МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 19 ФУНКЦИЯ 1-ОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ГРАФИКИ.

ОПР 1

Величина x называется **переменной**, если в рамках данной задачи она принимает различные числовые значения.

ОПР 2

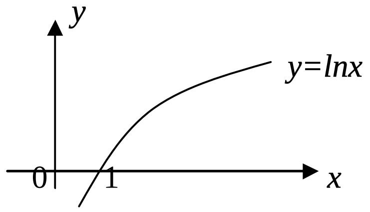
Величина C называется **постоянной**, если вообще говоря она может изменяться, но в рамках данной задачи имеет постоянной числовое значение.

ОПР 3

Переменная величина y называется **функцией** (от) переменной величины x, заданной на некотором множестве X, если каждому значению переменной величины $x\in X$ соответствует определённое значение переменной величины y. При этом x – называется **независимой переменной** или **аргументом**.

ОПР 4

Множество значений аргумента x, на котором функция y задана, называется **областью определения** данной функции.



$x>0;\ (0;+\infty)$

ОПР 5

Если функция y задана в виде уравнения $f(x,y)=0$, не разрешённого относительно y, то в этом случае говорят, что функция задана **в неявном виде**.

Пример: $tgxy+e^{xy}=0$

ОПР 6

Функции $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$ называются **взаимно обратными**, если оператор f, указывающий на действия по отношению к x, является обратным к оператору φ, указывающему на действия по отношению к y.

$y=x^3;\quad x=\sqrt[3]{y}$

$y=\sin x;\quad x=\arcsin y$

$y=e^x;\quad x=\ln y$

ОПР 7

Функция *y=f(x)* называется **возрастающей** на некотором интервале из области её определения, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 ∈ данному интервалу соблюдается условие: при $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$

Функция называется **убывающей** на некотором интервале из области её определения, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 ∈ данному интервалу соблюдается условие:

при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$

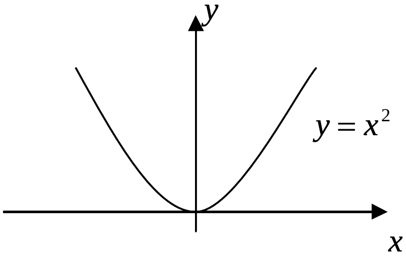
ОПР 8

Функция, имеющая структуру *y=f(u(x))* называется **сложной**, при этом *u* – промежуточный аргумент, а *x* – независимая переменная.

Например $y = \cos\sqrt{x}$ $(y = \cos u, u = \sqrt{x})$

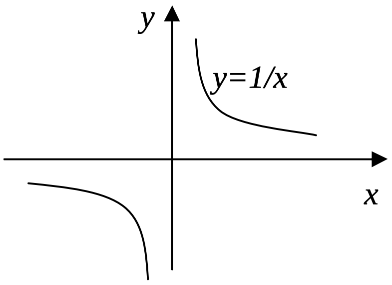
ОПР 9

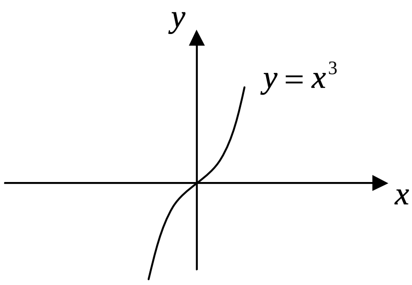
Функция называется **чётной**, если *f(-x)=f(x)*



Для четной функции: ось ординат *OY*- ось симметрии.

Функция называется **нечётной**, если *f(-x)= - f(x)*





Таким образом для нечетной функции: начало координат – центр симметрии.

ОПР 10

Функция *y=f(x)* называется **периодической**, если существует такое число *p*, называемое периодом, что выполняется следующее условие: *f(x)=f(x±p)* .

Для *sinx* и *cosx* *p=2p* . Для *tgx* и *ctgx* *p=p*

ОПР 11

Те значения аргумента *x*, при которых функция равна 0, называются **корнями функции**.

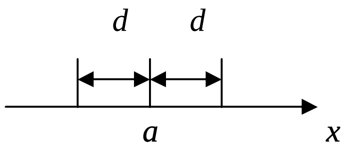
§ 20 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 1-ОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

ОПР 1

Если переменная *x*, изменяясь, приближается к некоторому числу *a*, то говорят, что *x* **стремится** к *a* и при этом пишут $x \to a$.

ОПР 2

d – окрестностью точки *a* называется интервал $(a\text{-}d\ ;\ a+d\ )$



ОПР 3

Число *A* называется **пределом функции** $y=f(x)$, при $x \to a$, что записывается следующим образом:

$\lim_{x\to a} f(x)=A$,

если, задавшись как угодно малым положительным числом *e* , можно указать такую *d* -окрестность точки *a*, что для всех *x* из этой *d* -окрестности будет выполняться неравенство:

$|f(x)-A|<e$

(Чем меньше мы задаём *e* , тем меньше будет *d* -окрестность точки *a*).

ОПР 4

О **пределе справа** говорят в том случае, когда $x \to a$ и при этом $x>a$, что записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A$$

О **пределе слева** говорят в том случае, когда $x \to a$ и при этом $x<a$, что записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to a\text{-}0} f(x)=A$$

Пределы слева и справа называются **односторонними пределами**.

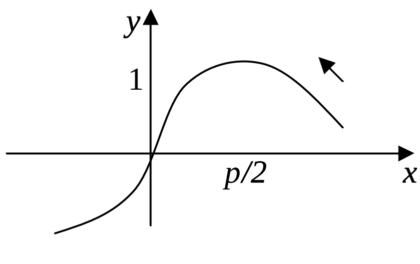
Односторонние пределы могут быть равны между собой, но могут и различаться.

ПРИМЕР 1

1) $y=\sin x$

$$\lim_{x\to \frac{p}{2}-0} \sin x=1$$

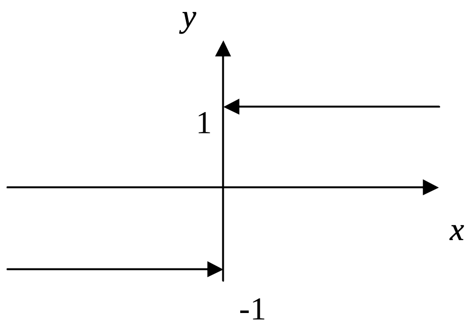
$$\lim_{x\to \frac{p}{2}+0} \sin x=1$$



2) $y=\dfrac{|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=1$$



§ 21 БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ АРГУМЕНТ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШАЯ ФУНКЦИЯ.

ОПР 1

Если аргумент x неограниченно возрастает, то есть становится больше любого наперёд заданного положительного числа, или x неограниченно убывает, то есть становится меньше любого наперёд заданного отрицательного числа, то говорят, что x – **бесконечно большой аргумент** и при этом пишут соответственно $x\to\infty$, $x\to -\infty$.

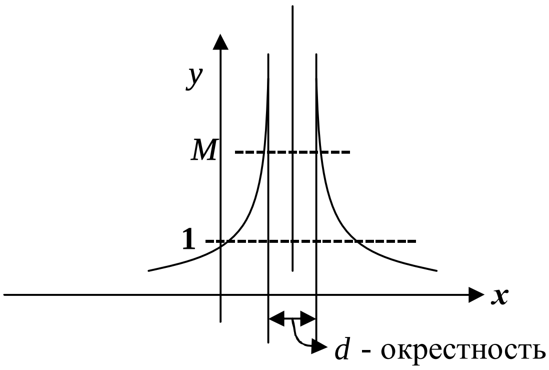
ОПР 2

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** (то есть имеет бесконечно большой предел) при $x\to a$, что записывается следующим образом $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$, если, задавшись как угодно большим положительным числом M, можно указать такую d -окрестность точки a, что для всех x из этой d -окрестности справедливо неравенство:

$$|f(x)|>M$$

ПРИМЕР

$$y=\frac{1}{(1-x)^2}$$



ОПР 3

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** (то есть имеет бесконечно большой предел) при бесконечно большом аргументе, что записывается следующим образом $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$, если задавшись как угодно большим положительным числом M можно указать такое положительное число N, что для всех $|x|>N$ будет выполняться неравенство $|f(x)|>M$.

