АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 12 ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ .

ОПР 1
Плоскостью будем называть поверхность обладающую тем свойством , что если две точки прямой принадлежат плоскости ,то и все точки прямой принадлежат данной плоскости .

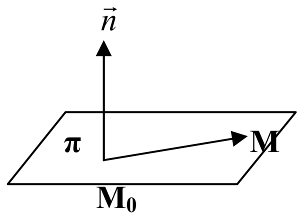
ОПР 2
Вектор $\vec{n} \perp$ ко всякой прямой ,лежащей на данной плоскости, называется **нормальным вектором данной плоскости.**

ТЕОРЕМА (общее уравнение плоскости)
В Декартовой системе координат любая плоскость описывается линейным уравнением следующего вида :

Ax + By + Cz + D = 0 **(1)**

Где A,B,C – координаты нормального вектора данной плоскости , т.е.: $\vec{n} = \{A, B, C\}$

Доказательство:



Возьмем на π 2 точки: $M_0(x_0,y_0,z_0)$- фиксированная точка плоскости - и $M(x,y,z)$- текущая точка

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \qquad \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$

Раскрывая скобки , и введя обозначение

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ **(2)**,

получим уравнение (1), ЧТД

D характеризует расстояние от начала координат до данной плоскости, т.е. когда D=0 , плоскость походит через начало координат.

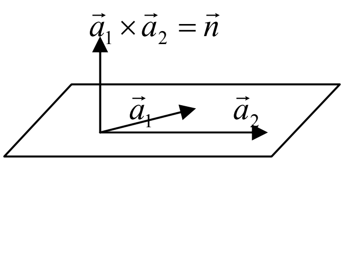
Примечание:
Координаты любой точки, лежащей на данной плоскости, должны удовлетворять уравнению (1). Т.е. при подстановке координат точек в уравнение (1), данное уравнение должно обращаться в тождество.

Пример. № 917

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0(3.4.-5) параллельно векторам $\vec{a}_1 = \{3;1;-1\}$ и $\vec{a}_2 = \{1;-2;-1\}$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \perp \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \perp \vec{a}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \perp \pi$$

Векторное произведение можно взять за нормальный вектор данной плоскости



$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$$

$\vec{n} = \{-1;-4;-7\}$, D = -3+16-35=-16

Итого : -x - 4y - 7z – 16 = 0

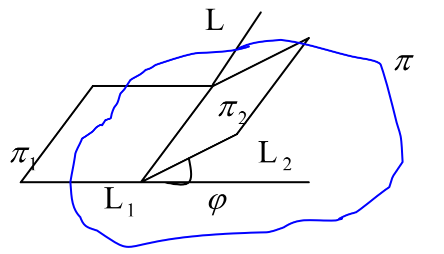
§13 УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ.

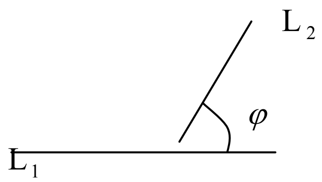
ОПР 1

Пусть даны две плоскости π_1 и π_2, линию пересечения которых обозначим L. Перпендикулярно L проведём плоскость π, тогда получим две линии пересечения.

$L_1 = \pi \cap \pi_1$

$L_2 = \pi \cap \pi_2$ Угол между L_1 и L_2 называется углом между плоскостями π_1, π_2.

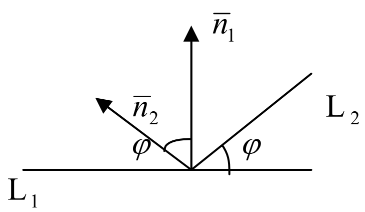




ТЕОРЕМА 1.

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

Доказательство: вытекает из рисунка.



ТЕОРЕМА 2.

В декартовой системе координат, угол между плоскостями

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (1)$$

Доказательство:

На основании теоремы 1 имеем $\cos(\pi_1 \hat{} \pi_2) = \cos(\bar{n}_1 \hat{} \bar{n}_2)$, а так как $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, то подставляя координаты в (6) §9 получим (1), что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3. **(условие перпендикулярности плоскостей)**

В декартовой системе координат условие перпендикулярности плоскостей

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

записывается следующим образом

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (2)

Доказательство:

$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Rightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4. **(условие $||$-ти плоскостей)**

В декартовой системе координат условие $\pi_1 || \pi_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda \qquad (3)$$

Доказательство:

$\pi_1 || \pi_2 \Rightarrow \overline{n}_1 || \overline{n}_2 \Rightarrow$ §9, т.10 (3)

ТЕОРЕМА 5. **(условие совпадения плоскостей)**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = \lambda \qquad (4)$$

Доказательство:

Для совпадающих плоскостей, так же как и для параллельных очевидно выполняется (3). Осталось только доказать, что $\frac{D_1}{D_2} = \lambda, D_1 = \lambda D_2$.

