МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

ПО ТЕМЕ «РЯДЫ» РАЗДЕЛА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – 2» (РЯДЫ, ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Данное пособие представляет собой изложение содержания практических занятий по высшей математике во втором семестре для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика» факультета автоматики и вычислительной техники РГУ Нефти и Газа им. Губкина. Материал сгруппирован по занятиям так, как он изучается в течение семестра, при этом преследовалась цель не только повторить содержание этих занятий, а продемонстрировать и закрепить на примерах основные положения соответствующих теоретических разделов и методы решения конкретных задач.

Каждое занятие отличается от соответствующего реального занятия более подробным теоретическим введением, содержащим необходимый минимум сведений. Затем предлагаются практические задания, отобранные по принципу «от самого простого к сложному». Примеры взяты в основном из рекомендованного для данной специальности задачника Б. П. Демидовича «Сборник задач и упражнений по математическому анализу». Большинство примеров снабжено подробными решениями, поясняющими сущность изложенных методов. Это, а также явно избыточное количество предлагаемых и разобранных задач по сравнению с реальными возможностями практических занятий, имеет своей целью компенсировать сокращенные по учебному плану часы практических занятий и дать дополнительные возможности для самостоятельной работы. Поэтому данный сборник предназначен прежде всего для студентов указанной специальности, но также может служить в качестве пособия для лиц, самостоятельно изучающих предмет.

ЗАНЯТИЕ 1. Основные действия с комплексными числами.

Множество объектов вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$, с введенными на нем операциями сложения: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ и умножения: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ называется множеством комплексных чисел и обозначается $\mathbb{C}$. Относительно введенных операций оно является полем.

Напомним, что поле – это множество, на котором определены две операции, сложения и умножения, обе коммутативные и ассоциативные, связанные между собой законом дистрибутивности. Причем существует нейтральный элемент для сложения (обозначаемый 0**)**, то есть такой, что $z + 0 = z$ для любого элемента z множества , и для каждого элемента z существует такой элемент, называемый обратным и обозначаемый $-z$, что $z + (-z) = 0$. Для операции умножения на этом множестве без 0 должен существовать нейтральный элемент, обозначаемый 1, то есть для любого элемента z множества $z \cdot 1 = z$, и для каждого элемента z (кроме 0) существует такой элемент, называемый противоположным и обозначаемый z^{-1}, что $z \cdot z^{-1} = 1$. Очевидно, из этого следует определенность операции вычитания, как обратной сложению: $x = a - b$ определяется как решение уравнения $x + b = a$. Аналогично определяется операция деления, как обратная к умножению на множестве без 0.

Таким образом, на $\mathbb{C}$ определены операции вычитания и деления на $z \neq 0$ и действуют законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, как и для действительных чисел. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z = x$, а число y – мнимой частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z = y$. Представление вида $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа. Число

$\overline{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным числу z. Из данных определений следует, что

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2.$$

Из этого соотношения следует, что частное двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Задание 1.

Найти действительную и мнимую часть комплексных чисел:

1.1. $\dfrac{3+2i}{4-i}$; 1.2. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$; 1.3. $\left(\dfrac{i^8 + i^6}{1 - i^5}\right)^2$; 1.4. $\dfrac{i^7 + 3}{i^{17} - 1}$.

Решение.

1.1. $$\frac{3+2i}{4-i} = \frac{(3+2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{12+8i+3i+2i^2}{16+1} = \frac{12+11i-2}{17} = \frac{10}{17} + i\frac{11}{17};$$

Re $z = \dfrac{10}{17}$, Im $z = \dfrac{11}{17}$.

1.2. $$\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1+1}\right)^2 = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^2 = i^2 = -1;$$

Re $z = -1$, Im $z = 0$.

1.3. Заметим вначале важное свойство степеней мнимой единицы i: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = (-1)(-1) = 1 = i^0$, $i^5 = i$ и так далее. Мы видим, что совпадают те степени i, которые имеют одинаковые остатки при делении на 4. Таким образом, методом индукции получаем ***общую формулу для произвольного целого* n = 4*m* + *k*:** $i^n = i^k$***, где k* = 0, 1, 2, 3.** Поэтому

$$\left(\frac{i^8+i^6}{1-i^5}\right)^2=\left(\frac{1+i^2}{1-i}\right)^2=\left(\frac{1+(-1)}{1-i}\right)^2=0;$$

1.4. Сделать самостоятельно.

Комплексные числа можно рассматривать как двумерные векторы (x, y), тогда естественно считать 1 и i единичными векторами ортонормированного базиса, относительно которого заданы координаты (x, y): $z = x \cdot 1 + y \cdot i$. Тогда ось OX называется действительной осью, ось $OУ$ – мнимой, плоскость $OXУ$ – комплексной плоскостью. Пользуясь полярной системой координат, комплексное число z можно записать в виде

$z = r\cos\varphi + ri\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, поскольку,

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$.

Представление

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется тригонометрической формой комплексного числа, φ называется аргументом, а r – модулем комплексного числа, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $r \geq 0$. Напомним необходимые соотношения:

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{r} . \tag{2}$$

Необходимо также отметить, что, если φ является аргументом комплексного числа z, то вместе с формулой

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ справедливо

$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$,

где k – произвольное целое число.

Заметим, что в то время как складывать и вычитать комплексные числа удобно в алгебраической форме, умножать и делить, а также возводить в степень и извлекать корни проще, пользуясь тригонометрической формой. Так как для

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

справедлива формула:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad ,$$

из которой вытекают формулы

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{3}$$

и

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{4}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Из последней формулы видно, что у каждого комплексного числа z, $z \neq 0$, имеется ровно n различных корней степени n, причем если изобразить все эти корни как векторы, то их концы лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в 0.

Задание 2.

Изобразить на комплексной плоскости числа: $1+i$, $-1+i$, $3-2i$, $-i$, $-1+\sqrt{3}i$.

Задание 3.

Представить в тригонометрической форме:

а) -4, б) 25, в) $-4i$, г) $-1+i$, д) $1-i$, е) $-1+\sqrt{3}i$,
ж) $-\sqrt{3}+i$, з) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, и) $-3\cos(\pi/5)+3i\sin(\pi/5)$,
к) $\sin(\pi/7)-i\cos(\pi/7)$.

Примеры решений:

а) Изобразив -4 как вектор $(-4, 0)$, находим $r = 4$, $\varphi = \pi$. Таким образом, $z = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Аналогично в пункте б) $r = 25$, $\varphi = 0$, в пункте в) $r = 4$, $\varphi = 3\pi/2$ (или $-\pi/2$, в зависимости от выбора области значений аргумента φ: либо $[0,2\pi)$, либо $(-\pi, \pi]$ (впредь по умолчанию считаем $\varphi \in (-\pi, \pi]$).

г) Найдем согласно (1) $r = \sqrt{2}$, изобразив на плоскости вектор $(-1, 1)$ и воспользовавшись формулами (2): $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получаем $\varphi = 3\pi/4$.

Аналогично в д) $r = \sqrt{2},\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, в е) $r = 2,\ \varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$, в ж) $r = \sqrt{2},\ \varphi = \dfrac{5\pi}{6}$, в з) $r = 2,\ \varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

и) Необходимо сначала найти модуль: он равен

$r = \sqrt{9\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 9\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)} = 3$. Затем составить уравнения (2) для определения $\varphi = \arg z$: $\cos\varphi = -\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\dfrac{\pi}{5}$. Из них, построив по проекциям единичный радиус-вектор (или по формулам приведения) находим, что φ принадлежит второй четверти и $\varphi = \pi - \pi/5 = 4\pi/5$. Окончательно, тригонометрическая форма нашего числа есть $z = 3\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right)$.

к) Модуль, очевидно, равен $r = \sqrt{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)} = 1$. А для определения $\varphi = \arg z$ имеем уравнения: $\cos\varphi = \sin(\pi/7)$, $\sin\varphi = -\cos(\pi/7)$. Чтобы найти такой угол, можно сначала найти вспомогательный угол α, такой что $\cos\alpha = \sin(\pi/7)$, $\sin\alpha = \cos(\pi/7)$. Этот угол, очевидно, равен $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7} = \dfrac{5\pi}{14}$.
Этот угол связан с φ уравнениями: $\cos\varphi = \cos\alpha$, $\sin\varphi = -\sin\alpha$. Опять, по-

строив по проекциям единичные радиус-векторы этих двух углов, видим, что они связаны соотношением $\varphi = -\alpha$. Поэтому $\varphi = -\frac{5\pi}{14}$. Итак, тригонометрическая форма нашего числа есть $z = \cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)$.

<u>Задание 4.</u>

Пользуясь тригонометрической формой, вычислить:

а) $\sqrt[6]{1}$, б) $\sqrt[3]{-i}$, в) $\sqrt[6]{-\sqrt{2}i-\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Воспользуемся тригонометрической формой числа

$$1 = \cos(0+2\pi n) + i\sin(0+2\pi n) ,$$

где n – любое целое число. Тогда

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2\pi n}{6} + i\sin\frac{2\pi n}{6} = \cos\frac{\pi n}{3} + i\sin\frac{\pi n}{3},$$

при n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 получаются 6 различных корней:

$$\sqrt[6]{1}_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad \sqrt[6]{1}_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sqrt[6]{1}_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sqrt[6]{1}_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\sqrt[6]{1}_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sqrt[6]{1}_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

при $n > 5$ корни будут совпадать с уже полученными (также и при $n < 0$).

<u>Задание 5.</u>

Построить на плоскости изображения множеств, задаваемых соотношениями:

а) $\left\{ z \middle| |z| < 2, \arg z \subset \left(-\pi/4, \pi/2\right) \right\}$; б) $\left\{ z \middle| 1 < |z|, \arg z \subset \left(0, \pi/3\right) \right\}$.

ЗАНЯТИЕ 2. Числовые ряды с неотрицательными членами. Сходимость, необходимые и достаточные признаки сходимости.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$.

Обозначим символом $\sum\limits_{n=p}^{q} a_n \equiv a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q \quad (p \le q)$.

Определение. *Рядом или бесконечным рядом называется выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, подразумевающее суммирование всех членов последовательности $\{a_n\}$, и обозначают его символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.Элементы последовательности $\{a_n\}$ называются членами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а элемент a_n называется n-м членом ряда.*

Сумму первых n членов последовательности $\{a_n\}$ будем называть n-й частичной суммой этого ряда и обозначать S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Таким образом, получаем последовательность частичных сумм $\{S_n\}$.

Определение. *Числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

называется сходящимся, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *называемый суммой ряда, в противном случае ряд называется расходящимся.*

1. Критерий Коши.

Для сходимости ряда (1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что при любых* $n, p \in \mathbb{N},\ n > N,$ *было выполнено неравенство* $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$.

В частности, отсюда следует ***необходимое условие сходимости ряда****: если ряд сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Признаки сравнения.