ПРИМЕР

$f(x)=x^2$, $\lim_{x\to\pm\infty} x^2=\infty$, так как задавшись, например M=10^6, мы указываем такое N=10^3, что при всех $|x|>10^3$ получим, что $x^2>10^6$.

ОПР 4

Функция *y=f(x)* называется **ограниченной** в данной области изменения *x*, если можно указать такое конечное положительное число *M*, что для всех *x* из этой области справедливо неравенство $|f(x)|\leq M$. Если же такое число *M* не существует, то функция называется **неограниченной** в этой области.

ПРИМЕР

sinx, cosx – ограниченные функции на всей числовой оси; $|\sin x|\leq 1$ на $(-\infty;+\infty)$

§ 22 БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ.

ОПР 1

Функция *y=O(x)* называется **бесконечно малой** при $x\to a$ ($x\to\pm\infty$), если $\lim_{x\to a}O(x)=0$ или $\lim_{x\to\pm\infty} O(x)=0$

Пример: *y=1/x – бмф* при *x→¥* . Или: $y=(1-x)^2$ *–бмф* при *x→1.*

Свойства бесконечно малых функций

1) Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2) Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция

   $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$

3) Отношение бесконечно малой функции к функции, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая функция

   $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}=0$

§ 23 ТЕОРЕМА О ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРЕДЕЛ.

Теорема. Если функция имеет предел

$\lim_{x\to a}f(x)=A$ (1) ,

то можно указать такую окрестность точки *a*, в которой выполняется условие:

$f(x)=A+O(x)$ (2)

И обратно: если в некоторой окрестности точки a справедливо (2), то существует предел (1).

Доказательство:

Пусть существует предел (1), тогда согласно определению 3 из § 20

$|f(x)-A|<e$ при $|x-a|\langle d$

Обозначив $f(x)\text{-}A=\varphi(x)$ (*),

получим $|j(x)|<e \Rightarrow |j(x)-0|<e$

По определению 3 из § 20 $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$, а согласно определению § 22 это бесконечно малая функция при $x\to a$

$\varphi(x)=0(x)$ (**)

Подставляя (**) в (*)получим (2), что и требовалось доказать.

Доказательство в обратном направлении осуществляется аналогично.

§ 24 СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ.

1) **Предел константы** равен самой константе.

$\lim_{x\to a}C=C$ $(C=const)$ (1)

2) **Предел суммы (разности)** функции равен сумме (разности) пределов функций

$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x)$ (2)

Доказательство:

Пусть $\lim_{x\to a}f_1(x)=A_1$, $\lim_{x\to a}f_2(x)=A_2$, тогда по теореме из § 23 можем записать:

$f_1(x)=A_1+O_1(x)$, $f_2(x)=A_2+O_2(x)$ $(A=A_1+A_2;\ O=O_1+O_2)$

$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to a}[A_1+O_1+A_2+O_2]=\lim_{x\to a}[A+O(x)]=$

теорема § 23, формула $(2)=\lim_{x\to a}f(x)=A=A_1+A_2=\lim_{x\to a}f_1+\lim_{x\to a}f_2$

Что и требовалось доказать.

3) **Предел произведения** функции равен произведению пределов этих функций

$\lim_{x\to a}f_1(x)f_2(x)=\lim_{x\to a}f_1(x)\lim_{x\to a}f_2(x)$ (3)

Доказательство:

Пусть $\lim_{x\to a}f_1(x)=A_1$, $\lim_{x\to a}f_2(x)=A_2$, тогда по теореме из § 23 можем записать:

$f_1(x)=A_1+O_1(x)$, $f_2(x)=A_2+O_2(x)$

$\lim_{x\to a}f_1(x)\,f_2(x)=\lim_{x\to a}(A_1+O_1)(A_2+O_2)=\lim_{x\to a}(A_1A_2+A_1O_2+A_2O_1+O_1O_2)=$*свойство 2)*$=$

$\lim_{x\to a}A_1A_2+\lim_{x\to a}A_1O_2+\lim_{x\to a}A_2O_1+\lim_{x\to a}O_1O_2=$ *свойство 2) из § 22; свойство 1)*$=$

$A_1A_2=\lim_{x\to a}f_1(x)\lim_{x\to a}f_2(x)$

Что и требовалось доказать.

4) **Константу можно выносить за знак предела**

$lim_{x\to a}C\,f(x)=C lim f(x)$ (4)

Доказательство:

$lim_{x\to a}C\,f(x)$=*свойство 3)*= $lim_{x\to a}C\ lim_{x\to a}f(x)$=*свойство 1)*= $C\ lim_{x\to a}f(x)$

5) **Предел отношения** двух функций равен отношению пределов этих функций, если знаменатель не является бесконечно малой функцией, то есть

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f_1(x)}{\lim_{x\to a}f_2(x)} \qquad (5)$$

Доказательство:

Пусть $lim_{x\to a}f_1(x)=A_1$, $lim_{x\to a}f_2(x)=A_2$, тогда по теореме из § 23 можем записать:

$f_1(x)=A_1+O_1(x)$, $f_2(x)=A_2+O_2(x)$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A_1+O_1(x)}{A_2+O_2(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{A_1+O_1}{A_2+O_2}-\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_1}{A_2}\right)=\text{свойство}2)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{A_1A_2+A_2O_1-A_1A_2-A_1O_2}{(A_2+O_2)A_2}+\lim_{x\to a}\frac{A_1}{A_2}=\text{свойства}1),2),3)\text{пар}.22=\lim\frac{A_1}{A_2}=\text{свойство}1)=$$

$$=\frac{A_1}{A_2}=\frac{\lim_{x\to a}f_1(x)}{\lim_{x\to a}f_2(x)}$$

6) **Логарифм предела** функции равен пределу логарифма этой функции

$\ln\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)=\lim_{x\to a}(\ln f(x))$ (знаки предела и логарифма можно менять местами)

7) **Предел функции,** значения которой заключены между значениями двух других функций.

Если $F(x)\le f(x)\le j(x)$ при этом $\lim_{x\to a}F(x)=A$, $\lim_{x\to a}j(x)=A$, то $\lim_{x\to a}f(x)=A$

Доказательство:

По теореме из § 23 $F(x)=A+O(x)$, $\varphi(x)=A+O_2(x)$, подставим в двойное неравенство

$A+O_1(x)\le f(x)\le A+O_2(x)$ и перейдём в этом неравенстве к пределу при $x\to a$:

$$\lim_{x\to a}[A+O_1(x)]\le\lim_{x\to a}f(x)\le\lim[A+O_2(x)]\Leftrightarrow$$

$$A\le\lim_{x\to a}(f(x))\le A\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=A$$

Что и требовалось доказать.

Основные виды неопределённостей:

$$\left(\frac{0}{0}\right),\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ (\infty-\infty),\ (1^{\infty}),\ (0^{0}),\ (\infty^{0}),\ (0\cdot\infty)$$

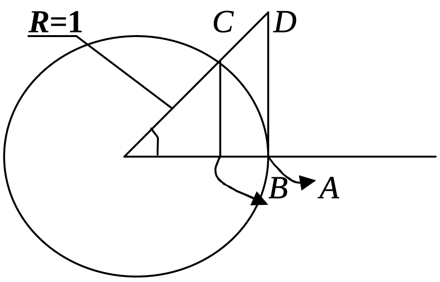
§ 25 ДВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛА.

1) Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

где x – в радианах

Доказательство:



Из геометрических соображений очевидно

$BC < \overset{\smile}{AC} < AD$ (*)

$BC = \sin x$; $\overset{\smile}{AC} = x1 = x$; $AD = \operatorname{tg} x$

Подставим всё в (*): $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$\sin x < x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} < 1$

$x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

Переходим в неравенстве к пределу при $x\to 0$, то есть

$$\lim_{x\to 0}\cos x \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$

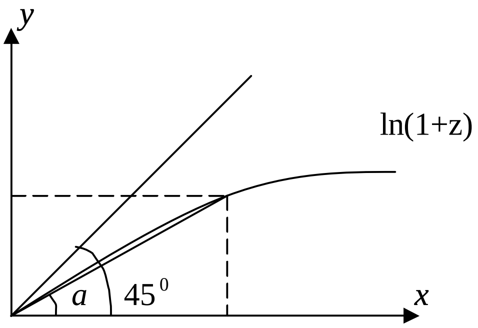
$1 \le \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} \le 1$ по свойству 7, § 24 получаем (1), ч.т.д.

2) Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (2)$$

Доказательство:

Очевидно, что угол наклона касательной к графику функции $y=\log_a(1+z)$ при $z=0$ (в начале координат) будет зависеть от основания логарифма a. Обозначим через е основание такого логарифма, для которого угол наклона касательной в начале координат равен 45^0.



$$tga = \frac{y}{z} = \frac{\ln(1+z)}{z} = \ln(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

Перейдём к пределу при $z \to 0$:

$\lim_{z\to 0} tga = \lim_{z\to 0} \ln(1+z)^{\frac{1}{z}}$ (учитывая, что $\alpha \to \pi/4$ при $z ® 0$).

$$1 = \ln \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e \qquad (3)$$

(3) – ещё одна форма записи второго замечательного предела

Пусть $z = \frac{1}{x}$, тогда при $x \to \infty$, $z \to 0$

Подставляя в (3), получим (2). Что и требовалось доказать.

§ 26 СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ.

ОПР 1

Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{O_1(x)}{O_2(x)} = 0$, то $O_1(x)$ – называется бесконечно малой функцией **высшего порядка** по отношению $O_2(x)$.

ПРИМЕР

$O_1=x^2$ *и* $O_2=x$. O_1 является бесконечно малой функцией высшего порядка по отношению к O_2 при $x \to 0$, так как $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

ОПР 2

Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{O_1(x)}{O_2(x)} = A$, где $A \neq 0$, то функции O_1 и O_2 – называются бесконечно малыми функциями **одного порядка**.

ПРИМЕР

$O_1=x$ *и* $O_2=3x$ при $x \to 0$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{O_1}{O_2} = \frac{1}{3}$

ОПР 3

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O_1(x)}{O_2(x)}=1$, то функции O_1 и O_2 – называются **эквивалентными** бесконечно малыми функциями при $x\to a$, что записывается следующим образом: $O_1\sim O_2$ при $x\to a$.

ПРИМЕР 1

$Sinx \sim x$, при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$tgx \sim x$, при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$arcsinx \sim x$, при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=(\arcsin x=a\,;\sin a\ = x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{\sin a}=1$

$arctgx \sim x$

$1\text{-}cosx \sim \dfrac{x^2}{2}$

$e^x-1 \sim x$

ПРИМЕР 2

$x \sim ln(1+x)$, при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

ТЕОРЕМА 1

Разность эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция высшего порядка.

Доказательство:

Пусть $O_1\sim O_2$, при $x\to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{O_1}{O_2}=1$

$$\lim_{x\to a}\frac{O_1-O_2}{O_1}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{O_2}{O_1}\right)=1-\lim_{x\to a}\frac{O_2}{O_1}=1-1=0\ ,$$

согласно первому определению $O_1\text{-}O_2$ являются бесконечно малой функцией высшего порядка по отношению к O_1.

ТЕОРЕМА 2

Предел отношения бесконечно малых функций равен пределу отношения их эквивалентных бесконечно малых функций.

Доказательство:

Пусть даны две пары эквивалентных бмф $O_1(x)\sim a_1(x)$ и $O_2(x)\sim a_2(x)$, то есть

$$\lim_{x\to a}\frac{O_1}{a_1}=1\ ,\quad \lim_{x\to a}\frac{O_2}{a_2}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{O_1}{O_2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{O_1}{a_1}a_1}{\frac{O_2}{a_2}a_2}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{O_1}{a_1}}{\lim_{x\to a}\frac{O_2}{a_2}}\lim_{x\to a}\frac{a_1}{a_2}=\lim\frac{a_1}{a_2}\ ,$$

что и требовалось доказать.

§ 27 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

ОПР 1

Функция *y=f(x)* называется **непрерывной** на некотором интервале, если в каждой точке *x=a* этого интервала выполняются следующие два условия:

1) Функция в данной точке определена, то есть известно значение *f(a)* как конечное число.
2) Односторонние пределы в этой точке равны между собой и равны значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$

ОПР 2

Если в точке a не выполняется хотя бы одно из условий ОПР 1 , то функция называется **разрывной** в этой точке.

ПРИМЕР

$$y=\frac{\sin x}{x}$$

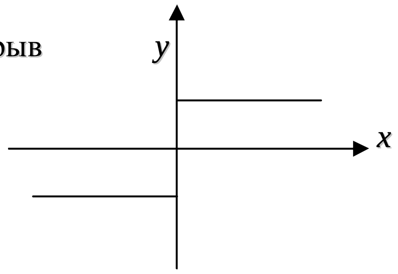
$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, но $y(0)=\frac{\sin 0}{0}$ - не определено. То есть данная функция разрывная в точке *x=0.*

ОПР 3

Различают **конечные разрывы**, когда оба односторонних предела конечны, и **бесконечные разрывы**, когда хотя бы один из односторонних пределов бесконечный.

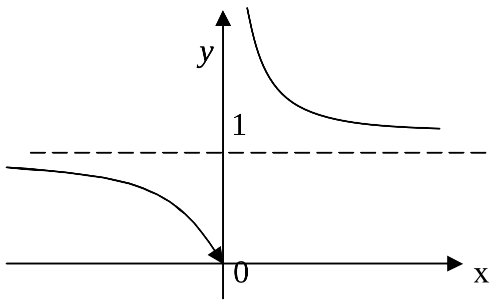
ПРИМЕР

$y=\frac{x}{|x|}$ конечный разрыв



Рассмотрим

$y=2^{\frac{1}{x}}$ $\qquad 2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0\,,\quad 2^{1/0}=2^{\infty}=\infty,\quad 2^{1/\infty}=2^{0}=1$



бесконечный разрыв

ТЕОРЕМА (основная теорема непрерывных функций)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале, то в каждой точке a данного интервала, бесконечно малому приращению аргумента Δx будет соответствовать бесконечно малое приращение функции $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, то есть имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (1) \quad ,$$

и обратно, если в каждой точке интервала выполняется условие (1), то функция непрерывна на этом интервале.

