2 + y^2$ является однородной функцией 2-ого порядка, т.к. $(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2+y^2)$.

Мы рассматриваем уравнение следующего типа:

$$f_1(x,y)dy + f_2(x,y)dx = 0, \quad (1)$$

где функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ являются однородными функциями одинакового порядка.

$$f_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f_1(x,y); \; f_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f_2(x,y)$$

Уравнение 1 приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью введения новой переменной:

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$

$dy = udx + xdu$

Пример:

$(x + y)dx = xdy$

$(x + ux)dx = x(udx + xdu)$

$(1 + u)dx = udx + xdu$

$dx = xdu$

$\frac{dx}{x} = du$

$\int \frac{dx}{x} = \int du$

$\ln|x| + \ln|C| = u$

$\ln xC = \frac{y}{x}$

$y = x \ln xC$

Примечание: очень часто уравнение 1 записывается в следующем виде $y' = f(\frac{y}{x})$.

Пример:

$xy' = y \ln \frac{y}{x}$

$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

$dy = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} dx$

$udx + xdu = u \ln udx$

$xdu = u(\ln u - 1)dx$

$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|$

$\ln u - 1 = xC$

$\ln \frac{y}{x} = xC + 1$

§4. Линейные дифференциальные уравнения 1-ого порядка.

Опр.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно 1-ой степени относительно неизвестной функции y и ее производной y'.

Уравнения данного типа имеют следующий вид:

$y' + p(x)y = q(x)$ (1)

где $p(x)$ и $q(x)$ заданы непрерывной функцией от x (или константой).

Примечание: если вместо $p(x)$ и $q(x)$ стоят константы a и b, то получим уравнение $y' + ay = b$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

$$dy = (b - ay)dx$$

$$\int \frac{dy}{b - ay} = \int dx$$

$$-\frac{1}{a}\ln|b - ay| = x + C$$

Уравнение можно решать двумя способами:

1) Метод вариации произвольной постоянной.

Если в уравнении 1 правую часть заменить на 0, то получим уравнение 2, которое называется соответственным однородным уравнением.

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

Уравнение 2 является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = 0$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$$

$$\ln|y| = \ln e^{-\int p(x)dx} + \ln C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot C \qquad (3)$$

Уравнение 3 является общим решением уравнения 2.

Согласно данному методу произвольная постоянная C считается некоторой функцией от x, и таким образом решение уравнения 1 ищется в виде 4.

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad (4)$$

Для нахождения неизвестной функцией $C(x)$ необходимо 4 подставить в 1.

Пример:

$$y' - yctgx = \sin x \qquad (а)$$

Записываем соответственное однородное уравнение:

$$y' - yctgx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int ctgxdx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C$$

$$y = C \cdot \sin x$$

Общее решение уравнения (а) ищем в следующем виде (б):

$$y = C(x) \cdot \sin x \qquad (б)$$

(б) подставляем в (а):

$$C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin xctgx = \sin x$$

$$C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\cos x = \sin x$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C_1 \qquad (в)$$

Подставим (в) в (б) и получим общее решение:

$$y = \sin(x + C_1)$$

2) Согласно этому способу решение уравнения 1 ищется в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x) \tag{5}$$

Для нахождения неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$ 5 подставляем 1:

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x)$$

$$[u' + p(x)u]v + v'u = q(x)$$

Пусть функция $u(x)$ будет такой, что:

$$u' + p(x)u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|u| = -\int p(x)dx$$

$$u = e^{-\int p(x)dx}$$

$$v'u = q(x)$$

$$v'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\ldots$$

$$v = \ldots + C$$

Найденные u и v подставляем в 5.

<u>Пример:</u>

$$y' - yctgx = \sin x$$

$$u'v + v'u - uvctgx = \sin x$$

$$[u' - uctgx]v + v'u = \sin x$$

$$u' = uctgx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int ctgxdx$$

$$\ln|u| = \ln|\sin x|$$

$$u = \sin x$$

$$v'u = \sin x$$

$$v' \sin x = \sin x$$

$$v' = 1$$

$$v = x + C$$

$$y = \sin x(x + C)$$

§5. Уравнения Бернулли.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{1}$$

Данное уравнение 1 решается как уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ по уравнению 2.

$$y = u(x) \cdot v(x) \tag{2}$$

<u>Пример:</u>

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2$$

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2$$

$$\left[u' + \frac{u}{x}\right]v + v'u = -xu^2v^2$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$v'u = -xu^2v^2$$

$$\frac{v'}{x} = -\frac{xv^2}{x^2}$$

$$v' = -v^2$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\int dx$$

$$-\frac{1}{v}=-x+C$$

$$v=\frac{1}{x+C}$$

$$y=\frac{1}{(x+C)x}$$

§6. Общие понятия о дифференциальных уравнениях высших порядков.