Пусть кроме ряда (1) имеем ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \textbf{(2)} .$$

Признак сравнения I *Если при всех достаточно больших* n *выполнено неравенство* $0 \le a_n \le b_n$, *то*

1) из сходимости ряда (2) *следует сходимость ряда* (1);

2) из расходимости ряда (1) *следует расходимость ряда* (2).

Признак сравнения II *Если члены обоих рядов неотрицательны и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C \ne 0$ *при* $n \to \infty$, *то ряды* (1) *и* (2) *сходятся или расходятся одновременно.*

Напомним, что две неотрицательные последовательности a_n и b_n, такие что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C\neq 0$, называются равносильными или имеющими одинаковый порядок и обозначаются $a_n \sim b_n$, а при $C = 1$ – эквивалентными и обозначаются $a_n \approx b_n$.

Напомним также, что, если $a_n \sim \frac{1}{n^k}$ при некотором k, то число k называется порядком a_n относительно $\frac{1}{n}$ при $n\to\infty$.

3. Признак Даламбера.

Если $a_n > 0$ при любом n и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то ряд (1)

а) при $q < 1$ сходится,

б) при $q > 1$ расходится.

4. Признак Коши.

Если $a_n \geq 0$ и верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$, то ряд (1)

а) при $q < 1$ сходится,

б) при $q > 1$ расходится.

5. Интегральный признак Коши.

Если $f(x)$ ($x > 1$) – неотрицательная невозрастающая функция, то ряд (1), *где $a_n = f(n)$, сходится тогда и только тогда, когда имеет конечный предел функция $F(x)=\int\limits_1^x f(t)dt$ при $x\to\infty$.*

Задание 1.

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1.1 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$;

1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

Решение.

1.1. Согласно определению надо исследовать на сходимость последовательность частичных сумм

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(1+n)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} .$$

Поэтому, применив это соотношение для каждого слагаемого в S_n , очевидно, получим

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1} .$$

Таким образом из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$, следует сходимость ряда к единице.

1.2. Аналогично, представив

$$a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) ,$$

видим, что

$$S_n=(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+$$
$$+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1}).$$

Таким образом, остается найти

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=0\ .$$

Значит, ряд сходится к $-(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}$.

Задание 2.

Исследовать сходимость следующих рядов:

2.1 $1-1+1-1+\ldots$;

2.2 $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\ldots$;

2.3 $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\ldots$.

Решение.

2.1. Поскольку нарушено необходимое условие сходимости ряда: a_n не стремится к нулю при $n\to\infty$, то ряд расходится.

2.2. Сначала найдем общее выражение для n-ного слагаемого: из указанного вида первых трех членов следует общая закономерность $a_n=\sqrt[n]{0,001}=0,001^{\frac{1}{n}}$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}0,001^{\frac{1}{n}}=0,001^0=1$, то, как и в предыдущем случае, ряд расходится.

2.3. Применим признак Даламбера: $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$, тогда

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Это означает, что ряд сходится.

Задание 3.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p\in\mathbb{R}$, и докажем, что он сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Решение.

Если $p\le 0$, то a_n не стремится к нулю при $n\to\infty$ и ряд расходится. Пусть теперь $p>0$. Применим интегральный признак. Так как $a_n=\frac{1}{n^p}$, то рассмотрим $f(x)=\frac{1}{x^p}$, которая стремится к нулю, монотонно убывая, при возрастании x, что означает применимость интегрального признака. Рассмотрим

$$F(x)=\int_1^x\frac{dt}{t^p}=\left.\frac{1}{(-p+1)t^{p-1}}\right|_1^x=\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}-\frac{1}{1-p}$$

при $p\ne 1$ и $F(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_1^x=\ln x$ при $p=1$. Очевидно, конечный предел $F(x)$ при $x\to+\infty$ существует, если $p>1$ и не существует при $p\le 1$, что и требовалось доказать.

Задание 4.

Исследовать сходимость следующих рядов:

4.1 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

4.2 $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$;

4.3 $\frac{11}{2}+\frac{21}{9}+\frac{31}{16}+\ldots+\ldots$;

4.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[5]{3n^4 - 2n}}{(6\sqrt{n}+1)\sqrt[4]{2n+5n^3}}$;

4.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[7]{4+n^3}}{\sqrt[3]{12n^7+3n^4+n}}$;

4.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt[4]{(2n-1)(3n^4+5)}}$.

Решение.

4.1. Применим признак сравнения: так как $2n-1 < 2n$, то $\dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (это свойство – вынесение постоянного множителя – сохраняющееся для бесконечной суммы, как предела конечных сумм S_n, будет часто использоваться в дальнейшем – из него следует, что ненулевой постоянный множитель не влияет на сходимость ряда). Поэтому из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (см. задание 3) следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ и «большего» ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$.

4.2. Применим признак сравнения в формулировке II: для $a_n = \dfrac{1}{1000n+1}$ подберем $b_n \sim a_n$, причем так, чтобы $b_n = \dfrac{1}{n^p}$, так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (задание 3) уже исследованы на сходимость. Очевидно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C \neq 0$, надо взять $p = 1$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1000n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+1}=\frac{1}{1000}.$$

Таким образом $b_n=\dfrac{1}{n}$ и из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ следует расходимость данного ряда.

4.3. Сначала найдем вид a_n. В числителе видим прогрессию со знаменателем 10 и первым членом 11, поэтому ее n-й член есть
$11+10(n–1)=10n+1$. Аналогично в знаменателе арифметическая прогрессия со знаменателем 7 и первым членом 2, поэтому ее n-й член есть $2+7(n–1)=7n–5$. Таким образом $a_n=\dfrac{10n+1}{7n-5}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{10}{7}\neq 0$ и ряд расходится в силу отсутствия необходимого условия.

4.4. По признаку сравнения II подберем $b_n\sim a_n$, причем так, чтобы $b_n=\dfrac{1}{n^p}$.

Имеем

$$a_n=\frac{\sqrt[5]{3n^4-2n}}{\left(6\sqrt{n}+1\right)\sqrt[4]{2n+5n^3}}=\frac{n^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{3-\dfrac{2}{n^3}}}{n^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}\left(6+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt[4]{5+\dfrac{2}{n^2}}}=n^{4/5-1/2-3/4}\cdot A(n),$$

где $A(n)$ стремится к $C=\dfrac{\sqrt[5]{3}}{6\sqrt[4]{5}}$ при $n\to\infty$. Таким образом $b_n\sim a_n$, где $b_n=n^{-9/20}$ и так как $9/20<1$, то ряд расходится.

4.5 и 4.6 сделать самостоятельно.

Задание 5.

Исследовать сходимость следующих рядов:

5.1 $\dfrac{1000}{1!}+\dfrac{1000^2}{2!}+\dfrac{1000^3}{3!}+\ldots+\dfrac{1000^n}{n!}+\ldots$;

5.2 $\dfrac{(1!)^2}{2!}+\dfrac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$;

5.3 $\dfrac{1!}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\ldots+\dfrac{n!}{n^n}+\ldots$;

5.4 $\dfrac{2\cdot 1!}{1}+\dfrac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\ldots+\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}+\ldots;$

5.5 $\dfrac{3\cdot 1!}{1}+\dfrac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\ldots+\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}+\ldots;$

5.6 $\dfrac{(1!)^2}{2}+\dfrac{(2!)^2}{2^4}+\dfrac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots;$

5.7 $\dfrac{1000}{1}+\dfrac{1000\cdot 1003}{1\cdot 6}+\dfrac{1000\cdot 1003\cdot 1006}{1\cdot 6\cdot 11}+\ldots;$

5.8 $\dfrac{4}{2}+\dfrac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\dfrac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots.$

Решение.

5.1. Применим признак Даламбера: $a_n=\dfrac{1000^n}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$, поэтому

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1000^{n+1}\cdot n!}{1000^n\cdot(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000}{n+1}=0$. Таким образом, ряд сходится.

5.2. Приме́ним признак Даламбера: $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $a_{n+1}=\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{((n+1)!)^2\cdot(2n)!}{(2(n+1))!\cdot(n!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((n+1)\cdot n!)^2(2n)!}{(2n+2)!\cdot(n!)^2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+1/n)^2}{n^2(2+2/n)(2+1/n)}=\frac{1}{4}<1.$$

Таким образом, ряд сходится.

5.3. Приме́ним признак Даламбера: $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n\cdot(n!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

Так как $1/e<1$, то ряд сходится.

5.4, 5.5 и 5.6 сделать самостоятельно.

5.7. Сначала найдем вид общего члена a_n. Как это сделано в задании 3.3, заметим, что в числителе имеется произведение членов арифметической прогрессии с первым членом 1000 и разностью 3, причем в a_n надо взять произведение n первых членов прогрессии, n-ый член которой имеет вид $1000+3(n-1)=997+3n$. Аналогично и в знаменателе a_n имеем произведение n первых членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 5, n-ый член которой имеет вид $1+5(n-1)=5n-4$. Таким образом $a_n=\dfrac{1000\cdot1003\cdot1006\cdot\ldots\cdot(997+3n)}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

Применим признак Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{1000 \cdot 1003 \cdot 1006 \cdot \ldots \cdot (997+3n)(997+3(n+1))}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)(5(n+1)-4)},$$ поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000 \cdot 1003 \cdot 1006 \cdot \ldots \cdot (997+3n)(997+3+3n) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)(5n+5-4) \cdot 1000 \cdot 1003 \cdot 1006 \cdot \ldots \cdot (997+3n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1000+3n}{5n+1} = \frac{3}{5}.$$ Следовательно ряд сходится.

5.8 сделать самостоятельно.

ЗАНЯТИЕ 3: Продолжение исследования рядов с положительными членами. Признаки Даламбера и Коши.

Задание 6.

Исследовать сходимость следующих рядов:

6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; 6.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; 6.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

6.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$; 6.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

Решение.

6.1. Применим признак Даламбера: $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n+1)^n\cdot(n+1)^{n+1}}{(2n+2+1)^{n+1}\cdot n^2\cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n(1+1/n)}{n(2+3/n)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{-n}\cdot\frac{e}{2}=$$

$$=\frac{e}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{-2n}{2n+1}}=\frac{1}{2}e\cdot e^{-1}=\frac{1}{2}$$, следовательно, ряд сходится.

Можно вместо признака Даламбера применить признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$, так как известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ (напомним, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ находится по правилу Лопиталя). Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\ln n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{2\frac{\ln n}{n}}=e^0=1.$

Как видим, второй способ значительно короче. Поэтому, отметив более общее свойство: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\ln n^k}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{k\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$, будем для подобных случаев использовать признак Коши.