Доказательство:

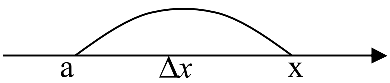
Пусть $y = f(x)$ непрерывна, тогда согласно определению (1)

$\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$

используя свойства пределов

$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$



x=a+ Δx , при *x→a,* $\Delta x \to 0$

$\lim_{\Delta x \to 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0$, то есть

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, ч.т.д

§ 28 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

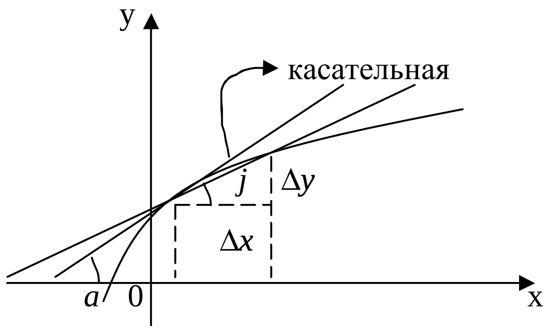
ОПР 1

Производной функции $y=f(x)$ называется величина, обозначаемая как $f'(x)$ и равная пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, т.е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 (геометрический смысл производной)

Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции



$$tg j = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Перейдём в этом равенстве у пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg j = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$ (при $\Delta x \to 0$ φ будет стремиться к α)

$f'(x) = tg a$ ч.т.д.

<u>ТЕОРЕМА 2</u> (физический смысл производной)

Производная есть скорость изменения функции.

Доказательство:

Пусть y – путь, x – время, тогда $y=f(x)$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ - - путь, проходимый за время Δx,

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - средняя скорость движения на интервале времени $[x, x+\Delta x]$,

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - мгновенная скорость в данный момент времени x, а

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, что и требовалось доказать.

<u>ОПР 2</u>

Функция называется **дифференцируемой** на некотором интервале, если в каждой точке этого интервала существует предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

<u>ТЕОРЕМА 3</u> (связь непрерывных и дифференцируемых функций)

Если функция дифференцируема на некотором интервале, то она непрерывна на этом интервале.

Доказательство:

Пусть функция дифференцируема на некотором интервале, согласно <u>ОПР2</u> это означает, что в любой точке существует предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Согласно теореме из § 23 можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + 0$.

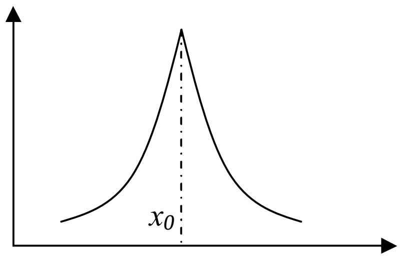
Умножим на Δx:

$\Delta y = f'(x)\Delta x + O\Delta x$, очевидно, что при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Согласно формуле (1), § 27это означает, что функция непрерывна.

Примечание:

Обратное утверждение неверно, то есть непрерывность функции не является достаточным условием её дифференцируемости.



В т. x_0 можно провести две касательные, то есть производная в этой точке осуществляет скачок с положительного на отрицательное значение, а сама точка x_0- точка разрыва производной. Хотя сама функция непрерывна на данном интервале.

ОПР 2

Функция называется **гладкой** на некотором интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Следовательно, в каждой точке к графику гладкой функции можно провести единственную касательную.

§ 29 СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ.

1) Производная константы равна нулю:

   $c'=0$ (так как $\Delta y=0$).

2) Производная независимой переменной равна единице:

   $x'=1$ (так как если $y=x$, то $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$).

3) Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных функций, то есть если $y=u(x)+v(x)$, то $y'=u'(x)+v'(x)$.

Доказательство:

$$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]=[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]=$$
$$=\Delta u+\Delta v$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'$$

4) Производная произведения двух функций:

   $y=u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad y'=u'v+uv'$.

5) Константу можно выносить за знак производной:

то есть $(cy(x))' = cy'(x)$.

Доказательство:

$$(cy)' = c'y + cy' = cy'$$

6) Производная частного:

если $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, то $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

7) Производные взаимообратных функций:

y=f(x) и *x=φ(y)*

связаны между собой следующим соотношением $f'(x) = \frac{1}{j'(y)}$ (7)

Доказательство:

Если *f(x)* дифференцируема, то она непрерывна (теор.3,§ 28),

тогда при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, § 27.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{j'(y)},$$

что и требовалось доказать.

8) Производная сложной функции:

Производная сложной функции равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

То есть если $y = f[u(x)]$, тогда $y' = f'(u)u'(x)$.

Доказательство:

Если функция *u(x)* дифференцируема, то она непрерывна (по теор.3,§ 28), тогда по теореме § 27 имеем: при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta u}{\Delta u} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)u'(x) \quad (8)$$

9) Производная функции, заданной параметрически:

Если функция *y=f(x)* задана в параметрическом виде, то есть $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, где *t* – параметр.

Тогда $f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (9)

Если из второго уранения *t* выразить в явном виде через *x (t=t(x))* и подставить в первое, получим *y=y(t(x)),* поэтому, согласно 8-ому пункту, получаем

$y' = y'(t)t'(x)$ (*)

Функции *t=t(x)* и *x=x(t)* взаимно обратные , поэтому их производные связаны соотношением

$t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$ (**)

Подставляем (**) в (*) получаем $f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, что и требовалось доказать.

§ 30 ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ.

1) $\left(x^{a}\right)' = ax^{a-1}$

2) $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$

3) $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

4) $\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x}\log_{a} e$

5) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

6) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

7) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

8) $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^{2} x}$

9) $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^{2} x}$

10) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

11) $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

12) $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^{2}}$

13) $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$

Доказательство:

2) $\underline{\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a}$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$$

$$a^{\Delta x}-1=\left|e^{\ln a}=a\right|=e^{\Delta x\ln a}-1\sim\Delta x\ln a$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$$

3) $\left(e^x\right)'=e^x$

как частный случай 2)

4) $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Обозначим *z=x/Dx*, тогда при *Dx®0* *z®¥*

Таким образом $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x}\lim\limits_{z\to\infty}\log_a\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z = \dfrac{1}{x}\log_a\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z = \dfrac{1}{x}\log_a e$

5) $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$

Как частный случай 4)

6) $\left(\sin x\right)'=\cos x$

$$\Delta y=y\left(x+\Delta x\right)-y\left(x\right)=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} Cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{Sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}=\cos x$$

7) $\left(\cos x\right)'=-\sin x$

$$\cos x=\sin\left(\frac{p}{2}-x\right)=\sin u\ ,\ u=\frac{p}{2}-x$$

$$\left(\cos x\right)' = \left(\sin u\right)'u' = \cos\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(-1\right)=-\sin x$$

8) $\left(tgx\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9) $ctgx = -\frac{1}{\sin^2 x}$

аналогично 8)

10) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \quad , \quad y = \arcsin x \ , \quad x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = arccosx \ , \quad x = cosy$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = arctgx \ , \quad x = tgy$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

13) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$y = arcctgx \ , \quad x = ctgy$

$$(arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+ctg^2 x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Гиперболические функции.

$y = shx$ - гиперболический синус $\qquad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = chx$ - гиперболический косинус $\qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = thx$ - гиперболический тангенс $\qquad thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Производные

1) $(shx)' = chx$

2) $(chx)' = shx$

3) $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

4) $(cthx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ПРИМЕРЫ

1. **Производная сложной функции**

$$[u(v(x))]' = u'(v)v'(x)$$

$$y = \sin^3(\cos 3x)$$

$$y' = 3\sin^2(\cos 3x)\cos(\cos 3x)(-\sin 3x)3$$

2. **Производная произведения**

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$y = \sin^2 x e^{tgx}$$

$$y' = (\sin^2 x)' e^{tgx} + (e^{tgx})' \sin^2 x = 2\sin x \cos x e^{tgx} + e^{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}\sin^2 x = (\sin 2x + tg^2 x)e^{tgx}$$

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot \cos^2 x - 2\cos x \cdot (\sin x)\sin 2x}{\cos^4 x}$$

§ 31 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

ОПР 1

Дифференциалом функции *y=f(x)* называется величина, обозначаемая как dy и равная произведению этой функции на приращение независимого аргумента.