Из (3) вытекает

$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2$ (а)

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1 \Rightarrow$ *прим.* §12 $\Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 \equiv 0$

$D_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) = -\lambda\,(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0)$ (б)

Если плоскости π_1 и π_2 совпадает, то $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_2$, тогда

$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 \equiv 0$

$D_2 = -(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0)$ (в)

Сравнивая (б) и (в) получаем, что $D_1 = \lambda D_2$. Что и требовалось доказать.

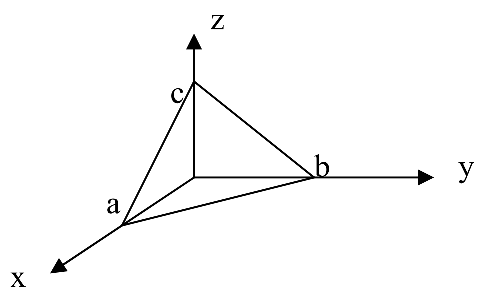
§14 РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ.

1) ***Общее уравнение плоскости*** $Ax + By + Cz + D = 0$ (1)

$\overline{n} = \{A.B.C\}$ - нормальный вектор.

2) ***Уравнение плоскости в отрезках***

Пусть плоскость пересекает оси в точках $(a,0,0);(0,b,0);(0,0,c)$



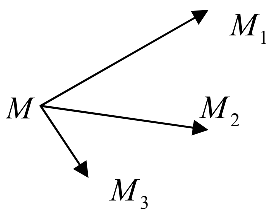
Подставляя поочерёдно координаты этих точек в общее уравнение плоскости (1) получим

$$Aa + B0 + C0 + D \equiv 0 \Rightarrow A = -\frac{D}{a}$$
$$A0 + Bb + C0 + D \equiv 0 \Rightarrow B = -\frac{D}{b}$$
$$A0 + B0 + Cc + D \equiv 0 \Rightarrow C = -\frac{D}{c}$$

Подставляя A,B,C в уравнение (1) получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2)$$

3)***Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки***.
Необходимо записать уравнение плоскости, проходящей через $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ Данное уравнение плоскости получается как условие компланарности 3-х векторов.



$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \qquad M(x, y, z)\text{-текущая точка плоскости}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

4)***Нормальное уравнение плоскости*** имеет вид

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - \rho = 0 \qquad (4)$$

Получается из общего уравнения (1) путем его деления на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Знак берётся противоположным знаку свободного члена D.
Т.о. имеем

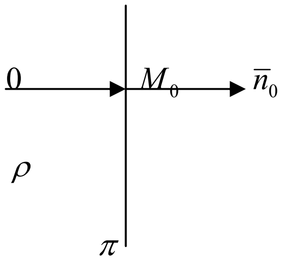
$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ;\ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ;\ \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ;$$

$$\rho = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Видно, что $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma -$ являются направляющими косинусами нормального вектора плоскости, или их можно рассматривать как координаты единичного нормального вектора $\overline{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

<u>ТЕОРЕМА 1</u> (расстояние от начала координат до плоскости.)
Член ρ уравнения (4) имеет смысл расстояния от начала координат до данной плоскости.

Доказательство:



$\left|\overrightarrow{OM}_0\right| \,|\,|\, \overline{n}_0$

Очевидно, что $\rho = \left|\overrightarrow{OM}_0\right|$, а если $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$, то тогда $\overrightarrow{OM}_0(x_0, y_0, z_0)$

Скалярное произведение двух векторов $\overrightarrow{OM_0} \cdot \overline{n}_0 = \left|\overrightarrow{OM}_0\right| |\overline{n}_0| \cos 0 = \left|\overrightarrow{OM}_0\right|$ (*)

С другой стороны $\overrightarrow{OM_0} \cdot \overline{n}_0 = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma$ (**)

Сравнивая (*) и (**), получаем

$\left|\overrightarrow{OM}_0\right| = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma$ (a)

Т.к. $M_0 \in \pi \Rightarrow x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \equiv 0$ (б)

p= $x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma$

сравнивая (а) и (б) получаем p= $\left|\overrightarrow{OM}_0\right|$, что и требовалось доказать.