6.2. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{n+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^{\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^0=1$$

означает, что признак «не работает» – то есть не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. А это в свою очередь означает (и для признака Даламбера тоже), что a_n не равносильно q^n $(q\neq 1)$ (а именно для таких рядов эффективны признаки Даламбера и Коши), и требуется исследовать его поведение при $n \to \infty$ более тонкими методами. Найдем порядок a_n :

$$\ln a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln n - n \cdot \ln\left(n + \frac{1}{n}\right) = n \ln n + \frac{\ln n}{n} - n \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= n \ln n + \frac{\ln n}{n} - n \ln n - n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\ln n}{n} - \frac{n^2}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Первое слагаемое имеет предел 0, как и второе: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n} = \ln e \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = 0$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$ (в силу непрерывности показательной функции), и ряд расходится из-за нарушения необходимого условия.

6.3. Применим признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{3^n\left(1 + \left(2/3\right)^n\right)}} = \frac{1}{3}$. Следовательно ряд сходится.

6.4. Как и в задании 6.2, исследуем поведение a_n , вернее, его знаменателя:

$$\sqrt[n]{\ln n} = \left(e^{\ln \ln n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln \ln n}{n}}.$$

Поскольку по правилу Лопиталя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n \cdot n} = 0$, то знаменатель стремится к $e^0 = 1$, так что и a_n стремится к 1. Таким образом, ряд расходится.

6.5 сделать самостоятельно. (*Указание*: воспользоваться признаком Коши и вторым замечательным пределом. *Ответ*: сходится.)

Задание 7.

Исследовать сходимость следующих рядов:

7.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$; 7.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$;

7.3 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln^p\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)$; 7.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$;

7.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}$; 7.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

Решение.

Напомним, что величина $\alpha(x)$ называется бесконечно малой относительно другой величины x, ($x\to 0$) и обозначается $o(x)$, если $\alpha(x)=o(1)\cdot x$ при $x\to 0$, где $o(1)$ обозначает здесь и в дальнейшем бесконечно малую величину.

7.1. Исследуем поведение a_n. Так как $\sin\frac{\pi}{n}\approx\frac{\pi}{n}$ при $n\to\infty$, то $a_n\approx\frac{\pi}{n^{p+1}}$ при $n\to\infty$ и поэтому порядок a_n равен $p+1$. Применим признак сравнения в формулировке II и получим, что ряд сходится при $p+1>1$, то есть $p>0$, и расходится в остальных случаях.

7.2. Найдем порядок первого сомножителя:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}==\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{1+n^{-1}}+1)},$$

таким образом, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\approx\frac{1}{2\sqrt{n}}$, а $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\approx\frac{1}{2^p(\sqrt{n})^p}$ и порядок первого сомножителя равен $p/2$. Найдем порядок второго сомножителя.

$$\ln\frac{n+1}{n-1}=\ln\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-$$

$$-\left(-\frac{1}{n}+o\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(2+o(1)\right)$$

Здесь мы воспользовались асимптотическим разложением по формуле Тейлора: $\ln(1+x)=x+o(x)$ при $x\to 0$. Таким образом, порядок второго сомножителя равен 1. Итак, порядок a_n равен $p/2+1$. Ряд сходится при $p/2>0$ и, следовательно, $p>0$ и расходится при остальных p.

7.3. Так как $\sec\frac{\pi}{n}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$, то, вспомнив из таблицы o-малых, что

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2}+o(\alpha^2) \text{ при } \alpha\to 0, \text{ получим}$$

$$\cos\frac{\pi}{n}=1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)=1-\frac{\pi^2}{n^2}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

(напомним, что из определения o-малых следует, что $c\cdot o(\alpha)=o(\alpha)$). Затем, воспользовавшись тем, что $(1+\alpha)^{-1}=1-\alpha+o(\alpha)$, получим

$$\sec\frac{\pi}{n}=\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{-1}=1+\frac{\pi^2}{n^2}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)+o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)=1+\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь мы опять на основе определения $o(\alpha)=\alpha\cdot o(1)$ преобразовали последнее слагаемое так:

$$o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right)\cdot o\left(1\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

так как второй сомножитель – ограниченная величина, и произведение его и третьего сомножителя есть $o(1)$ при $\frac{1}{n^2} \to 0$. Далее снова воспользуемся формулой $\ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha)$, из которой следует

$$\ln\left(1+\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right)\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right)+$$

$$+o\left(\frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right)\right) = \frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right).$$

Поэтому $\ln^p(\sec\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{n^{2p}}\left(\frac{\pi^2}{2}+o(1)\right)^p = g\cdot\frac{1}{n^{2p}}$, где g стремится к $c = \frac{\pi^{2p}}{2^p}$ при $n\to\infty$ и поэтому $a_n \approx \frac{c}{n^{2p}}$ и ряд сходится при $2p > 1$, то есть $p > 1/2$.

7.4. Снова, как и в предыдущем примере, займемся исследованием порядка a_n, то есть поиском k для эквивалентной степенной функции: $a_n \approx \frac{c}{n^k}$. Займемся порядком основания:

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e-\exp\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1-\frac{\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{e}\right) =$$

$$= e\left(1-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\right).$$

В последнем выражении воспользуемся снова формулой $\ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha)$:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot o(1)\right) = 1+o(1),$$

откуда видно, что в выражении $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 = 1+o(1)-1 = o(1)$ потерян порядок стремления к нулю. Поэтому вместо разложения $\ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha)$ надо воспользоваться более точным разложением по формуле Тейлора второго порядка и соответствующего остаточного члена в форме Пеано вида:

$\ln(1+\alpha)=\alpha-\dfrac{\alpha^2}{2}+o(\alpha^2)$, тогда соответственно

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot o(1)\right)-1=$$

$$=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\cdot o(1)-1=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\cdot o(1)=\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

Итак, $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\left(1-\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right)\right)=e\left(1-\exp\left(\dfrac{1}{n}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+o(1)\right)\right)\right).$

Наконец, вспомним еще разложение $\exp\alpha=1+\alpha+o(\alpha)=1+\alpha+\alpha\cdot o(1)$, из которого так же, как в примере 7.3, следует

$$\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)=1+\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)\cdot o(1)=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\cdot\left(1-1+\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=e\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+o(1)\right)$. Поэтому,

если принять $c=\lim\limits_{n\to\infty}e\cdot\left(\dfrac{1}{2}+o(1)\right)=\dfrac{e}{2}$, то $a_n\approx\dfrac{c^p}{n^p}$ и ряд сходится при

$p>1$.

7.5 и 7.6 сделать самостоятельно. *Ответы:* 7.5: сходится при $\alpha>1/2$, 7.6: сходится при $a=1/2$. (*Указание:* воспользоваться разложением $(1+\alpha)^t=1+t\alpha+o(\alpha)$ при $\alpha\to 0$).

ЗАНЯТИЕ 4: Признаки сходимости знакопеременных рядов.

1. Абсолютная сходимость ряда.

Определение. *Числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (2).$$

В этом случае ряд (1) также сходится (это следует из критерия Коши).

Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Для исследования ряда (1) на абсолютную сходимость достаточно применить к ряду **(2)** известные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Определение. *Если ряд* (1) *сходится, а ряд* (2) *расходится, то ряд* (1) *называется* ***условно (неабсолютно) сходящимся***.

*Сумма условно сходящегося ряда при перестановке слагаемых может принимать любое значение или расходиться (*теорема Римана*).*

2. Признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$ $(b_n \geq 0)$ *сходится, если*

а) $b_n \geq b_{n+1}$ $(n = 1, 2\ldots)$

и

б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

В этом случае для остатка ряда

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

имеет место оценка $R_n = (-1)^n \vartheta_n b_{n+1}$ *, где* $0 \le \vartheta_n \le 1$ *. Из нее вытекает другая часто используемая оценка:* $|R_n| \le b_{n+1}$.

3. ***Признак Абеля.***

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если:*

а) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится,*

б) *числа* b_n *,* $n = 1,2,\ldots,$ *образуют монотонную и ограниченную последовательность.*

4. ***Признак Дирихле.***

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если:*

а) *частичные суммы* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничены,*

б) *последовательность* $b_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и монотонна.*

Задание 1.

Доказать сходимость ряда $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ и найти его сумму.

Решение. Данный ряд сходится абсолютно, так как ряд из модулей $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ является геометрической прогрессией и, как известно, сходится. Члены сходящегося ряда можно группировать, и сумма от этого не изменится. Поэтому сгруппируем члены ряда по три:

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)+\dots .$$ Тогда для нового ряда

$a_1=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, $a_2=\frac{1}{8}\cdot(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{4}$, и, далее,

$a_n=\frac{1}{8^n}\cdot(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{1}{8^n}\cdot\frac{5}{4}$. Этот ряд уже знакопостоянный и, как было отмечено ранее, постоянный множитель 5/4 можно вынести за знак суммы, тогда получим ряд $\frac{5}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\dots+\frac{1}{8^n}+\dots\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5\cdot 8}{4\cdot 7}=1\frac{3}{7}$ как сумма геометрической прогрессии.

Задание 2.

Верно ли утверждение, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, у которого $b_n>0$ и $b_n\to 0$ при $n\to\infty$, сходится? Рассмотреть пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2+(-1)^n}{n}$.

(Заметим, что это утверждение есть не что иное, как признак Лейбница без условия монотонности $b_n>b_{n+1}$. Поэтому отрицательный ответ на поставленный вопрос означает, что требование монотонности в признаке Лейбница является существенным.)

Решение. Очевидно, данный пример удовлетворяет приведенным условиям: $0<\frac{2+(-1)^n}{n}<\frac{3}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Остается убедиться, что данный ряд расходится, тогда ответ на поставленный вопрос, очевидно, отрицательный.

Данный ряд имеет общий член $a_n = b_n + c_n$, где $b_n = (-1)^n \frac{2}{n}$, а $c_n = \frac{1}{n}$. Соответствующие ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ сходится как лейбницев ряд (так принято называть знакопеременные ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница) , в то время как $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Если предположить, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ сходится, то тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ должен сходиться как разность двух сходящихся рядов. Здесь, напомним, используется только определение, а именно: в частичных суммах этих рядов можно переставлять члены:

$$A_n - B_n = (a_1 + ... + a_n) - (b_1 + ... + b_n) = (a_1 - b_1) + ... + (a_n - b_n) =$$

$= c_1 + ... + c_n = C_n$, так что по свойствам пределов ряд из разности их членов тоже сходится. Поэтому данное противоречие и доказывает расходимость исследуемого ряда.

<u>Задание 3.</u>

Исследовать сходимость знакопеременных рядов

3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$; 3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; 3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{n\pi}{4}$;

3.4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$; 3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + k^2}\right)$.

Решение.