Опр.1

Дифференциальными уравнениями высших порядков называются уравнения, связывающие между собой независимую переменную x, искомую функцию y и все ее производные до n-ого порядка включительно.

В общем виде оно может быть записано так:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

Опр.2

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной, входящей в него. Уравнения 2-ого и более высоких порядков называются дифференциальными уравнениями высших порядков.

Опр.3

Начальными условиями для дифференциального уравнения 1 называются условия, в которых должны удовлетворяться искомая функция y и все ее производные до (n-1)-ого порядка включительно, при:

$$x=x_0;\, y=y_0;\, y'=y_0';\, y''=y_0''\ldots;\, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

где $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(n-1)}$ - заданные числа.

Опр.4

Общим решением дифференциального уравнения 1 называется функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,C_3,\ldots C_n)$, содержащая n произвольных постоянных и удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) при любых значениях произвольных постоянных является решением уравнения 1 (т.е. обращается в тождество);

2) для любых начальных условий 2 из области существования решений можно подобрать такие значения произвольных постоянных, что эти начальные условия будут выполняться.

Опр.5

Частным решением уравнения 1 называется любая функция, полученная из общего решения путем присвоения произвольной постоянной каких-то конкретных значений.

Простейшим типом уравнения 1 является уравнение следующего вида: $y^{(n)}=f(x)$. Решение такого уравнения находится путем последовательного интегрирования и понижения порядка уравнения:

$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1;\, y^{(n-2)}=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2$ и т.д.

Пример:

$y''' = \sin 3x$

$y'' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1$

$y' = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2$

$y = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

§7. Два типа дифференциальных уравнений 2-ого порядка, допускающих понижение порядка.

I. Уравнение, не содержащее в явном виде функцию y.

$y'' = f(x, y')$ (1)

С помощью следующей подстановки:

$y' = p, y'' = p'$ (2)

где 1 сводится к уравнению 1-ого порядка и приобретает вид 3:

$p' = f(x, p)$ (3)

После решения уравнения 3 необходимо вернуться к функции y (вместо уравнения 2-ого порядка будем два раза решать уравнение 1-ого порядка).

Пример:

$y''x = y'$

$p'x = p$

$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x}$

$\ln|p| = \ln|x| + \ln C_1$

$p = C_1 \cdot x$

$y' = C_1 \cdot x$

$\int dy = \int C_1 x dx$

$y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$

Замечание: далеко не всегда после понижения порядка получается уравнение с разделяющимися переменными.

II. Уравнение, не содержащее в явном виде аргумент x.

$y'' = f(y, y')$ (4)

$y' = p$

Но вторую производную от y надо выразить через производную по y.

$y'' = p' = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy}$

Подстановка выглядит следующим образом:

$y' = p, y'' = p\cdot\frac{dp}{dy}$ (5)

Подставляя 5 в 4, получим следующее уравнение 1-ого порядка:

$$\frac{dp}{dy}p = f(y,p)$$

Пример:

$$y'' = \frac{1+(y')^2}{2y}$$

$$\frac{dp}{dy}p = \frac{1+p^2}{2y}$$

$$\int \frac{2pdp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(p^2+1) = \ln|y| + \ln C_1$$

$$p^2+1 = y\cdot C_1$$

$$p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm\int dx$$

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$$

Примечание: в том случае, если в уравнении отсутствует и x и y, т.е. $y'' = f(y')$, то его можно решать любым способом (лучше использовать I способ).

§8. Однородные дифференциальные уравнения высших порядков.

Опр.1

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение следующего вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots a_n$ - заданные функции от x и константы.

В частном случае при уравнении 2-ого порядка оно примет вид:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

Опр.2

Пусть дана совокупность функций $y_1, y_2, \ldots y_n$ и дана совокупность чисел $C_1, C_2, \ldots C_n$. Тогда линейная комбинация функций называется следующая сумма произведений:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (3)$$

Опр.3

Совокупность функций называется линейно независимой, если их линейная комбинация 3 может быть равна 0 только в том случае, если когда все $C_1, C_2, \ldots C_n$ равны 0.

В противном случае, т.е. когда линейная комбинация 3 может быть равна 0 при $C_1, C_2, \ldots C_n$, отличных от 0, совокупность функций называется линейно зависимой.

Замечание: если две функции линейно зависимы, то одну из них можно выразит через другую.

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{C_2}{C_1} y_2 = \lambda y_2$$

Опр.4

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель w называется определителем Вронского (вронскиан).