<u>ТЕОРЕМА 2.</u> (расстояние от данной точки до плоскости.)

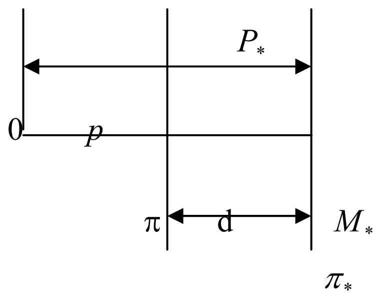
Расстояние d от точки $\mathrm{M}_*(x_*, y_*, z_*)$ до плоскости π : $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

определяется следующим образом

d= $|x_* \cos\alpha + y_* \cos\beta + z_* \cos\gamma - p|$ (5)

Доказательство:

Через точку M_* проведем плоскость $\pi_* \,|\,|\, \pi$, нормальные векторы которых имеют одни и те же направляющие косинусы. Поэтому уравнение π_* запишется следующим образом:



$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_* = 0$, т.к. $p_* = p + d \Rightarrow$

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (p + d) = 0$

Т.к. $M_* \in \pi_* \Rightarrow$ Примеч.§ 12

$x_* \cdot \cos\alpha + y_* \cdot \cos\beta + z_* \cdot \cos\gamma - (p + d) \equiv 0$

Отсюда:

$d = x_* \cdot \cos\alpha + y_* \cdot \cos\beta + z_* \cdot \cos\gamma - p$

Мы рассматривали вариант , когда M_* и π_* расположены по одну сторону от начала координат и при этом M_* расположена дальше. Другие варианты их взаимного расположения требуют введения знака |……|, ЧТД.

<u>ПРИМЕР</u>

Найти расстояние от точки M_* (1;2;3) до плоскости , проходящей через 3 заданные точки $M_1(-1;2;-1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(-2;1;-2)$.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(x+1)1-(y-2)(-1)+(z+1)(-2)=0

x+y-2z-3=0

$\frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{2z}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} = 0$ подставим координаты точки M_*

$$d = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6}$$

§15 РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ.

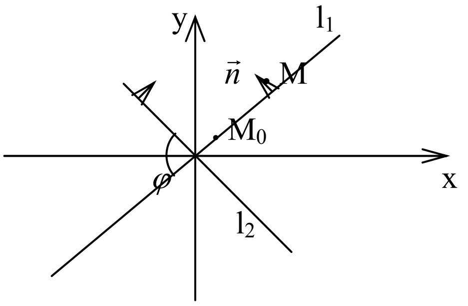
1) *Общее уравнение прямой .*

$$Ax + By + C = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$\vec{n} = \{A; B\}$ - нормальный вектор прямой.

Доказательство:

$M_0(x_0; y_0)$ - Фиксированная точка прямой $M(x; y)$ Текущая т. прямой .



$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = A(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow$

$Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$ **(1a)**

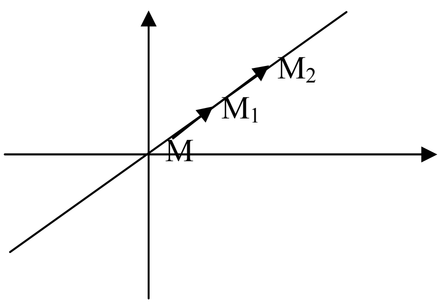
Угол между прямыми

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Если $L_1 \| L_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

Если $L_1 \perp L_2 \Rightarrow A_1A_2 = B_1B_2 = 0$

2) *Уравнение прямой проходящей через 2 заданные точки*



$M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$- заданные точки.

$M(x; y)$ - текущая точка прямой.