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 (аналитический смысл дифференциала)
Дифференциал есть главная часть приращения функции, то есть $dy \approx \Delta y$.

Доказательство:

Если функция *f(x)* дифференцируема, значит она непрерывна (по теор.3,§ 28), что в свою очередь означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$,

то есть отсюда видно, что Δy является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.

В то же время из формулы (1) видно, что при $\Delta x \to 0$, $dy \to 0$, то есть dy также является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.

Сравним эти две бесконечно малые функции:

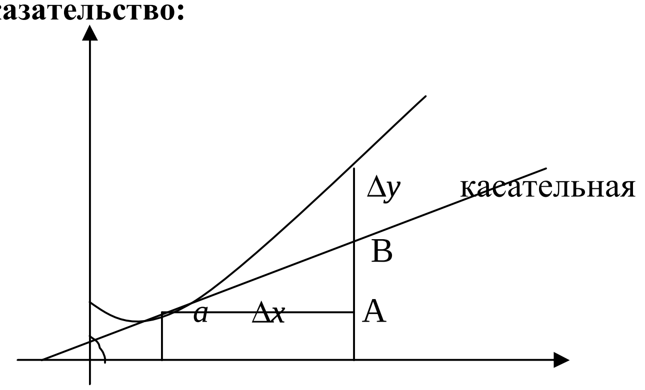
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = (1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

То есть Δy и dy - эквивалентные бесконечно малые функции ($dy \sim \Delta y$). Практически это означает что для небольших значений Δx можно записать приближённое равенство $dy \approx \Delta y$, и тем точнее это равенство, чем меньше Δx.

<u>ТЕОРЕМА 2</u> (геометрический смысл дифференциала)

Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику данной функции.

Доказательство:



$AB = \Delta x tg a$, $tg a = f'(x)$

$AB = f'(x)\Delta x$, $dy = AB$

AB - приращение ординаты касательной.

<u>ТЕОРЕМА 3</u>

Дифференциал независимой переменной равен её приращению,

$$dx = \Delta x \qquad (2)$$

Доказательство:

Рассмотрим простейший тип функции *y=x* . Найдём дифференциал:

$dy = (x)' \Delta x = 1\Delta x = \Delta x$ (*)

С другой стороны имеем равенство: $dy = dx$ (**)

Сравнивая (*) с (**) получаем (2).

Следствие 1:

Подставляя (2) в (1) получаем, что дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной, то есть

$$dy = f'(x)dx \qquad (3)$$

Следствие 2:

Производная функции равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad (4)$$

Замечание: Дифференциал обладает всеми теми свойствами, что и производная.

Примеры:

$d(u \pm v) = du \pm dv$

$d(uv) = udv + vdu$

§ 32 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Очевидно, что в общем случае производная функции $f'(x)$ представляет из себя какую-то функцию, от которой, в свою очередь, можно взять ещё раз производную, то есть выполнить следующую операцию $(f'(x))'$.

ОПР 1

Первая производная от производной первого порядка называется **производной второго порядка** или **второй производной** и обозначается $f''(x)$.

ОПР 2

Первая производная от производной $(n-1)$-ого порядка называется **производной *n*-ого порядка** и обозначается $f^n(x)$.

ПРИМЕР

$y = x^5$

$y' = 5x^4, y'' = 20x^3, y''' = 60x^2, y^{(4)} = 120x, y^{(5)} = 120, y^{(6)} = 0$

§ 33 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Дифференциал функции dy в общем случае может рассматриваться как некоторая функция от *x*, поэтому от него можно ещё раз найти дифференциал, то есть $d(dy)$.

При этом надо иметь ввиду, что Δx есть величина, не зависящая от *x*, а зависящая от того, какой мы ее назначим.

<u>ОПР 1</u>

Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка и обозначается d^2y, то есть $d^2y = d(dy)$.

<u>ТЕОРЕМА 1</u> (о дифференциале второго порядка)

$$d^2y = f''(x)\Delta x^2 \qquad (1)$$

Доказательство:

$$d^2y = опр1 = d(dy) = (1), \S 31 = d(f'(x)\Delta x) = (1), \S 31 = (f'(x)\Delta x)'\Delta x = f''(x)\Delta x^2,$$

Примечание: $f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

<u>ОПР 2</u>

Дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка называется дифференциалом n-ого порядка.

<u>ТЕОРЕМА 2</u> (о дифференциале *n*-ого порядка)

$$d^ny = f^n(x)\Delta x^n \qquad (2)$$

Доказательство:

$$d^3y = d(d^2y) = теор.1 = d(f''(x)\Delta x^2) = (1), \S 31 = (f''(x)\Delta x^2)'\Delta x = f'''(x)\Delta x^3$$

$d^4y = d(d^3y) = \ldots$

§ 34 ТЕОРЕМА РОЛЛЯ.

<u>ТЕОРЕМА</u> Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, а также имеет на концах отрезка одинаковые значения $(f(a) = f(b))$, то внутри этого отрезка существует хотя бы одна точка $x=c$, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство:

Не рассматриваем случай, когда функция на отрезке $[a,b]$ постоянна (в этом случае $f'(x) = 0$ на всём отрезке). Если функция меняется в пределах отрезка и она непрерывна, то очевидно, что в какой-то точке внутри отрезка она примет своё максимальное (M) или минимальное (m) значения.

Пусть в точке $x=c$ функция принимает своё максимальное значение, то есть $f(c)=M$, тогда $f(c+\Delta x) - f(c) \le 0$ при любом Δx, как положительном, так и отрицательном. Тогда

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad , \quad \text{при } \Delta x > 0$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0 \quad , \text{ при } \Delta x<0$$

Перейдём к пределу, при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leq 0 \text{ , при } \Delta x>0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geq 0 \text{ , при } \Delta x<0$$

Так как функция во всех внутренних точках отрезка дифференцируема (включая точку *c*), то последние два неравенства совместны только в том случае, когда $f'(c)=0$,

что и требовалось доказать.

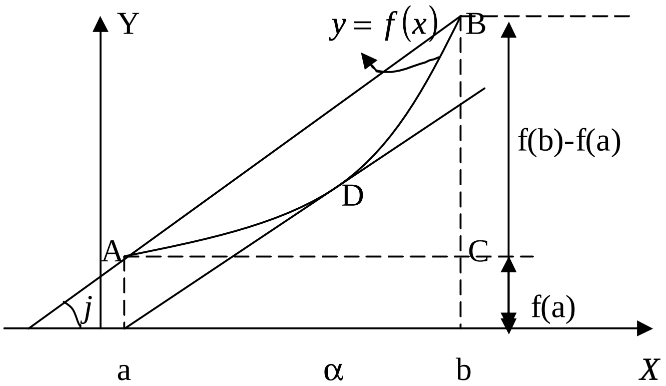
§ 35 ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ.

ТЕОРЕМА

Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b]* и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри этого отрезка существует хотя бы одна точка $x=\alpha$, что

$$f(b)-f(a)=f'(\alpha)(b-a) \qquad (1)$$

Доказательство:



Из ΔABC: $\qquad tg\,j=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (*)$

Проведём касательную к графику функции касательную таким образом, чтобы она была наклонена под углом φ. Обозначим полученную точку касания как D и её абсциссу как α, тогда очевидно, что $f'(\alpha)=tg\,j \qquad (**)$

Подставляем (*) в (**), получим: $f'(\alpha)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, откуда получается (1).

§ 36 ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.

ТЕОРЕМА Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы в точке $x=a$ и некоторой её окрестности. Пусть также обе эти функции равны нулю в этой точке $f_1(a)=f_2(a)=0$.