Для совокупности функций он примет вид:

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Теорема 1 (необходимый признак линейной зависимости функций).

Если функции линейно зависимы, то их вронскиан равен 0.

Док-во:

Согласно замечанию $y_1 = \lambda y_2; y_1' = \lambda y_2'$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 2 (необходимое условие линейной независимости функций).

Если совокупность функций линейно независима, то их вронскиан не равен 0.

Опр.5

Совокупность линейно независимых частных решений уравнения 1 или 2 называется фундаментальной системой решения этого уравнения.

Теорема 3(общее решение уравнения 1).

Линейная комбинация фундаментальной системы частных решений уравнения 1 является его общим решением:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (4)$$

где $y_1, y_2, \ldots y_n$ - фундаментальная система частных решений.

Для уравнения 2 общее решение имеет вид 5.

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (5)$$

§9. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

Согласно теореме 3 §8 общее решение уравнения 1 записывается в виде 2:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (2)$$

где y_1, y_2 - фундаментальная система частных решений.

Функция e^{kx} может являться решением уравнения 1. подставим ее в это уравнение:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (3)$$

Таким образом, e^{kx} тогда будет являться решением уравнения 1, когда k является корнем уравнения3. Уравнение 3 называется характеристическим уравнением уравнения 1. Уравнение 3 имеет два корня:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (4)$$

<u>Возможны 3 случая:</u>

I. $k_1 \neq k_2$ - действительные числа, D>0.

$$y_1 = e^{k_1x}; y_2 = e^{k_2x}$$

Для того чтобы убедиться, что функции y_1, y_2 линейно независимы, составляем вронскиан:

$$w = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1)$$

Т.к. $k_1 \neq k_2 \Rightarrow w \neq 0$.

Следовательно функции y_1, y_2 составляют фундаментальную систему решений и их можно подставить в 2.

$$Y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \qquad (5)$$

5 является общим решением уравнения для данного случая.

<u>Пример:</u>

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Записываем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 2$$

$$Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

II. $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$, D=0.

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$$

Нетрудно показать, что вторым частным решением уравнения 2 является:

$$y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}$$

Для этого достаточно y_2 подставить в 1 и получить тождество.

Можно показать, что вронскиан для этих функций не равен 0 $\Rightarrow$ y_1, y_2 составляют фундаментальную систему решений и их можно подставить в общее решение 2.

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{p}{2}x} \qquad (6)$$

<u>Пример:</u>

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Записываем характеристическое уравнение:

$k^2 - 4k + 4 = 0$

$k_1 = k_2 = 2$

$Y = (C_1 + C_2 X)e^{2x}$

III. $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta,\ D<0.$

($i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица)

$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x};\ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

Согласно I получаем, что $w = e^{2\alpha x}(-2i\beta) \neq 0 \Rightarrow$

$Y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

Дальше путем преобразований получим общее решение, не содержащее в явном виде мнимую единицу:

$$Y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \qquad (7)$$

<u>Пример:</u>

$y'' - 4y' + 13y = 0$

$k^2 - 4k + 13 = 0$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm i6}{2} = 2 \pm i3$$

$\alpha = 2; \beta = 3$

$Y = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

§10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots a_n$ а также $f(x)$ - заданные непрерывные функции от x.

В случае уравнения 2-ого порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1а)$$

Если в правой части функцию $f(x)$ заменить на 0, то получим уравнение 2:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

которое называется соответствующим однородным уравнением.

Общее решение уравнения 2 известно из §8:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (3)$$

где y_1, y_2 - фундаментальная система частных решений.

Теорема 1 (общее решение уравнения 1).

Общее решение уравнения 1 складывается из общего решения уравнения 2 и некоторого частного решения самого уравнения 1:

$$y = Y + y_* \qquad (4)$$

§11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка со специальной правой частью.

a_1 и a_2 - константы.

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

I. $\underline{f(x) = e^{ax}(A_o + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n)}$

1) $k_1 \neq a; k_2 \neq a$

$y_* = e^{ax}(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n)$

2) $k_1 = a$ или $k_2 = a$

$y_* = xe^{ax}(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n)$

3) $k_1 = k_2 = a$

$y_* = x^2e^{ax}(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n)$

<u>Пример 1:</u>

$y'' - 3y' + 2y = x^3 + 6$, (a=0)

Записываем соответствующее однородное уравнение:

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Записываем соответствующее характеристическое уравнение:

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$k_1 = 1; k_2 = 2$

$Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

Запишем частное решение:

$y_* = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3$

Найдем неизвестные коэффициенты B_i. Для этого необходимо y_* подставить в исходное уравнение.