3.1 Применим к этому ряду признак Лейбница. Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = 0$, то остается убедиться в монотонности последовательности $\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$. Это можно сделать непосредственной проверкой, что $\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)+100} < \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$. Действительно, в силу положительности всех числителей и знаменателей это неравенство равносильно неравенству $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} < \dfrac{n+101}{n+100}$. Левая часть его равна $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$, а правая равна $1+\dfrac{1}{n+100}$. Чтобы сравнить их, возведем обе части (так как они положительные) в квадрат: останется сравнить соответственно $1+\dfrac{1}{n}$ и $1+\dfrac{2}{n+100}+\dfrac{1}{(n+100)^2}$. Рассмотрим разность вторых слагаемых этих выражений: $\dfrac{2}{n+100}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{2n-n-100}{n(n+100)}=\dfrac{n-100}{n(n+100)}>0$ при $n>100$. Следовательно, второе слагаемое квадрата правой части больше второго слагаемого квадрата левой части при $n>100$, поэтому правая часть больше левой при $n>100$, то есть последовательность $\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$ монотонно убывает при $n>100$. Как мы уже отмечали, для сходимости ряда достаточно выполнение условий сходимости начиная с какого-либо номера, поэтому признак Лейбница применим и ряд сходится. Исследование ряда на абсолютную сходимость показывает, что он абсолютно расходится (получается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$, члены которого эквивалентны членам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$). Итак, исходный ряд сходится условно.

Заметим, что монотонность можно исследовать и другим способом – при помощи производной. Для этого надо от последовательности перейти к функции непрерывного аргумента: $\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ и найти производную этой функции:

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+100)-\sqrt{x}}{(x+100)^2}=\frac{x+100-2x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}=\frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}.$$ Очевидно, при $x>100$ производная отрицательна и функция убывает, как и последовательность ее значений в целочисленных точках, больших 100.

3.2 Рассмотрим знаменатель: $\sqrt[n]{n}=\exp\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ (по правилу Лопиталя), имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{1}{\exp 0}=1$ и заключаем, что ряд расходится.

3.3 Применим признак Дирихле: поскольку снова по правилу Лопиталя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^{100} n}{n}=0$, остается доказать ее монотонное убывание и ограниченность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. Для доказательства монотонности рассмотрим

$f(x)=\dfrac{\ln^{100} x}{x}$ и найдем ее производную

$$f'(x)=\frac{100\ln^{99} x\cdot x^{-1}\cdot x-\ln^{100} x}{x^2}=\frac{\ln^{99} x(100-\ln x)}{x^2}$$, которая будет меньше нуля при $x>\exp 100$. Следовательно, начиная с достаточно большого номера n последовательность $\dfrac{\ln^{100} n}{n}$ монотонно убывает. Теперь рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. Домножим и разделим ее на $2\sin\dfrac{\pi}{8}$. Преобразуем числитель полученного выражения: каждое слагаемое в нем будет равно

$2\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}=\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$. Сложив их, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\ldots+$$
$$+\cos\left(\frac{N\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{N\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}-$$
$$-\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}-\ldots-\cos\frac{(2N+1)\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{(2N+1)\pi}{8},$$

так как все члены «с минусом», кроме последнего, уничтожатся следующими членами «с плюсом»: $\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{(2n+1)\pi}{8}=\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{\pi}{8}$. Таким образом мы выяснили, что числитель нашего выражения по модулю не больше 2. Знаменатель постоянен (равен $2\sin\frac{\pi}{8}$) и не зависит от N. Это означает ограниченность всех частичных сумм. Т. о. ряд сходится по признаку Дирихле.

3.4 Снова применим признак Дирихле, взяв $a_n=(-1)^n\sin^2 n,\quad b_n=\frac{1}{n}$. Вторая последовательность, очевидно, монотонно стремится к нулю, поэтому остается проверить, что частичные суммы $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\sin^2 n$ ограничены. Заметим сначала, что для сумм с четными номерами можно сгруппировать попарно все слагаемые: $$\sum_{n=1}^{2M}(-1)^n\sin^2 n=\sum_{k=1}^{M}\left(-\sin^2(2k-1)+\sin^2 2k\right),$$

и так как для каждой пары

$$\sin^2 2k-\sin^2(2k-1)=\frac{1}{2}((1-\cos 4k)-(1-\cos(4k-2)))=$$
$$=\frac{1}{2}(\cos(4k-2)-\cos 4k)=\sin(1)\sin(4k-1),$$

то вся такая сумма будет равна $\sin(1)\sum_{k=1}^{M}\sin(4k-1)$. Далее нужно поступить так же, как в предыдущем примере с той только разницей, что там, заметив, что разность аргументов двух соседних синусов одна и та же и равна $\pi/4$, мы домножили и разделили все выражение на $2\sin\pi/8$, чтобы затем формулы произведения синусов давали каждый раз повторяющиеся аргументы. Теперь мы заметим, что разность аргументов соседних синусов равна $(4(k+1)-1)-(4k-1)=4$ и домножим и разделим всю сумму на $2\sin(2)$. Самостоятельно проделав соответствующие преобразования, можно убедиться, что частичные суммы ограничены. Если же N нечетно, то добавлением к ограниченной величине слагаемого, по модулю не большего единицы, снова получим ограниченную величину. Таким образом, ряд сходится по признаку Дирихле.

3.5 Преобразуем

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}-\pi n\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\frac{(n^2+k^2-n^2)}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right)=$$
$$=(-1)^n\sin\left(\pi\frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right).$$

Можно применить признак Лейбница, так как аргумент синуса стремится к нулю при $n\to\infty$, притом монотонно, а, значит, синус тоже монотонно стремится к нулю. Ряд сходится.

Задание 4:

Исследовать сходимость следующих рядов:

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$; 4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$; 4.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+n^{-1}}}$; 4.4 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

Задание 5:

Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ ($0 < x < \pi$) определить для совокупности параметров (p, x)

а) область абсолютной сходимости, б) область неабсолютной (условной) сходимости.

Ответы. Задание 4: 4.1 абсолютно сходится при $p > 1$, условно сходится при $0 < p \le 1$; 4.2 сходится условно при любом x, не равном целому отрицательному числу; 4.3 абсолютно сходится при $p > 1$, условно сходится при $0 < p \le 1$; 4.4 сходится.

Задание 5: а) $p > 1$, б) $0 < p \le 1$.

Замечание. Покажем на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$, как можно доказать абсолютную расходимость (пункт б)) в этих и аналогичных предыдущих примерах (задание 3.3, 3.4, 4.4). Пусть $0 < p \le 1$. Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p}$. Очевидно, $\frac{|\cos nx|}{n^p} \ge \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1+\cos 2nx}{2n^p}$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p}$ по теореме сравнения расходится в том случае, если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n^p}$, а этот ряд равен сумме двух рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^p}$. Чтобы доказать, что он расходится, достаточно заметить, что при $0 < p \le 1$ первый ряд справа расходится, а второй сходится (все по тому же признаку Абеля). И если предположить, что ряд слева сходится, получится, что первый ряд справа тоже должен сходиться как разность двух сходящихся рядов, что неверно.

ЗАНЯТИЕ 5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость.

1. Область сходимости.

Определение. ***Функциональным рядом*** *называется ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

членами которого являются функции $u_n(x): E \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), $E \in \mathbb{R}$.

Определение. ***Областью сходимости*** *функционального ряда* (1) *называется множество X тех значений x, для которых этот ряд сходится. Функция* $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ($x \in X$) *называется его* ***суммой***.

2. Равномерная сходимость

Определение. *Последовательность функций* $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots,$ *называется* ***равномерно сходящейся*** *на множестве* X *, если:*

1) существует предельная функция $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*, определенная для всех* $x \in X$ *,*

2) для любого числа $\varepsilon>0$ *существует число* $N=N(\varepsilon)$ *такое, что* $\left|f(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$ *при всех* $n>N$ *и* $x \in X$ *.*

Равномерная сходимость обозначается: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *или, для указания, по какому множеству:* $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Равносильным данному определению, но более удобным на практике, критерием равномерной сходимости является требование стремления к нулю величины $\Delta_n \equiv \sup\limits_{x\in X}\left| f_n(x) - f(x)\right|$:

$$f_n(x) \underset{X}{\Rightarrow} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0 .$$

Функциональный ряд (1) называется **равномерно сходящимся** на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x), \quad n = 1, 2, ...$

3. <u>Критерий Коши равномерной сходимости</u>

Для равномерной сходимости ряда ***(1)*** *на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что при всех* $n > N$ *и* $x \in X$, *и любого* $p > 0$ *было выполнено неравенство* $\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)\right| < \varepsilon$.

Из критерия Коши следует

4. <u>Необходимое условие равномерной сходимости ряда:</u>

Если ряд (1) *сходится равномерно на множестве X, то* $\sup\limits_{X}\left|u_n(x)\right| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

5. <u>Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда:</u>

Ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно на множестве X, если существует сходящийся числовой ряд* $c_1 + c_2 + ... + c_n + ...$ *такой, что* $\left|u_n(x)\right| \le c_n, \quad n = 1, 2, ...$ *для всех* $x \in X$.

6. Признак Абеля

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X *, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X *, а функции* $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ограничены в совокупности и при каждом* $x \in X$ *образуют монотонную последовательность.*

7. Признак Дирихле.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве X, если частичные суммы* $\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ *равномерно ограничены на множестве X, а последовательность* $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *монотонна при каждом x* $\in$ *X и равномерно на X стремится к нулю при* $n \to \infty$ *.*

8. Свойства функциональных рядов.

1. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.

2. Если функциональный ряд (1) *сходится равномерно на интервале* (a,b) *и существуют конечные пределы* $\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *сходится и имеет место равенство*

$$\lim_{x \to a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x \to a} u_n(x)\right).$$

3. Если члены сходящегося ряда (1) *непрерывно дифференцируемы при* $a < x < b$ *и ряд производных* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится равномерно на интервале* (a,b), *то* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'(x)_n$ *при* $x \in (a,b)$.

4. Если члены ряда (1) *непрерывны и этот ряд сходится равномерно на отрезке* $[a,b]$, *то* $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$. *Вообще же эта формула верна, если* $\int\limits_a^b R_n(x)dx \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* $R_n(x) = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$, *даже и в случае бесконечных пределов интегрирования.*

Задание 1.

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$; 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; 1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)^p}$; 1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Решение.

1.1. При $|x| \le 1$, очевидно, $a_n = \frac{n}{x^n}$ не стремится к нулю, и, следовательно, ряд расходится. При $|x| > 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n+1}}\right| = \frac{1}{|x|} < 1$ и наш ряд сходится абсолютно. Таким образом, область абсолютной сходимости $|x| > 1$.

1.2. Обозначим $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n-1)t^{n+1}}{(2n+1)t^n}\right| = |t| < 1$ при $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1$. Остается решить это неравенство (или равносильное $|1-x| < |1+x|$, что проще всего делается графическим методом) и получить множество его решений $\{\, x : x > 0\}$. Для таких x ряд абсолютно сходится. Из того же принципа Даламбера следует, что при $|t| > 1$, то есть $x < 0$, ряд расходится. Осталось исследовать точку $x = 0$. Подставив $x = 0$ в исходный ряд, имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$, который условно сходится. Итак, ряд абсолютно сходится при $x > 0$ и сходится условно при $x = 0$.