Тогда: если существует предел отношения производных этих функций при $x \to a$, то существует и предел отношения самих функций при $x \to a$, причём

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} \qquad (1)$$

Примечание:

Эта теорема известна, как **правило Лопиталя**:

Предел отношения функции равен пределу отношения их производных. (для практики).

Доказательство:

Пусть существует

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f_1(a+\Delta x) - f_1(a)}{\Delta x}}{\dfrac{f_2(a+\Delta x) - f_2(a)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(a+\Delta x)}{f_2(a+\Delta x)}$$

Обозначим $a + \Delta x = x$, тогда при $\Delta x \to 0, x \to a$, следовательно $= \lim_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Ч.т.д.

<u>ПРИМЕР 1</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg 5x}{tgx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{5/\cos^2 5x}{1/\cos^2 x} = 5$$

Следствие 1:

Доказанная теорема используется для раскрытия не только неопределённости $\left(\frac{0}{0}\right)$, но и для неопределённостей $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

<u>ПРИМЕР 2</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Следствие 2:

Если после 1-ого применения правила Лопиталя неопределённость сохраняется, то относительно производных можно ещё раз использовать правило Лопиталя.

<u>ПРИМЕР 3</u>

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Следствие 3:

Правило Лопиталя после предварительных преобразований может быть так же использовано для раскрытия следующих неопределённостей: $\left[0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty-\infty\right]$.

ПРИМЕР 4

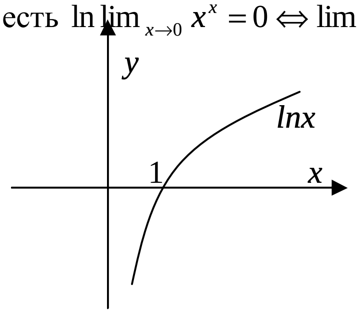
$$\lim_{x\to 0} ctgx\cdot\arcsin x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{tgx} = \lim_{x\to 0}\frac{1/\sqrt{1-x^2}}{1/\cos^2 x} = 1$$

ПРИМЕР 5

$\lim_{x\to 0} x^x = (0^0) = ?$

$$\ln\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0}\ln x^x = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0,$$

то есть $\ln\lim_{x\to 0} x^x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^x = 1$



§ 37 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.

ТЕОРЕМА

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ все производные до *n*-ой производной включительно, то существует такой многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n \qquad (1)\ ,$$

что $f(a) = P_n(a), f'(a) = P_n'(a), f''(a) = P_n''(a), \ldots, f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a) \quad (2)$

Доказательство:

Докажем существование многочлена (1) путём нахождения его неизвестных коэффициентов, используя известные значения функции, а так же её производных в точке $x = a$, то есть $f(a), f'(a), f''(a), \ldots$

Используя 1-ое равенство в строчке (2) получим $A_0 = f(a) \quad (3)$.

Продифференцируем многочлен (1):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \ldots + nA_n(x-a)^{n-1}.$$

Используя второе равенство строчки (2), получим:

$$A_1 = f'(a) \qquad (4)$$

Снова дифференцируем

$$P_n'' = 2A_2 + 6A_3(x-a) + \ldots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2},$$

используя 3-е равенство строчки (2)

$$2A_2 = f''(a) \Leftrightarrow A_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!} \qquad (5)$$

Еще раз дифференцируем

$$P'''_n = 6A_3 + \ldots + A_n n(n-1)(n-2)(x-a)$$

Используя следующее равенство строчки (2):

$$6A_3 = f'''(a); \quad A_3 = \frac{f'''(a)}{6} = \frac{f'''(a)}{3!} \qquad (6)$$

…

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (7)$$

Подставляя (3)-(7) в (1), получим:

$$P_n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (8)$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1:

Многочлен (8) обладает замечательным свойством в достаточно малой окрестности точки $x = a$ давать значения, близкие к значениям функции $f(x)$ в этой окрестности, то есть выполняется приближённое равенство

$$P_n(x) \approx f(x) \qquad (9)$$

И тем точнее равенство (9), чем выше степень многочлена (8) и чем меньше окрестность точки a.

Обозначим разность между значением функции $f(x)$ и многочленом $P_n(x)$ как $R_n(x)$:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) \qquad (10).$$

Отсюда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, и подставляя сюда (8) получим:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \qquad (11)$$

(11) называется формулой Тейлора, которая позволяет представить данную функцию $f(x)$ в виде суммы степенных функций. При этом $R_n(x)$ называется остаточным членом.

Следствие 2:

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=a$ n+1 раз, то остаточный член $R_n(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$ высшего порядка, чем последний член многочлена (8). То есть:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}=\frac{1}{f^{(n)}(a)}\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{\frac{(x-a)^n}{n!}}=$$ применяя правило Лопиталя n раз, получим

$$=\frac{1}{f^{(n)}(a)}\lim_{x\to a}R_n^{(n)}(x)=$$ далее нетрудно показать, что =0.

(после n-кратного дифференцирования $(x-a)^n$ превращается в $n!$)

Следствие 3: (оценка остаточного члена)

В достаточно малой окрестности точки x=a абсолютная величина остаточного члена $R_n(x)$ не превосходит абсолютной величины последнего члена многочлена (8):

$$|R_n(x)|\le\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right| \qquad (12)$$

(12) представляет собой оценку остаточного члена формулы Тейлора.

Разложение приращения функции Δy по формуле Тейлора.

Обозначим $\Delta x=(x-a)$, $x=a+\Delta x$ подставим в (11):

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\frac{f'(a)}{1!}\Delta x+\frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n+R_n$$

Учитывая, что $f(a+\Delta x)-f(a)=\Delta y$ (приращение функции в точке a) и принимая во внимание определение дифференциалов 1-ого и высшего порядков, получаем:

$$\Delta y=\frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\frac{d^3y}{3!}+\ldots+\frac{d^{(n)}y}{n!}+R_n \qquad (13)$$

Примечание:

Из теоремы 1, §31 вытекает, что в первом приближении выполняется $\Delta y\approx dy$. Если нужно получить более точное равенство, то в соответствии с (13) необходимо учитывать также дифференциалы более высших порядков.

Примеры разложения функции по формуле Тейлора.

1) $\underline{y=\sin x}$, $\quad a=0$

$y'=\cos x$, $\quad y'(0)=1$

$y''=-\sin x$, $\quad y''(0)=0$

$$y''' = -\cos x\ , \quad y'''(0) = -1$$

$$y^{(4)} = \sin x\ , \quad y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)} = \cos x\ , \quad y^{(5)}(0) = 1$$

…

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + R_n(x)$$

Вывод: Формула Тейлора для нечётной функции содержит только нечётные степени по *x*.

2) $\underline{y = \cos x}$, $\quad a = 0$, $\quad \cos(0) = 1$

$$y' = -\sin x\ , \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = -\cos x\ , \quad y''(0) = -1$$

$$y''' = \sin x\ , \quad y'''(0) = 0$$

$$y^{(4)} = \cos x\ , \quad y^{(4)}(0) = 1$$

$$y^{(5)} = -\sin x\ , \quad y^{(5)}(0) = 0$$

$$y^{(6)} = -\cos x\ , \quad y^{(6)}(0) = -1$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + .. + R_n(x)$$

Вывод: Формула Тейлора для чётных функций содержит только чётные степени по *x*.

3) $\underline{y = e^x}$, $\ a = 0$

$$y = y' = y'' = \ldots = e^x$$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, подставим в (11)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

§ 38 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ.

ТЕОРЕМА 1 (признаки монотонности)

Те интервалы, в каждой точке которых $f'(x) > 0$, являются **интервалами возрастания**, а те интервалы, в каждой точке которых $f'(x) < 0$ - **интервалами убывания**.

