

1. Не вычисляя, определить знак интегралов: $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$, $\int_{0,5}^1 x^2 \ln x dx$. Сформулировать и доказать теоремы, которые при этом использовались. (10)

2. Вычислить $\iiint_M xyz dx dy dz$, если область M расположена в октанте

$x > 0, y > 0, z > 0$ и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, z = \frac{x^2 + y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x$$

$$(0 < a < b, 0 < \alpha < \beta, 0 < m < n)$$

Сформулировать теорему, которая при этом использовалась. (10)

3. Даны два отображения: $g: X = uv, y = u^2 - v^3$ и h :

$$\xi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \eta = \ln(x^2 + y^2), \zeta = 3x. \text{ Что представляет собой композиция } f = h \circ g ?$$

Написать дифференциалы отображений h и g и выразить через них дифференциал композиции $f = h \circ g$. (5)

4. Пусть $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$. Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$

(5)

5. Найти $d^2 z$ $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ (5) (Демида, 3399)

6. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v$, где (5)

$$\nabla = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$