1.3. Начиная с некоторого n члены ряда положительны и $a_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^p} \approx \dfrac{1}{n^p}$, следовательно на области определения ряда $\{\, x : x \neq -k,\ k \in N\,\}$, имеем: ряд сходится при $p > 1$.

1.4. При $|x| < 1$ имеем $|a_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \approx |x|^n$ и такой ряд сходится абсолютно.

При $|x| > 1$ имеем $|a_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \dfrac{|x|^n}{x^{2n}\left(\dfrac{1}{x^{2n}}+1\right)} \approx \dfrac{1}{|x|^n}$ и ряд также абсолютно сходится. При $x = 1$, $x = -1$ ряд расходится.

<u>Задание 2.</u>

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

2.1 $f_n(x) = x^n$; 1) $0 \le x \le 1/2$; 2) $0 \le x \le 1$;

2.2 $\quad f_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$, $0<x<\infty$;

2.3 $\quad f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, 1) $0\le x\le 1$; 2) $1<x<\infty$;

2.4 $\quad f_n(x)=arctg(nx)$ на всей числовой оси;

2.5 $\quad f_n(x)=xarctg(nx)$ на всей числовой оси;

2.6 $\quad f_n(x)=\dfrac{\sin(n^k x)}{n}$, $k>0$, на всей числовой оси.

Решение.

2.1.

1) На отрезке $0\le x\le 1/2$ последовательность равномерно сходится к нулю, так как $\sup\limits_{0\le x\le 0,5}\left|x^n\right|=0,5^n$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

2) Для отрезка $0\le x\le 1$ имеем: предельная функция равна 0 при $0\le x<1$, и равна 1 при $x=1$. Таким образом, предельная функция разрывна. Сходимость к ней неравномерная, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\le x<1}\left|x^n\right|=1$. Иначе это можно доказать от противного: если бы последовательность сходилась равномерно на $0\le x\le 1$, то в силу непрерывности каждой функции и предельная функция должна быть непрерывной.

2.2. Имеем оценку $\dfrac{1}{x+n}<\dfrac{1}{n}$ при $x>0$. Поэтому имеет место равномерная сходимость.

2.3.

1) При $x=0$ все $f_n(0)=0$. При $0<x\le 1$ предел при каждом фиксированном x равен 0:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{n^2x^2\left(\frac{1}{n^2x^2}+1\right)} = \frac{2}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$, так что предельная функция на $0 \le x \le 1$ при $n \to \infty$ существует и равна нулю. Найдем $\sup\limits_{0\le x\le 1} |f_n(x)|$. Для этого используем известное неравенство $2ab \le a^2 + b^2$, которое в нашем случае дает $2nx \le 1 + n^2x^2$, причем равенство возможно лишь при $1 = nx$ (напомним, выводятся оба эти факта из очевидного неравенства $1 - 2nx + n^2x^2 = (1 - nx)^2 \ge 0$). Таким образом для каждого n найдется точка $x = \frac{1}{n}$ на отрезке $0 \le x \le 1$, в которой $f_n(x) = 1$ и равномерной сходимости нет ($\sup\limits_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = 1$).

2) На интервале $1 < x < \infty$ при каждом фиксированном x снова имеем предельную функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{n^2x^2\left(\frac{1}{n^2x^2}+1\right)} = 0$, и теперь сходимость к ней будет равномерная, так как имеем «равномерную» оценку:

$$\sup_{x>1} |f_n(x)| < \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{nx} < \frac{2}{n} .$$

2.4. При каждом фиксированном x имеем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} arctg(nx) = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} x,$$

где функция $\operatorname{sgn}(x)$ равна 1 при $x > 0$, 0 при $x = 0$ и -1 при $x < 0$. Таким образом в каждой точке x определена предельная функция $f(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$. Так как

$$\sup_{x\in R}\left|arctg(nx)-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right|=\sup_{x>0}\left(\frac{\pi}{2}-arctg(nx)\right)\geq\frac{\pi}{2}-arctg\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$ не стремится к нулю, то сходимость не равномерная.

2.5 и 2.6 сделать самостоятельно.

Задание 3.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

3.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 1) на интервале $(-q, q)$, где $q < 1$; 2) на интервале $(-1, 1)$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на промежутке $[-1, 1]$;

3.3 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на интервале $(0, +\infty)$;

3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ на интервале $(0, +\infty)$.

Решение.

3.1. 1): Поскольку известна сумма такого ряда: для всех x, меньших единицы, то ряд сходится во всех таких точках и можно оценить остаток: $r_k(x)=\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} x^n=\frac{x^{k+1}}{1-x}$. Имеем при $|x|<q$

$$|r_k(x)|=\left|\frac{x^{k+1}}{1-x}\right|\leq\frac{\left|x^{k+1}\right|}{|1-q|}\leq\frac{q^{k+1}}{1-q}\to 0$$ при $k\to\infty$. Поскольку последовательность $\frac{q^{k+1}}{1-q}$ не зависит от x, то сходимость равномерная.

В случае 2) проще всего воспользоваться свойством 8, пункт 2): если бы ряд сходился равномерно на (–1, 1), то так как существуют конечные пределы

$\lim\limits_{x\to 1} a_n(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$ для всех n, ряд 1+1+…+1+… согласно этому свойству должен сходиться, что не верно. Таким образом, ряд не сходится равномерно на $(-1, 1)$;

3.2. Применим мажорантный признак Вейерштрасса: на промежутке $[-1,1]$ имеем оценку $|a_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то исследуемый ряд сходится равномерно на промежутке $[-1,1]$;

3.3. В случае равномерной сходимости по необходимому условию величина $\sup\limits_{x\in R} |a_n(x)| = \sup\limits_{x\in R} \left|\dfrac{1}{n!} x^n\right|$ должна стремиться к нулю при $n \to \infty$, а на самом деле эта величина не ограничена.

3.4. Сделать самостоятельно, применяя мажорантный признак аналогично пункту 3.2.

Задание 4.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указных промежутках следующих функциональных рядов:

4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$, $(-\infty, +\infty)$;

4.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x + 2^n}$, $(-2, +\infty)$;

4.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + n^4 x^2}$, $[0, +\infty)$;

4.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1 + n^5 x^2}$, $(-\infty, +\infty)$;

4.5 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $[0, +\infty)$;

4.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $1/2 \le |x| \le 2$.

4.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, $(-\infty, +\infty)$;

4.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $(-\infty, +\infty)$;

4.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}}$, $(-\infty, +\infty)$.

Решение.

4.1. Оценка $\frac{1}{x^2 + n^2} \le \frac{1}{n^2}$ доказывает равномерную сходимость;

4.2. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + 2^n}$. Найдем для него мажоранту: $x + 2^n > -2 + 2^n = 2(2^{n-1} - 1) > 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$ при $n - 1 > 0$. Для ряда, начинающегося со второго члена, мажорантным будет ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Таким образом из сходимости этого ряда следует абсолютная и равномерная сходимость исходного ряда.

4.3. Воспользуемся неравенством $ab \le (a^2 + b^2)/2$, которое следует из очевидного неравенства $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \ge 0$, и получим $n^2 x \le (n^4 x^2 + 1)/2$, из которого следует $\frac{x}{(n^4 x^2 + 1)} \le \frac{1}{2n^2}$, что и доказывает равномерную сходимость ряда.

4.4. Так же, как и в предыдущем примере, из неравенства $(n^5x^2+1) \geq 2n^{2,5}|x|$ получим оценку $\left|\dfrac{nx}{(n^5x^2+1)}\right| = \dfrac{n|x|}{(n^5x^2+1)} \leq \dfrac{1}{2n^{1,5}}$, что опять доказывает равномерную сходимость ряда.

4.5. Найдем наибольшее значение функции $a_n(x) = x^2e^{-nx}$ на множестве $[0, +\infty)$ при помощи производной. Так как

$a_n'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2e^{-nx} = xe^{-nx}(2-nx)$, то убеждаемся (например, исследовав знак производной), что наибольшее значение $a_n(x)$ имеет при $x = 2/n$:

$\sup\limits_{[0,\infty]} a_n(x) = a_n(2/n) = \dfrac{4}{n^2}e^{-2}$, что и доказывает равномерную сходимость.

4.6. Поскольку $\left|x^n\right| \leq 2^n$ и $\left|x^{-n}\right| \leq (1/2)^{-n}$ при $1/2 \leq |x| \leq 2$, то $\left|x^n + x^{-n}\right| \leq 2^n + (1/2)^{-n} = 2^{n+1}$. Поэтому имеем оценку $\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}\left|x^n + x^{-n}\right| \leq \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$. А сходимость соответствующего мажорантного ряда следует из признака Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 \cdot \sqrt{n!} \cdot 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!} \cdot n^2 \cdot 2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} = 0$.

Задания 4.7, 4.8 и 4.9 выполнить самостоятельно.

<u>Задание 5:</u>

Исследовать на равномерную сходимость в указных промежутках следующие функциональные ряды:

5.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 1) на промежутке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, 2) на промежутке $[0, 2\pi]$;

5.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{1}{3^n x}$, $(0, +\infty)$;

5.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $(0, +\infty)$;

5.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $(-\infty, +\infty)$.

Решение.

5.1. Применим признак Дирихле. Докажем равномерную ограниченность (то есть ограниченность числом, не зависящем от x и N) $\sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx$. Для этого поступим так же, как в задании 3.3 занятия 4: домножив и разделив эту сумму на $2\sin\dfrac{x}{2}$, а затем применив формулы произведения синусов для каждого слагаемого, получим оценку $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx\right| = \left|\dfrac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right| \le \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}$, которая в любом замкнутом промежутке, не содержащем точек вида $2k\pi$, равномерно ограничена (числом $1/c$, где c – точная нижняя грань $\sin\dfrac{x}{2}$ на этом промежутке).

Осталось отметить монотонное стремление к нулю последовательности $1/n$, и равномерная сходимость ряда по признаку Дирихле в случае 1) доказана.

В случае 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ на промежутке $[0, 2\pi]$, как было доказано в задании 5 занятия 4, сходится в каждой точке, но рассуждение, использованное в предыдущем пункте, неприменимо в данном случае (знаменатель в правой части оценки частичной суммы стремится к нулю при $x \to 0$, поэтому правая часть неограниченно возрастает) . Покажем, что ряд на [0, 2π] сходится неравномерно. Для этого воспользуемся критерием Коши, т. е. укажем такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдутся $n, p \in \mathbb{N}$, $n > N$, и точка $x_n \in [0, 2\pi]$, для которых $\left|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\sin kx_n}{k}\right| \geq \varepsilon$. Заметим, что если взять $x_n = \frac{\pi}{6n}$, то при всех k, таких что $n \leq k \leq 5n$, будет $\sin kx_n \geq \frac{1}{2}$. Поэтому для любого N возьмем

$n = N + 1$, тогда имеем $\left|\sum_{k=n}^{5n} \frac{\sin kx_n}{k}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\sum_{k=n}^{5n} \frac{1}{k}\right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5n} \cdot 4n = \frac{2}{5}$. Следовательно, ряд сходится неравномерно на [0, 2π].