Доказательство:

Пусть *f(x)* дифференцируема на некотором интервале. Внутри этого интервала возьмём две производные точки x_1 и x_2. При этом $x_1 < x_2$, тогда по формуле Лагранжа (§35) имеем:

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(a)$, где $x_1 < a < x_2$, тогда

при $f'(x) > 0$ получим, что $f(x_2) > f(x_1)$ -т.е. функция возрастает ;

при $f'(x) < 0$ получим, что $f(x_2) > f(x_1)$ - т.е. функция убывает, ч.т.д.

ОПР 1

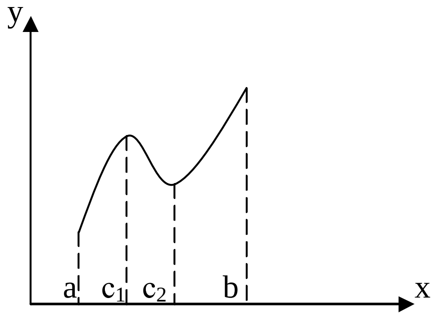
Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x=c$ **максимум**, если можно указать такую окрестность точки $x=c$, что для всех x из этой окрестности $(x \neq c)$ справедливо неравенство $f(c) > f(x)$.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x=c$ **минимум**, если можно указать такую окрестность точки $x=c$, что для всех x из этой окрестности $(x \neq c)$ справедливо неравенство $f(c) < f(x)$.

Определённые таким образом максимумы и минимумы называются локальными экстремумами.

Примечание:

Необходимо различать локальный экстремум и наибольшее/наименьшее значение функции на отрезке.

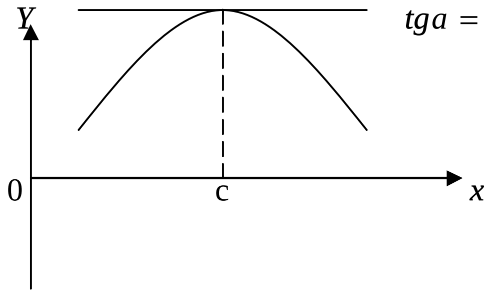


В точках $x=c_1$ и $x=c_2$ – локальные экстремумы, а наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке в точках b и a.

ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие локального экстремума)

Если дифференцируемая в точке $x=c$ функция имеет в этой точке экстремум, то её производная в этой точке $f'(c) = 0$.

Доказательство:



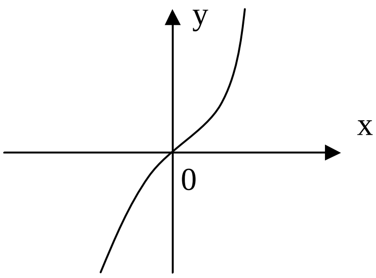
$tga = f'(c) = 0$

Во-первых, доказательство вытекает из теоремы Роля, §34, а во-вторых, это вытекает из геометрического смысла производной, так как очевидно, что в точке экстремума касательная расположена горизонтально (то есть $tg a = 0$), поэтому и $f'(c) = 0$.

Примечание:

Данное условие является необходимым, но не достаточным, то есть наличие данного условия ещё не гарантирует наличие экстремума.

ПРИМЕР



Кубическая парабола $y = x^3$

Найдём $y' = 3x^2$

При $x = 0,\ \ y'(0) = 0,$ однако никакого экстремума в точке x=0 нет.

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия экстремума по 1-ой производной)

Если при переходе через точку x=c первая производная функции меняет знак с + на - , то данная точка является **точкой максимума.**

$$\left.\begin{array}{l} x < c, \quad f'(x) > 0 \\ x > c, \quad f'(x) < 0 \end{array}\right\} \text{ **условия максимума (max)** }$$

Если при переходе через точку x=c первая производная функции меняет знак с - на + , то данная точка является **точкой минимума.**

$$\left.\begin{array}{l} x < c, \quad f'(x) > 0 \\ x > c, \quad f'(x) < 0 \end{array}\right\} \text{ **условия минимума (min)** }$$

Доказательство:

Докажем только для случая max.

Возьмём $x_1 < c$ и воспользуемся формулой Лагранжа (§35):

$f(c) - f(x_1) = (c - x_1) f'(a_1),$ где $x_1 < a < c$,

так как по условию теоремы $f'(a_1) > 0$, то

$f(c) > f(x_1)$ (*)

Возьмём $x_2 > c$ и запишем формулу Лагранжа для этого случая:

$f(x_2) - f(c) = (x_2 - c) f'(a_2)$, где $c < a_2 < x_2$,

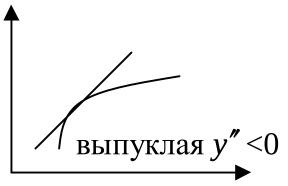
а по условию теоремы $f'(a_2) < 0$, так как $a_2 > c$, следовательно

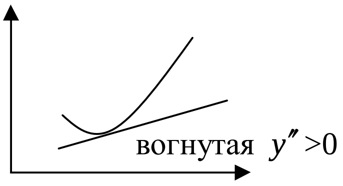
$f(c) > f(x)$ (**)

Сравнивая (*) и (**), на основании определения 1 заключаем, что точка $x=c$ является точкой максимума. Ч.т.д.

ОПР 2

Кривая называется **выпуклой** если располагается под касательной.





Кривая **вогнутая** если она располагается над касательной.

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие выпуклости или вогнутости)

Если во всех точках некоторого интервала вторая производная положительна, то график функции на этом интервале вогнутый.

Если во всех точках некоторого интервала вторая производная отрицательна, то график функции на этом интервале выпуклый.

ОПР 3

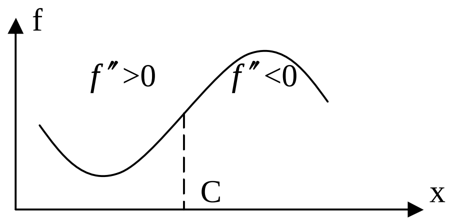
Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой называется **точкой перегиба.**

ТЕОРЕМА 5 (необходимое условие точки перегиба)

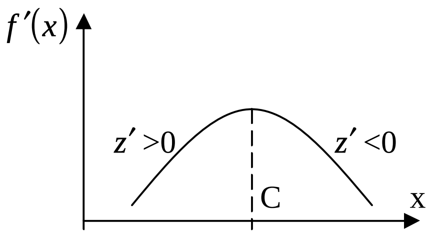
Если график дважды дифференцируемой функции имеет в некоторой точке $x=c$ точку перегиба, то вторая производная этой функции в данной точке $f''(c)=0$.

Доказательство:

Рассмотрим следующий случай, используя теорему 4.



Рассмотрим функцию z= $f'(x)$.



Таким образом, очевидно, что в точке C по теореме 3 функция $z = f'(x)$ имеет максимум.

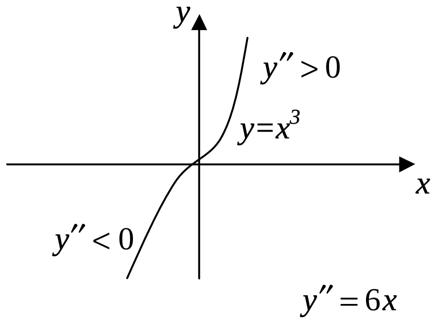
По теореме 2 это означает, что $(f'(c))' = 0$, т.е. $f''(c) = 0$. Ч.т.д.

<u>ТЕОРЕМА 6</u> (достаточное условие точки перегиба)

Если при переходе через точку $x=c$ вторая производная функции меняет знак, то эта точка является **точкой перегиба**.

Доказательство:

Непосредственно вытекает из теоремы 4 и определения 3.



При $x = 0$, $y'' = 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ имеется точка перегиба.