$y'_* = B_1 + 2B_2x + 3B_3x^2$

$y''_* = 2B_2 + 6B_3x$

$2B_2 + 6B_3x - 3(B_1 + 2B_2x + 3B_3x^2) + 2(B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3) = x^3 + 6$

Используем метод неопределенных коэффициентов:

$$2B_3x^3 + x^2(-9B_3 + 2B_2) + x(-6B_2 + 6B_3 + 2B_1) + 2B_2 - 3B_1 + 2B_0 = x^3 + 6$$

$$\begin{cases} 2B_3 = 1 \\ -9B_3 + 2B_2 = 0 \\ -6B_2 + 6B_3 + 2B_1 = 0 \\ 2B_2 - 3B_1 + 2B_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} B_3 = 1/2 \\ B_2 = 9/4 \\ B_1 = 21/4 \\ B_0 = 69/8 \end{array}$$

$$y_* = \frac{69}{8} + \frac{21}{4}x + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Записываем общее решение согласно $y = Y + y_*$

Ответ:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{69}{8} + \frac{21}{4}x + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

<u>Пример 2:</u>

$y'' - 3y' + 2y = xe^x$, (a=1)

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$k_1 = 1; k_2 = 2$

$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$y_* = xe^x(B_0 + B_1 x) = e^x(B_0 x + B_1 x^2)$

$y_*' = e^x(B_0 x + B_1 x^2) + e^x(B_0 + 2B_1 x) = e^x(B_0 + B_0 x + 2B_1 x + B_1 x^2)$

$y_*'' = e^x(B_0 + B_0 x + 2B_1 x + B_1 x^2) + e^x(B_0 + 2B_1 + 2B_1 x)$

$e^x(B_0 + B_0 x + 2B_1 x + B_1 x^2) + e^x(B_0 + 2B_1 + 2B_1 x) - 3\,e^x(B_0 + B_0 x + 2B_1 x + B_1 x^2) +$

$+ 2e^x(B_0 x + B_1 x^2) = xe^x$

$x^2(B_1 - 3B_1 + 2B_1) + x(B_0 + 2B_1 + 2B_1 - 3B_0 - 6B_1 + 2B_0) + B_0 + B_0 - 3B_0 + 2B_1 = x$

$\begin{cases} -2B_1 = 1 \\ -B_0 + 2B_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B_1 = -1/2 \\ B_0 = -1 \end{matrix}$

$y_* = e^x(-x - \frac{1}{2}x^2)$

Ответ:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^x(x + \frac{1}{2}x^2)$

II. $\underline{f(x) = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)}$

1) $D > 0, D = 0, D < 0$ и $\alpha \pm i\beta \neq a \pm ib$

$y_* = e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$

2) $\alpha \pm i\beta = a \pm ib$

$y_* = xe^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$

Пример 1:

$y'' - 6y' + 5y = \sin x$, (a=0)

$y'' - 6y' + 5y = 0$

$k^2 - 6k + 5 = 0$

$k_1 = 1; k_2 = 5$

$Y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$

$y_* = C\cos x + D\sin x$

$y_*' = -C\sin x + D\cos x$

$y_*'' = -C\cos x - D\sin x$

$-C\cos x - D\sin x - 6(-C\sin x + D\cos x) + 5(C\cos x + D\sin x) = \sin x$

$\sin x(-D + 6C + 5D) + \cos x(-C - 6D + 5C) = \sin x$

$\begin{cases} 6C + 4D = 1 \\ 4C - 6D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C = 3/26 \\ D = 1/13 \end{matrix}$

$y_* = \frac{3}{26}\cos x + \frac{1}{13}\sin x$

Ответ:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{5x} + \frac{3}{26}\cos x + \frac{1}{13}\sin x$$

<u>Пример 2:</u>

$y'' + y = \cos x$, (a=0; b=1)

$y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0$

$k^2 = -1$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, $(\alpha = 0; \beta = 1)$

$Y = A\cos x + B\sin x$

$y_* = x(C\cos x + D\sin x)$

$y'_* = C\cos x + D\sin x + x(-C\sin x + D\cos x)$

$y''_* = -C\sin x + D\cos x + (-C\sin x + D\cos x) + x(-C\cos x - D\sin x)$

$-2C\sin x + 2D\cos x + x(-C\cos x - D\sin x) + x(C\cos x + D\sin x) = \cos x$

$-2C\sin x + 2D\cos x = \cos x$

$$\begin{cases} -2C = 0 \\ 2D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{D} = 1/2 \end{matrix}$$

$$y_* = \frac{x}{2}\sin x$$

Ответ:

$$y = A\cos x + B\sin x + \frac{x}{2}\sin x$$