Важное замечание: признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Абеля и Дирихле – достаточные. Поэтому для доказательства того факта, что ряд сходится неравномерно, следует применять либо критерий Коши, либо его следствие – необходимый признак равномерной сходимости.

Второе важное замечание: из доказательства, приведенного в пункте 2), видно, что также ряд сходится неравномерно и на интервале (0, 2π). Этот пример показывает, что локальное свойство поточечной сходимости, выполненное на любом промежутке [ε, 2π-ε], естественно сохраняется и для их объединения – интервала (0, 2π), в то время как глобальное свойство равномерной сходимости для такого объединения может и не сохраняться, как в данном случае. Здесь отчетливо видна разница между локальными свойствами – то есть свойствами множества как совокупности отдельных точек – и глобальными, то есть относящимися к множеству в целом.

5.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$ при любом $x > 0$ сходится по теореме сравнения: $\sin\frac{1}{3^n x} \approx \frac{1}{3^n x}$ при $n \to \infty$ и $2^n \sin\frac{1}{3^n x} \approx \frac{2^n}{3^n x} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$. Что же касается равномерной сходимости, применим критерий Коши. Отрицание его формулировалось в решении 5.1. Взяв $\varepsilon = 1$, $p = n$, $x = 3^{-(n+1)}$, оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k \cdot \sin\frac{1}{3^k x}\right| = 2^{n+1}\sin 1 + 2^{n+2}\sin\frac{1}{3} + \ldots + 2^{2n}\sin\frac{1}{3^{n-1}} > 2^{n+1}\sin 1 > 1$$

при любом $n \geq 1$, что означает неравномерную сходимость.

5.3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ сходится при любом $x > 0$, так как все условия признака Лейбница для этого знакопеременного ряда выполнены. Воспользуемся известной оценкой остатка знакопеременного ряда: $|r_k(x)| \leq a_k = \frac{1}{x+k} < \frac{1}{k} \to 0$ при $k \to \infty$ независимо от x. Поэтому сходимость равномерная.

5.4. Применим признак Дирихле точно так же, как в задании 5.1. Докажем ограниченность $\sum_{n=1}^{N} \cos\frac{2n\pi}{3}$, домножив и разделив эту сумму на $2\sin\frac{\pi}{3}$ и сделав преобразования удвоенного произведения синуса и косинуса в разность синусов. Остается доказать равномерное стремление к нулю $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ при $n \to \infty$, что следует из оценки $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$.

Задание 6:

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-x}$ сходится равномерно при $x \geq 0$.

Решение.

Функции $\frac{1}{n^x} \leq 1$ при $x \geq 0$, и при каждом $x \geq 0$ соответствующая последовательность монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому равномерная сходимость следует из признака Абеля.

Задание 7:

Показать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ (полученный почленным дифференцированием первого ряда) сходятся равномерно на $-\infty < x < +\infty$ (по признаку Вейерштрасса). Поэтому $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и дифференцируема на $-\infty < x < +\infty$ и ее производная $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ также непрерывна.

Задание 8:

Доказать, что функция $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (дзета-функция Римана) непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

Решение. Рассмотрим в области $x > a$ для некоторого $a > 1$ ряды, полученные почленным дифференцированием по x исходного ряда несколько раз. Они имеют вид $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ для первой производной, и, например, взяв производную $(\ln n \cdot n^{-x})' = -\ln^2 n \cdot n^{-x}$, заключаем (обосновав это методом математической индукции), что для производных высших порядков получим ряды вида $(-1)^p \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$.

Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^a}$ сходится. Это следует из известного неравенства $\ln^p n < n^{\delta}$, верного для любого $\delta > 0$, любого натурального p при достаточно больших n (так как по правилу Лопиталя можно найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^p x}{x^{\delta}} = 0$). Взяв в этом неравенстве $\delta = \frac{a-1}{2}$, будем иметь оценку $\frac{\ln^p n}{n^a} \le \frac{n^{\delta}}{n^a} = \frac{1}{n^{a-0,5a+0,5}} = \frac{1}{n^{0,5(a+1)}}$, а так как a больше единицы, то, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^a}$ имеет сходящийся мажорантный ряд.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^a}$ по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость по x в области $x > a$ ряда. Из этого и непрерывности в этой области функции n^{-x} (по x) следует непрерывность всех рядов $(-1)^p \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$, являющихся в силу равномерной сходимости производными $\xi^{(p)}(x) = (-1)^p \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$. А так как это верно при любом $x > a$, где a – произвольное большее единицы, то это верно при любом $x > 1$.

Задание 9:

Найти

9.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$ (воспользоваться тем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$);

9.2 $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)$.

Решение.

9.1. В силу оценки $\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+n^2\right)}\le\frac{1}{n^2}$ для любого x и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ по признаку Вейерштрасса заключаем, что ряд сходится равномерно. Поэтому по свойству о пределе равномерно сходящегося ряда (свойство 8 пункт 2)) можно поменять порядок взятия пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

9.2. Применить правило предельного перехода под знаком суммы ряда, как в предыдущем пункте, нельзя, так как ряд сходится неравномерно на [0,1]. Действительно, такой ряд сходится на [0,1] и сумма такого ряда легко находится на множестве [0,1): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(x^n-x^{n+1}\right)=\lim\limits_{N\to\infty}\left(x-x^{N+1}\right)=x$; в точке $x=1$, очевидно, сумма ряда равна нулю. Поэтому на отрезке [0,1] сумма ряда – разрывная функция, что противоречило бы предположению о равномерной сходимости ряда на [0,1] (свойство 7, 2)).

Найдем предел непосредственным вычислением:

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{n+1}\right) = \lim_{x\to 1-0}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(x^n - x^{n+1}\right) = \lim_{x\to 1-0}\lim_{N\to\infty}\left(x - x^{N+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} x = 1.$$

ЗАНЯТИЕ 6. Степенные ряды.

Определение. *Степенным рядом называется ряд вида* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *, где* c_n ($n = 1, 2\ldots$), *z,* z_0 *- вообще говоря, комплексные числа,* c_n ($n = 1, 2\ldots$) *и* z_0 *- постоянные.*

1. Круг и радиус сходимости

Теорема: *Степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *сходится в круге* $|z - z_0| < R$ *с центром в точке* z_0 *, радиус* R *которого определяется по* ***формуле Коши – Адамара****:*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{c_n}}.$$

Эта формула имеет естественную интерпретацию в случаях, когда $R = 0$ *и когда знаменатель равен нулю: в первом случае ряд сходится в единственной точке, во втором при любом z (что можно обозначать получающимся по формуле в этом случае символическим выражением* $R = \infty$*).*

Также радиус R можно находить по ***формуле***

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| ,$$

если этот предел существует.

В любой точке внутри этого круга $\{z : |z - z_0| < R\}$ *степенной ряд сходится абсолютно. В любой точке z вне этого круга, то есть при* $|z - z_0| > R$, *он расходится. В точках z границы этого круга, то есть при* $|z - z_0| = R$ *, возможны все варианты поведения ряда.*

Все сказанное означает, что в случае степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ с действительными a_n, x, x_0 вместо круга будет интервал $\{x : |x - x_0| < R\} = (x_0 - R, x_0 + R)$ сходимости.

2. Основные свойства степенных рядов

1. На любом замкнутом множестве, лежащем внутри открытого круга сходимости, степенной ряд сходится равномерно. Из этого следует непрерывность суммы ряда внутри круга сходимости.

2. Если степенной ряд сходится в какой-либо точке z_1 границы, то он сходится равномерно на отрезке $[z_0, z_1]$. Тогда сумма ряда непрерывна на всем этом отрезке. В частности, для действительных рядов имеет место

Теорема Абеля: *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *сходится в концевой точке* $x = R + x_0$ *интервала сходимости, то*

$$S(R + x_0) = \lim_{x \to (x_0 + R)-} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

Если же в точке z_1 *границы ряд расходится, то сходимость ряда на* $[z_0, z_1)$ *не может быть равномерной.*

3. Сумма степенного ряда внутри круга сходимости имеет производные любого порядка (которые можно найти почленным дифференцированием ряда).

Из этих свойств вытекают следующие

3. <u>Действия со степенными рядами.</u>

1. Внутри общей области сходимости имеем:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(z-z_0)^n$.

2. Если степенной ряд действителен, то внутри интервала сходимости его можно почленно дифференцировать и интегрировать, причем интервал сходимости не изменится:

б) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n$;

в) $\int \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} (x-x_0)^{n+1}$.

4. Ряд Тейлора

Определение: *Для функции f(x), бесконечно дифференцируемой в точке a ее области определения, степенной ряд вида* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *называется ее* ***рядом Тейлора в точке a.***

Теорема. *Функция, равная сумме степенного ряда в промежутке его сходимости, имеет в этом промежутке производные всех порядков. Сам ряд по отношению к этой функции является ее рядом Тейлора.*

Если функция разлагается в окрестности точки a в ***ряд Тейлора****:* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, *то* ***остаточный член*** *этого ряда* $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ *может быть представлен в виде*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

*(**форма Лагранжа**).*

Известны пять **основных разложений** элементарных функций в ряд Тейлора:

1°. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty);$

2°. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty);$

3°. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty);$

4°. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (-1<x<1)$;

5°. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad (-1<x\le 1)$.

Задание 1.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение на границе интервала сходимости следующих степенных рядов:

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$;

1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(4n+1)}x^{2n-1}$;

1.3 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$;

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}(x+2)^n$;

1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}x^{2n} \quad (0<\alpha<1)$;

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$;

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$;

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}$;

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n, \quad a > 1.$

Решение.

1.1. Воспользуемся второй формулой для радиуса сходимости

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p} = 1.$ Поэтому интервал сходимости $(-1,1)$.

Исследуем поведение ряда в точках 1 и -1. При $x = 1$ имеем: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Этот ряд сходится при при $p > 1$ и расходится при остальных p. При $x = -1$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, который сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $0 < p < 1$, при остальных расходится.

1.2. Заметим вначале, что применение предыдущей формулы требует внимательности: $c_n = c_{2k-1} = \frac{2^{k-1}}{4k+1}$ при n нечетном и $c_n = c_{2k} = 0$ при n четном, поскольку мы должны помнить определение c_n как коэффициента при степени n переменной x. Таким образом, ее применить здесь нельзя. Можно применить формулу $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{c_n}}$, опять не забыв, что надо извлекать $\sqrt[2n-1]{\frac{2^{n-1}}{(4n+1)}}$. Но проще в таких случаях, когда в ряду встречаются не все степени x, применять к нему признак Даламбера (или Коши) непосредственно: ряд сходится абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{2^n x^{2n+1}}{(4(n+1)+1)}\right)\left(\frac{4n+1}{2^{n-1}x^{2n-1}}\right)\right| = \left|2x^2\right| < 1,$$

то есть при $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, и расходится, если этот предел больше единицы, то есть $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, интервалом сходимости является множество: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Проверим сходимость на концах. При $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ получим ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{4n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}^{2n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1} 2^{-0,5(2n-1)}}{4n+1} = 2^{-0,5} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n+1}$, который расходится.