Уравнение данной прямой получается как условие коллинеарности 2-х векторов :

$\overrightarrow{M_1M_2} \| \overrightarrow{M_1M}$ (координат. пропорциональны)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \textbf{(2)}$$

3) Нормальное уравнение прямой

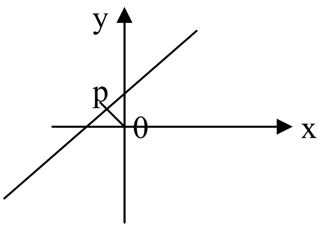
$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Получаем из общего уравнения (1) путем его деления на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$. При этом знак берется противоположно знаку С . Тогда

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

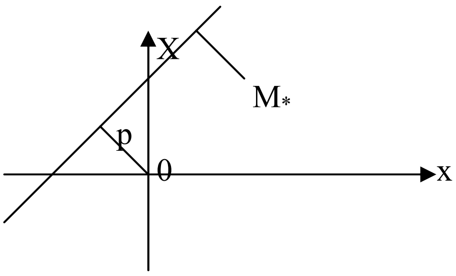
Где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ - направляющие косинусы нормального вектора прямой, либо это координаты единичного нормального вектора прямой $\vec{n}_0 = \{\cos\alpha;\cos\beta\}$

Геометрический смысл p - расстояние от начала координат до прямой .



Доказательство:
аналогично п.4 § 14

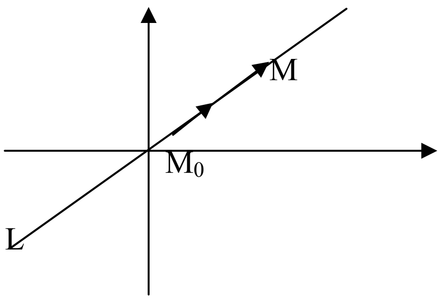
Расстояние от данной точки M_* до прямой .



d=$\left|x_*\cos\alpha + y_*\cos\beta - p\right|$

Доказательство:
аналогично § 14

4) Каноническое уравнение прямой



$M_0(x_0;y_0)$-фиксированная т. прямой

$\vec{q} = \{l;m\}$

Вектор $\vec{q}$ параллелен или совпадает с данной прямой , и поэтому он называется **направляющим вектором прямой**

$M(x;y)$-текущая точка.

Строим $\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0;y-y_0\}$

Каноническое уравнение прямой получается как условие коллинеарности $\vec{q} \| \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow$

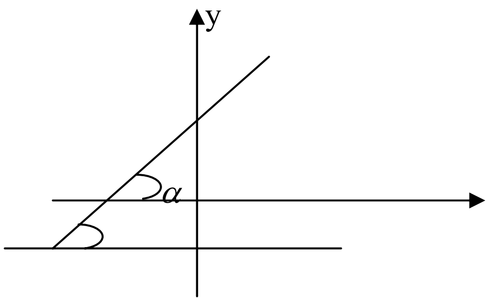
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \qquad \textbf{(5)}$$

Если $L_1 \| L_2 \Rightarrow \vec{q}_1 \| \vec{q}_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$

Если $L_1 \perp L_2 \Rightarrow \vec{q}_1 \perp \vec{q}_2 \Rightarrow l_1l_2 + m_1m_2 = 0$

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

5) <u>Уравнение прямой с угловым коэффициентом</u>



$$y = \kappa x + \textit{в}\,, \quad \kappa = tg\alpha$$

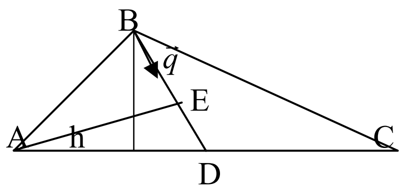
$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$$

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Пример №236.

A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)



Составить уравнение перпендикуляра , опущенного из вершины A на медиану , проведенную из вершины B. Находим координату D , как среднее арифметическое координат точек A и C - D(2;2).

$BD: \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{1}$ уравнение медианы (См. (2) § 15)

Следовательно $\vec{q} = \{4;1\}$

Составим общее уравнение AE (используем направляющий вектор BD как нормальный вектор для AE)

4x+y+C=0

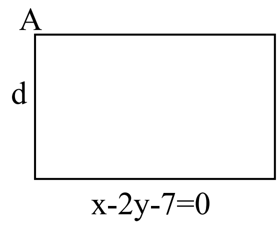
C=-4+1=-3

AE : 4x+y-3=0

Пример №314.

A(2;-5)

x-2y-7=0 Найти площадь прямоугольника



Найдем расстояние от т. A до прямой .

Переходим к нормальному уравнению прямой

$$\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{7}{\sqrt{5}} = 0$$

$$d = \left| \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{7}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{5}$$

$S = d^2 = 5$

<u>§16 РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ.</u>

<u>**1)**</u>

Если π₁ задана уравнением

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,а

π_2 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то **(1)**

Система вида

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

будет представлять собой $L=\pi_1\cap\pi_2$, если коэффициенты этой системы не пропорциональны.