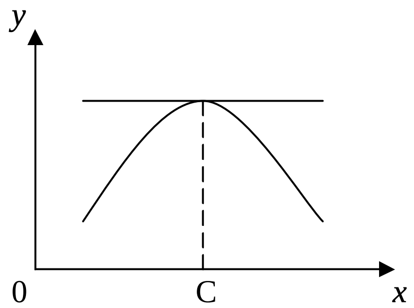
<u>ТЕОРЕМА 7</u> (достаточные условия точки экстремума по второй производной)

Если в точке $x=c$ выполняются одновременно условия $f'(c) = 0, f''(c) < 0$, то эта точка является **точкой максимума**.

Если в точке $x=c$ выполняются одновременно условия $f'(c) = 0, f''(c) > 0$, то эта точка является **точкой минимума**.

Доказательство:

Рассмотрим случай максимума : $f''(x) < 0$ означает, что кривая лежит под касательной.



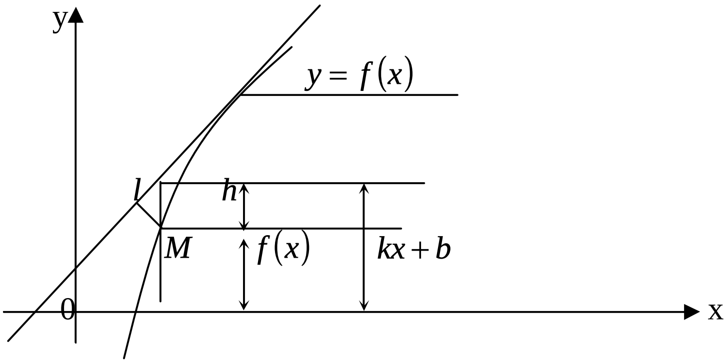
А так как $f'(c) = 0$, то эта касательная проходит горизонтально. Поэтому из геометрических соображений очевидно, что данная точка является точкой максимума.

Случай минимума доказывается аналогично.

<u>ОПР 4</u>

Пусть прямая L располагается вблизи графика функции $y = f(x)$. l –длина перпендикуляра, опущенного из текущей точки М на прямую L. Тогда прямая L

называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $l \to 0$, когда М удаляется в бесконечность.



<u>ТЕОРЕМА 8</u> (о параметрах асимптоты)

Если прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$, то

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (1)$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] \qquad (2)$$

Доказательство:

Согласно Опр.4 $\lim_{x\to\infty} l = 0$

Тогда очевидно, что $\lim_{x\to\infty} h = 0$ (а)

Также очевидно, что $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to\infty} h = 0$, т.е. $\lim_{x\leftarrow\infty} \frac{h}{x} = 0$ (б)

Из рисунка видно, что

$h = kx + b - f(x)$ (в)

Подставим (в) в (б):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{kx + b - f(x)}{x} = k + \lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k - \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

следовательно $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

Подставим (в) в (а):

$$\lim_{x\to\infty} [kx + b - f(x)] = 0$$

$b - \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = 0$ или $b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$ Ч.т.д.

Следствие:

Если по формуле (1) получилось, что $k = 0$, а b - конечное число, то

$$y = b \qquad (3)$$

то есть получается уравнение горизонтальной асимптоты.

Замечание: Формулы (1) и (2) годятся только для наклонных и горизонтальных асимптот.

Уравнение вертикальной асимптоты $x=a$. Признаком вертикальной асимптоты является бесконечный разрыв функции в точке $x=a$, то есть должно выполняться одно из следующих условий: $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$.

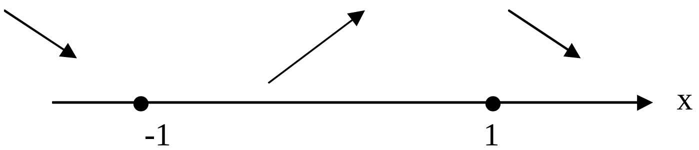
Порядок исследования функций.

1) Область определения функции. Точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2) Чётность – нечётность или периодичность функции.
3) Интервалы монотонности.
4) Экстремумы.
5) Интервалы выпуклости – вогнутости, точки перегиба.
6) Наклонные и горизонтальные асимптоты.
7) Нахождение точек пересечения графика с осями координат.
8) Построение графика (используя только характерные точки, найденные в предыдущих пунктах).

<u>ПРИМЕР 1</u>

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

1) $(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва и вертикальных асимптот нет.
2) Нечётная.
3) $y'=\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)'=\dfrac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)}=\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$



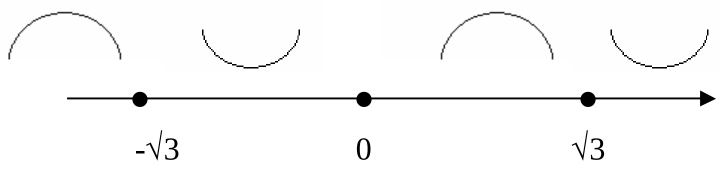
4) Необходимое условие: $y'=0$. Достаточные условия см. п.3.

$$x_1=-1,\ y_{\min}=-\frac{1}{2},\qquad x_2=1,\ y_{\max}=\frac{1}{2}$$

5) $y''=\dfrac{(1-x^2)'(1+x^2)^2-((1+x^2)^2)'(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$y''=0$ - необходимое условие точки перегиба

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = -\sqrt{3} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \sqrt{3} \end{array}\right\}$$ - точка перегиба



6) $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x(1+x^2)} = 0$

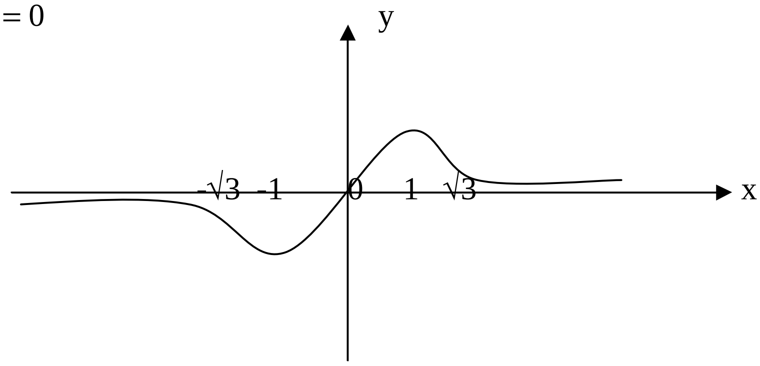
$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = 0$

$y = 0$ - уравнение горизонтальной асимптоты,

то есть ось x является горизонтальной асимптотой.

7) $x = 0, y = 0$

8)



ПРИМЕР 2

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

1) $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$

$\lim_{x\to 1+0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to 1-0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = -\infty$

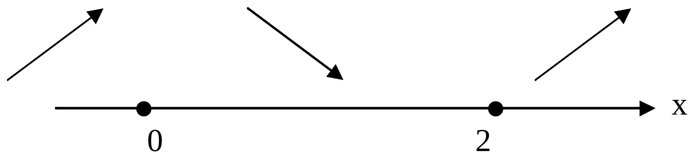
$x = 1$ - вертикальная асимптота.

2) Непериодическая.

3) Интервалы монотонности:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 2$



4) $x_{\max}=0 \qquad y_{\max}=-2$

$x_{\min}=2 \qquad y_{\min}=2$

5) $y''=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'(x-1)^2-\left((x-1)^2\right)'\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

$y''\neq 0$ - точек перегиба нет.

Интервалы выпуклости и вогнутости разделяются вертикальной асимптотой.

6) $k=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=1$

$b=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-x+2}{x-1}=-1$

$y=x-1$ - уравнение наклонной асимптоты

7) $x=0, y=-2$

$x^2-2x+2=0$

$D=4-8<0$

8)