В точке $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ряд отличается только знаком минус: $(-1)^{2n-1} = -1$, поэтому тоже расходится.

1.3. В этом случае воспользуемся формулой $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{c_k}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{3^{n^2}}} = \dfrac{1}{3}$.

На концах интервала сходимости $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$, очевидно, получатся ряды, общий член которых не стремится к нулю.

1.4. Для данного ряда можно применить любую из формул для радиуса сходимости. Тем не менее, удобно опять найти интервал сходимости непосредственно из признака Даламбера (чтобы не заботиться об определении центра этого интервала):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(5^{n+1} + (-3)^{n+1}\right)(x+2)^{n+1} n}{\left(5^n + (-3)^n\right)(x+2)^n (n+1)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1}\left(1 + (-0,6)^{n+1}\right)(x+2)}{5^n \left(1 + (-0,6)^n\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right| = 5|x+1| < 1$$

при $|x+1| < \dfrac{1}{5}$, то есть интервал сходимости $-\dfrac{6}{5} < x < -\dfrac{4}{5}$. На концах имеем:

при $x = -\dfrac{4}{5}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n + (-3)^n}{n} \cdot \dfrac{1}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 + (-0,6)^n}{n}$, а поскольку $\dfrac{1 + (-0,6)^n}{n} \approx \dfrac{1}{n}$, то по теореме сравнения ряд расходится.

При $x = -\dfrac{6}{5}$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + (-0,6)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,6^n}{n},$$

который равен сумме двух сходящихся рядов и поэтому сходится.

1.5. Применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^{n^2} x^{2n}} = x^2 \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0 < 1$ при $0 < \alpha < 1$, поэтому ряд сходится при любых x. Заметим, что при вычислении радиуса сходимости по формуле Коши – Адамара надо извлекать корень степени $2n$: получится $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{c_k}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\alpha^{n^2}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{n^2}{2n}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{n}{2}}} = \infty$.

1.6. Применим формулу Коши – Адамара: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}}$, а

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 + 1/n}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}, \text{ поэтому } R = 4 .$$

На концах интервала сходимости $-4 < x < 4$ имеем:

при $x = 4$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot 4^n$, общий член которого

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot 4^n = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{1-2n} \cdot 2^{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1-2n}{2n}}$$

не стремится к нулю при $n \to \infty$ (а стремится к $\frac{2}{e}$). Поэтому ряд расходится.

При $x = -4$ получится ряд, члены которого по модулю совпадают с членами предыдущего ряда, следовательно, для него также нарушено необходимое условие сходимости.

1.7. По признаку Даламбера получаем:

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. На концах интервала сходимости $-e < x < e$ имеем: при $x = e$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$. Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot n^n \cdot e}{(n+1)^{n+1}} = e \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = e \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$

$$= \exp\left(1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$= \exp\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Мы видим, что при достаточно больших n аргумент экспоненты положителен и эта величина больше единицы как экспонента положительного числа. Поэтому $a_{n+1} > a_n$ и общий член не может стремиться к нулю, ряд расходится. На левом конце интервала то же самое получится для модуля общего члена, который также не стремится к нулю и ряд тоже расходится.

1.8. Сделать самостоятельно. На концах воспользоваться интегральным признаком. *Ответ*: интервал сходимости (–3, 3), на концах: расходится при $x = 3$, сходится условно при $x = -3$.

1.9. По второй формуле для радиуса сходимости имеем

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$, поэтому интервал сходимости $(-4, 4)$. При $x = 4$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Опять рассмотрим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 4^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2 4^n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$= \frac{2n+1+1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1} > 1$. Снова получаем, что общий член возрастает и поэтому не стремится к нулю, ряд расходится. По этой же причине расходится и ряд на левом конце интервала.

1.10. По формуле Коши – Адамара имеем:

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Интервал сходимости $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$.

На правом конце получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$. Покажем, что, как и в предыдущих примерах, общий член не стремится к нулю. Действительно, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot e^{-n} = \exp\left(n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\right) =$

$= \exp\left(n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n\right) = \exp\left(n - \frac{1}{2} + o(1) - n\right) \to \exp(-0,5)$ при $n \to \infty$ (напомним, что $o(1)$ обозначает бесконечно малую величину). Снова заключаем, что на правом конце (и по той же причине на левом) ряд расходится.

1.11. Найдем радиус сходимости по второй формуле:

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!a^{(n+1)^2}}{(n+1)!a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1} = \infty$ при $a > 1$ (предел находим по правилу Лопиталя). Следовательно, этот ряд сходится при любых x.

<u>Задание 2</u>

Определить радиус и круг сходимости степенных рядов в комплексной области:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+3)}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!z^n}{(1+i)(1+2i)...(1+ni)}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

Решение.

2.1. Применим вторую формулу для радиуса сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}\right|=2$, при этом у нас ряд по степеням $z'=z-z_o,\quad z_o=1+i$, поэтому круг сходимости на комплексной плоскости задается соотношением $|z-(1+i)|<2$. Это круг с центром в точке $1+i$ радиуса 2.

2.2. Снова таким же образом получаем

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(1+i)^n\cdot(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)\cdot(1+i)^{n+1}}\right|=\left|\dfrac{1}{1+i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому область сходимости – круг с центром в 0 радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\left\{z:|z|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

2.3. Снова имеем по второй формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\cdot(1+i)(1+2i)...(1+ni)(1+(n+1)i)}{(1+i)(1+2i)...(1+ni)\cdot(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+(n+1)i)}{(n+1)}\right|=$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n+1}+i\right| = |i| = 1$. Поэтому круг сходимости имеет радиус 1 и центр в 0: $\{z : |z| < 1\}$.

2.4. Самостоятельно убедиться, что круг сходимости имеет радиус 1 и центр в 0: $\{z : |z| < 1\}$.

Задание 3

Сходятся ли равномерно в своем круге сходимости следующие ряды:

3.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$; 3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$; 3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$; 3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$?

Решение

3.1. Круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ легко найти: это круг $|z| < 1$. По теореме о равномерной сходимости степенного ряда на любом круге радиуса, меньшего, чем единица, он сходится равномерно. Вспомним необходимое условие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на некотором множестве E (см. занятие 5, пункт 4 теории): $\sup\limits_E |f_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому из нарушения этого условия будет вытекать отсутствие равномерной сходимости. В нашем случае $\sup\limits_{|z|<1} |z^n| = 1$ не стремится к нулю, так что ряд сходится неравномерно на $|z| < 1$.

Замечание: Можно доказать это и по-другому. Воспользуемся свойствами равномерно сходящихся рядов, чтобы доказать, что на всем круге $|z| < 1$ он не может сходиться равномерно. Как известно, сумма степенного ряда есть ограниченная и непрерывная функция на любом таком множестве, где ряд равномерно сходится. Рассмотрим любое подмножество замкнутого круга $|z| \le 1$, для которого точка $z = 1$ является предельной. Мы знаем, что при $|z| < 1$ сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Эта функция неограниченна при $z \to 1$. Поэтому на таком множестве ряд равномерно сходиться не может, а тем более на всем круге $|z|<1$.

3.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ также имеет круг сходимости $|z|<1$ (пример задания 1.1)). Несмотря на то, что необходимое условие равномерной сходимости на всем круге $|z|<1$ выполнено: $\sup_{|z|<1}\left|\frac{z^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, равномерной сходимости нет. В этом мы убедимся при помощи критерия Коши (занятие 5, пункт 3 теории): докажем, что при некотором $\varepsilon > 0$ для любого N найдутся числа n , $m > N$ и такие, что $\left|\frac{z^n}{n}+\ldots+\frac{z^m}{m}\right| > \varepsilon$. Будем брать $m = 2n$. Так как для любого n функция $\left|\frac{z^n}{n}+\ldots+\frac{z^{2n}}{2n}\right|$ непрерывна по z , то при z , достаточно близких к единице, будем иметь

$$\left|\frac{z^n}{n}+\frac{z^{n+1}}{n+1}\ldots+\frac{z^{2n}}{2n}\right| \ge \left|\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right| - \frac{1}{4} >$$
$$> \left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{4} = n\cdot\frac{1}{2n} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ .$$

Так что при $\varepsilon = 0{,}25$ и любом n выполнено отрицание требования критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда. Следовательно, ряд не сходится равномерно на множестве $|z|<1$.

3.3. У ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ область сходимости – вся комплексная плоскость. Известно, что сумма этого ряда равна $e^z - 1$. Но необходимое условие опять нарушено: $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\left|\dfrac{z^n}{n!}\right|=\infty$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Так что сходимость будет равномерной на любом ограниченном подмножестве, но неравномерной на всей комплексной плоскости.

3.4. Сделать самостоятельно. *Ответ:* сходится равномерно.

Задание 4

Пользуясь основными разложениями, разложить по степеням x следующие функции:

4.1 e^{-x^2}, 4.2 $\cos^2 x$, 4.3 $\dfrac{x^{10}}{1-x}$, 4.4 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$,

4.5 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, 4.6 $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$, 4.7 $\dfrac{1}{1+x^2}$, 4.8 $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Решение.

4.1. Принимая $-x^2=t$, используем разложение $e^t=1+t+...+\dfrac{t^n}{n!}+...$, и получим искомое разложение $e^{-x^2}=1-x^2+\dfrac{x^4}{2!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}+...$ с областью сходимости $\mathbb{R}$.

4.2. Воспользуемся формулой $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$ и применим разложения косинуса для $t=2x$ с областью сходимости $\mathbb{R}$:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-...+\frac{2^n x^n}{(2n)!}+...\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}.$$

4.3. Разложение функции $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...$ как предел частичных сумм геометрической прогрессии, равных $1+x+...+x^n = \dfrac{1-x^n}{1-x} \to \dfrac{1}{1-x}$ при $n \to \infty$ при условии, что $|x|<1$, хорошо известно из школьного курса. Его следует использовать при разложении в степенные ряды различных дробно-рациональных выражений. Например, в данной задаче просто рассмотрим произведение ряда на число x^{10}, не зависящее от n: $\dfrac{x^{10}}{1-x} = x^{10}\left(1+x+...+x^n+...\right) = x^{10}+x^{11}+...+x^{10+n}+... = \sum\limits_{m=10}^{\infty} x^m$, верное при любом $|x|<1$.

4.4. Разложение $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ получим из разложения $\dfrac{1}{(1-x)} = 1+x+...+x^n+...$, заметив, что $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)'$, и применив теорему о равномерной сходимости степенного ряда в любом замкнутом множестве внутри круга сходимости и, как следствие, возможности дифференцировать сумму степенного ряда почленно в области сходимости. Тогда имеем: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, который также можно переписать как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Область сходимости, как и у исходного ряда, $|x|<1$.