2) Канонические уравнения прямой.

Прямая в пространстве задана , если задана фиксированная точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и задан направляющий вектор $\vec{q}=\{l;m;n\}$. Тогда введя текущую точку $M(x;y;z)$, уравнение прямой запишется как условие коллинеарности двух векторов $\vec{q}\,\|\,\overrightarrow{M_0M}$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t \qquad \textbf{(2)}$$

3)

Уравнения прямой , проходящей через 2 заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$.

Выбрав текущую точку $M(x;y;z)$, уравнения прямой запишутся как условие коллинеарности двух векторов

$\overrightarrow{M_1M_2}\,\|\,\overrightarrow{M_1M}$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad \textbf{(3)}$$

4) Параметрические уравнения прямой .

Получаются непосредственно из канонических уравнений (2) путем приравнивания их к параметру t

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

ТЕОРЕМА 1 (угол между прямыми)

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\cos(L_1\wedge L_2)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Доказательство:

$(L_1\wedge L_2)=\vec{q}_1\wedge\vec{q}_2$, а т.к. $\vec{q}_1=\{l_1;m_1;n_1\}$, $\vec{q}_2=\{l_2;m_2;n_2\}$, то используя формулу §9 (6) получим (5)

ТЕОРЕМА 2 (Условие параллельности прямых)

Условие параллельности прямой L_1 и L_2

$$L_1 \| L_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \textbf{(6)}$$

Доказательство:

Если $L_1 \| L_2 \Rightarrow \vec{q}_1 \| \vec{q}_2 \Rightarrow$ §9 (8)=>(6)

<u>ТЕОРЕМА 3</u> (Условие перпендикулярности прямых).

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны , если

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Доказательство:

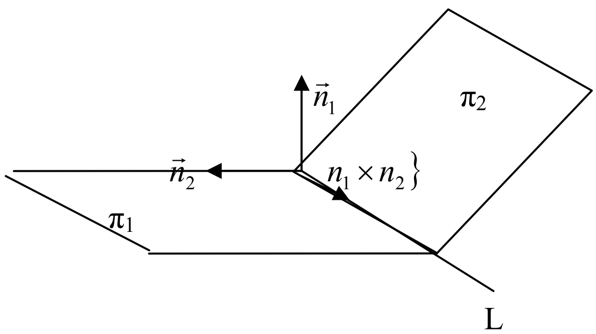
$L_1 \perp L_2 \Rightarrow \vec{q}_1 \perp \vec{q}_2 \Rightarrow$ §9 (7)

Переход от системы (1) к каноническому виду (2).

а) Находим координаты фиксированной точки M_0. В качестве точки M_0 выбираем такую точку, у которой одна из координат = 0 , т.е. z_0=0, тогда две другие координаты x_0 и y_0 находятся из решения следующей системы

$$\begin{cases} A_1 x_0 + B_1 y_0 = -D_1 \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 = -D_2 \end{cases} \Rightarrow M_0(x_0; y_0; 0)$$

б) Нахождение координат направляющего вектора $\vec{q} = \{l; m; n\}$



$\vec{n}_1 \perp L$

$\vec{n}_2 \perp L$

$$\left.\begin{matrix} n_1 \times n_2 \perp n_1 \\ n_1 \times n_2 \perp n_2 \end{matrix}\right\} \quad \text{т.е.}$$

в качестве направляющего вектора прямой L , можно взять $\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (B_1 C_2 - B_2 C_1)\vec{i} - (A_1 C_2 - A_2 C_1)\vec{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\vec{k},$$

т.о.

$l = B_1 C_2 - B_2 C_1$, $m = A_2 C_1 - A_1 C_2$, $n = A_1 B_2 - A_2 B_1$

<u>ПРИМЕР</u>

Составить уравнение плоскости , проходящей , через $M_0(1;2;3)$ параллельно $\vec{a} = \{-1;2;-1\}$, и параллельно прямой : $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ:

Уравнение данной плоскости запишется как условие компланарности 3-х векторов $\overrightarrow{M_0 M}$, $\vec{a}$, $\vec{q}$

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$\vec{q} = \{1; -3; -5\}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

(x-1)(-10-3)-(y-2)(5+1)+(z-3)(3-2)=0

-13x+13-6y+12+z-3=0

-13x-6y+z+22=0

№1040(1).

Найти точки пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости 2x+3y+z-1=0.

Запишем уравнения прямой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 6t \end{cases}$$

2(1+t)+3(-1-2t)+6t-1=0

2+2t-3-6t+6t-1=0

t=1 => M_* (2;-3;6)

№1062.

Вычислить расстояние d от точки P(1,-1,-2) до прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

$\vec{q} = \{3,2,-2\}$ $\vec{PM_*} = \{x_* - 1, y_* + 1, z_* + 2\}$. Где M_* - основание перпендикуляра, опущенного из т. P на прямую.

$\vec{q} \perp pM_* \Rightarrow$

$\{\{3(x_* - 1) + 2(y_* + 1) - 2(z_* + 2)\}\}$=0 (a)

$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$=t

$$\begin{cases} x_* = -3 + 3t_* \\ y_* = -2 + 2t_* \\ z_* = 8 - 2t_* \end{cases}$$

Подставляя в (a) и найдя $t_* = 2$, получим

$M_*(3,2,4)$ $\vec{PM_*} = \{2,3,6\}$ d=$\left|\vec{PM_*}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$

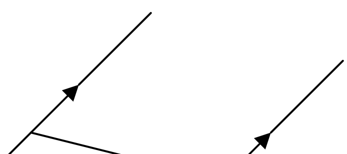
§17 СОВМЕСТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ.

1) **Условие принадлежности двух прямых одной плоскости**. Даны две прямые

$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$

$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ доказать, что они лежат в одной плоскости.

Две прямые лежат в одной плоскости, если выполняется условие компланарности трёх векторов $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{M_1 M_2}$



L_1

L_2

$\vec{q}_1$

M_1 $\vec{q}_2$

M_2

То есть $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$ (1)

2) Угол между прямой и плоскостью:

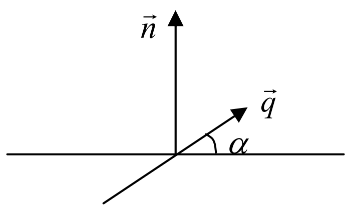
$L\ : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

$\alpha = L_1 \,\hat{}\, \pi = ?$

$\cos\left(\vec{n} \,\hat{}\, \vec{q}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$$\sin\alpha = \cos\left(\vec{n} \,\hat{}\, \vec{q}\right) = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (2)$$

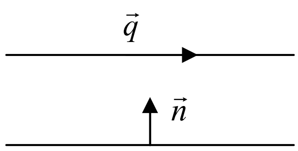


3) Условие перпендикулярности прямой

$L\ : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ **и плоскости** $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

$L \perp \pi \Rightarrow \vec{q} \,||\, \vec{n} \Rightarrow \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ (3)

4) Условие параллельности прямой L и плоскости π



$L \,||\, \pi \Rightarrow \vec{q} \perp \vec{n} \Rightarrow Al + Bm + Cn = 0$ (4)

5) **Условие принадлежности прямой** $L\ : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ **плоскости**

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

А) Во-первых, должно выполняться условие (4)

Б) Во-вторых, у них должна быть как минимум одна общая точка, то есть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ должна принадлежать не только прямой, но и плоскости. Таким образом получаем систему:

$L \,||\, \pi \Rightarrow \; Al + Bm + Cn = 0$

$M_0 \in \pi \Rightarrow \; \pi : Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

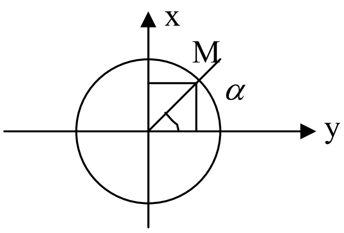
§18 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Кривые, которые в декартовой системе координат определяются уравнениями второй степени, называются кривыми второго порядка.

1) **ОКРУЖНОСТЬ**- кривая, точки которой обладают тем свойством, что каждая из них равноудалена от одной точки, называемой центром окружности.

Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора получаем уравнение

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1)



В том случае, когда центр окружности совпадает с началом координат:

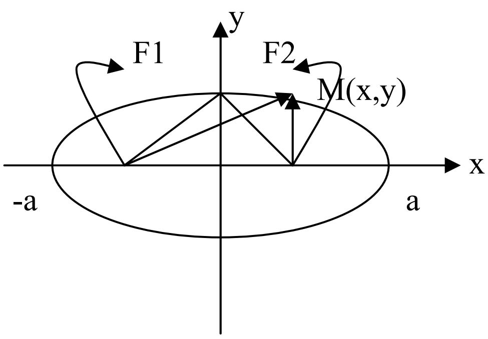
$x^2 + y^2 = R^2$ (1а)

Можно записать так же параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad (1б)$$

где φ - это параметр, который в данном случае имеет смысл полярного угла. При подставлении (1б) в (1а) легко заметить, что это уравнение одной и той же окружности.

2) **ЭЛЛИПС**-это кривая, точки которой обладают тем свойством, что сумма расстояний от каждой из них до точек $F_1(-c;0), F_2(c;0)$,называемых фокусами, есть величина постоянная равная 2а.



$\vec{F_1M} = \{x+c; y\}$ $\vec{F_2M} = \{x-c; y\}$

Согласно определению имеем

$$\left|\vec{F_1M}\right| + \left|\vec{F_2M}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Избавляясь от иррациональности и введя обозначение $a^2 - c^2 = b^2$, получим каноническое уравнение эллипса

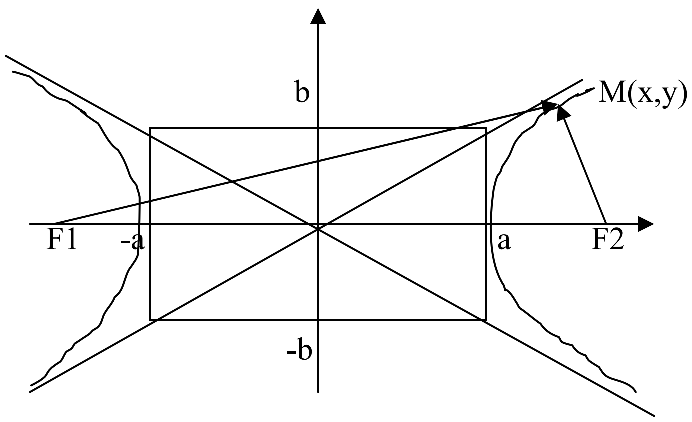
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Можно записать также параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (2а), \quad \text{где t – параметр } 0 \le t \le 2\pi$$

При подстановке (2а) в (2) видно, что равенство удовлетворяется.
В том случае, когда a=b=R, уравнение эллипса переходит в уравнение окружности.

3) **ГИПЕРБОЛА** – кривая, точки которой обладают тем свойством, что разность расстояний от каждой из них до двух точек $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ (называемых фокусами) есть величина постоянная, равная 2a



Согласно определению, имеем

$$\left|\vec{F_1M}\right| - \left|\vec{F_2M}\right| = 2a \quad (*)$$

$$\left|\vec{F_2M}\right| - \left|\vec{F_1M}\right| = 2a \quad (**)$$

Оба равенства (*) и (**) отвечают определению гиперболы, поэтому гипербола имеет две ветви , причём (*) соответствует правой ветви гиперболы, а (**) – левой.

$$\left|\vec{F_1M}\right| = \{x+c; y\}$$

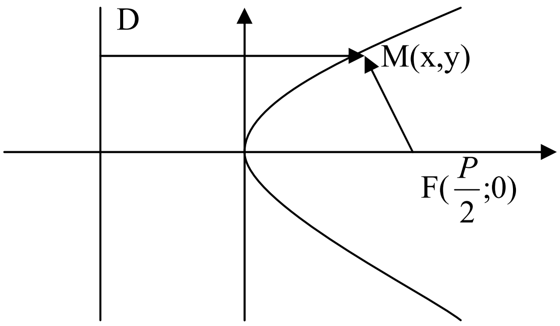
$$\left|\vec{F_2M}\right| = \{x-c; y\}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Избавляясь от иррациональности и введя обозначение $c^2 - a^2 = b^2$, получим каноническое уравнение гиперболы.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

4) **ПАРАБОЛА**- это кривая, точки которой обладают тем свойством, что все они равноудалены от прямой, называемой директриссой и от точки F, называемой фокусом.



директрисса

Согласно определению

$$\left|\vec{dm}\right| = \left|\vec{fm}\right|$$

$$\vec{dm} = \left\{x + \frac{p}{2};0\right\}$$

$$\vec{fm} = \left\{x - \frac{p}{2};y\right\}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$ где p-фокальный параметр.

$$y^2 = 2px$$