4.5. По свойствам логарифма, при $|x|<1$ исходная функция равна :

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n x^n}{n}\right) =$$

$= \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}+1)\dfrac{x^n}{n}$. Здесь мы воспользовались тем, что сходящиеся ряды можно почленно складывать. Это разложение лучше представить в другом виде: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$.

4.6. Разложим дробь $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ в сумму простых: $\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \frac{5x-12}{(x+6)(x-1)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-1}$. Найдем A и B. Напомним, как: $5x-12 = A(x-1) + B(x+6)$. Подставим в это тождество $x = 1$ и $x = 6$. Найдем $B = -1$ и $A = 6$. Разложение каждой дроби получим из геометрической прогрессии: $\frac{6}{x+6} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{6}\right)} = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{6}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6^n}$. Это разложение справедливо при $\left|\frac{x}{6}\right| < 1$, то есть $|x| < 6$, $\frac{-1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ справделиво при $|x| < 1$. Таким образом, опять почленно сложив два сходящихся ряда, получим разложение: $\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{6^n} + 1\right) x^n$, верное в общей области сходимости $|x| < 1$.

Заметим, что таким способом можно разложить любую дробь, все корни знаменателя которой действительны. В остальных случаях можно также пользоваться геометрической прогрессией.

4.7. $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-t}$, где $t = -x^2$. Поэтому при $|t| < 1$, а следовательно, при $|x| < 1$ имеет место разложение:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + ... + t^n + ... = 1 - x^2 + x^4 - ...(-1)^n x^{2n} + ... \quad .$$

4.8. Многочлен $1+x+x^2$ не имеет действительных корней, найдем корни в поле комплексных чисел: $z_{1,2}=0,5(-1\pm\sqrt{3}i)$. два взаимно сопряженных комплексных числа. Будем обозначать их z и $\overline{z}$. Тогда, домножив и разделив дробь на $(z-\overline{z})$, получим разложение на простые дроби:

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{z-\overline{z}}\cdot\frac{z-\overline{z}}{(x-z)(x-\overline{z})}=\frac{1}{z-\overline{z}}\cdot\frac{(x-\overline{z})-(x-z)}{(x-z)(x-\overline{z})}=\frac{1}{z-\overline{z}}\cdot\left(\frac{1}{x-z}-\frac{1}{x-\overline{z}}\right).$$

Для преобразования правой скобки заметим, что по теореме Виета числа z и $\overline{z}$ обладают свойством: $z\cdot\overline{z}=1$ и поэтому $\frac{1}{x-z}-\frac{1}{x-\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{x\overline{z}-1}-\frac{z}{xz-1}=\frac{z}{1-xz}-\frac{\overline{z}}{1-x\overline{z}}$. Каждую дробь разложим в комплексной области как сумму прогрессии: например при $|xz|<1$, то есть при $|x|<\frac{1}{|z|}$ имеем $\frac{z}{1-xz}=z\left(1+zx+\ldots+z^n x^n+\ldots\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n+1}x^n$. Затем сложим полученные ряды почленно, получим при $|x|<\frac{1}{|z|}$ (поскольку $|z|=|\overline{z}|$) разложение в ряд

$$\frac{1}{z-\overline{z}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(z^{n+1}-\overline{z}^{n+1}\right).$$

Из того, что $z\cdot\overline{z}=1$ получаем, что $|z|=1$ и поэтому $z=e^{i\varphi}$, так что $z^{n+1}-\overline{z}^{n+1}=e^{i\varphi(n+1)}-e^{-i\varphi(n+1)}=2i\sin(n+1)\varphi$, а область сходимости: $|x|<1$. Зная $z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \overline{z}=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, найдем аргумент φ и значение $\frac{1}{z-\overline{z}}$:

$\frac{1}{z-\overline{z}}=\frac{1}{\sqrt{3}i},\quad \varphi=\frac{2\pi}{3}$. Окончательно получим разложение в ряд с действительными коэффициентами, справедливое при $|x|<1$:

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}i}\sum_{n=0}^{\infty}2ix^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}.$$

Задание 5

Разложить по степеням x следующие функции:

5.1 $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$. Пользуясь этим разложением, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;

5.2 $f(x) = \arcsin x$;

5.3 $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

5.4 $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{1+x^2}$.

Решение.

5.1. Зная разложение в степенной ряд производной $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$ и пользуясь теоремой о возможности интегрировать степенной ряд внутри его области сходимости почленно, имеем $arctgx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^x t^{2n}dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. Это разложение верно при $|x|<1$. Докажем, что оно будет верно и для $x=1$. По теореме Абеля, если степенной ряд в точке границы области сходимости $x = R$ сходится, то его сумма $S(x)$ стремится к значению ее в этой точке: $\lim\limits_{x\to R-0} S(x) = S(R)$. Данный ряд при $x=1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится по признаку Лейбница. Поэтому его суммой по этой теореме будет $\lim\limits_{x\to 1-0} arctgx = arctg1 = \frac{\pi}{4}$. Так что $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Это то же самое, что $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Заметим, что с помощью такого ряда можно находить приближенное значение π с любой степенью точности.

5.2. Разложим производную арксинуса:

$$(\arcsin x)' = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-x^2\right)^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-x^2\right)^n+\ldots=1+\frac{1}{2}x+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)(-3)\ldots(-2n+1)}{2^n n!}(-1)^n x^{2n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}=$$

$=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, где $k!!$ обозначает произведение всех четных чисел, меньших или равных k, если k четно, и всех нечетных чисел, меньших или равных k, если k нечетно. Этот ряд сходится при $|x|<1$ (так как разложение $(1+t)^{\alpha}$, которым мы воспользовались при $t=-x^2$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, справедливо при $|t|<1$). Внутри интервала сходимости можно интегрировать степенной ряд почленно, поэтому для любого $|x|<1$ имеем (интегрируя от 0 до x):

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\ .$$

Заметим, что, пользуясь некоторыми более тонкими методами исследования сходимости рядов, чем те, что приведены у нас (например, по известному признаку Раабе), можно доказать, что при $|x|=1$ этот ряд сходится, и тогда аналогично, как и в предыдущем примере, получится, что для $|x|=1$ это разложение также имеет место.

5.3. Сделать самостоятельно, снова воспользовавшись разложением производной. *Ответ:* $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $\quad |x|\le 1$.

5.4. Сначала заметим, что $\left(x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\right)'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,

затем воспользуемся уже полученным разложением и, проинтегрировав его от 0 до x при любом $|x|\le 1$ (так как на таком отрезке, как следует из предыдущего, ряд сходится равномерно), получим

$$x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$ при любом

$|x|\le 1$. Заметим, что свободный член в правой части можно получить как по формуле Ньютона – Лейбница при интегрировании левой части:

$\left(t\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)-\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^x=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+1$, так и при неопределенном интегрировании степенного ряда, вычислив затем константу C путем подстановки $x=0$.

Задание 6

Разложить в степенной ряд функции:

6.1 $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$; 6.2 $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

Решение.

6.1. Разложим в степенной ряд (пользуясь разложением 1°) подынтегральную функцию: $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+...$. Разложение справедливо при всех x, а следовательно ряд справа сходится равномерно на любом отрезке. Поэтому для любого x можно проинтегрировать этот ряд почленно от 0 до x:

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}+...(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}+... ;$$

6.2. Разложение подынтегральной функции получим, поделив обе части равенства $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$ (разложение 2^o) на x (для ряда в правой части деление на число равносильно делению каждого члена на это число): $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + ...$. Мы делили на $x \neq 0$, но разложение можно считать справедливым, как и исходное, для любых x, если при $x = 0$ функцию в левой части доопределить по непрерывности единицей. Снова равномерная сходимость на любом отрезке дает право проинтегрировать этот ряд почленно от 0 до x и получить искомое разложение, справедливое при любом x: $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} + ...$.

Задание 7

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов

7.1 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...$;

7.2 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...$;

7.3 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$;

7.4 $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + ...$.

Решение.

7.1 Данный ряд сходится на множестве $|x| < 1$. В этом легко убедиться, найдя формулу общего члена: $a_n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ и применив признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)+1}(2n+1)}{(2(n+1)+1)x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2 (2n+1)}{(2n+3)} = |x|^2 < 1$$

. Поскольку $(-1)^{2n+1} = -1$, то на обоих концах ряд равен $\pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, то есть расходится. Внутри области сходимости его можно почленно дифференцировать, получим ряд $1+x^2+x^4+...+x^{2n}+...$, который является геометрической прогрессией и его сумма при $|x|<1$ равна $\frac{1}{1-x^2}$. Поэтому, проинтегрировав этот ряд от 0 до x при $|x|<1$, что в силу равномерной сходимости на таком отрезке можно делать почленно, получим

$$x+\frac{x^3}{3}+...\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ .$$

Здесь модуль можно опустить, так как при $|x|<1$ данная дробь положительна.

7.2. Точно так же убеждаемся, что область сходимости этого ряда $|x|<1$. На концах теперь знакопеременный ряд лейбницева типа $\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ сходится. Почленное дифференцирование дает ряд $1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$, который является геометрической прогрессией со знаменателем $-x^2$, которая имеет сумму $\frac{1}{1+x^2}$. Поэтому исходный ряд имеет сумму $\operatorname{arctg} x$. Отличие от предыдущего примера состоит только в том, что равномерная сходимость исходного ряда на отрезке $[-1,1]$ и, следовательно, непрерывность его суммы в точках –1 и 1 справа и слева соответственно означают, что его сумма равна $\operatorname{arctg} x$ на всем отрезке $[-1,1]$.

7.3. Данный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Обозначим его сумму $S(x)$. Область сходимости его $\mathbb{R}$. Поэтому для любого x его можно почленно дифференцировать. Получим ряд $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$

Сравнивая сумму этих двух абсолютно сходящихся рядов и разложение 1° для e^x, нетрудно заметить, что $S(x)+S'(x)=e^x$. Подставив в это разложение $-x$

вместо x: $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$, мы заметим, что $e^{-x}=S(x)-S'(x)$. Выразив из этих двух уравнений $S(x)$, окончательно получаем: $S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$.

7.4. Наш ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, и область его сходимости: $|x|<1$. Причем на концах ряд сходится абсолютно, так как ряд из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ по теореме сравнения сходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Обозначим его сумму на отрезке $[-1,1]$ через $S(x)$. Продифференцировав этот ряд почленно, получим новый ряд

$S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)}$. Он будет похож на разложение 4° для логарифма, если домножить его на $x^2\neq 0$:

$$x^2S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Возьмем в разложении 4° вместо x переменную $(-x)$:

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Сходится этот ряд для $-1\le x<1$. Сравнивая эти разложения, можем написать: $x^2S'(x)=-x-\ln(1-x)$, поэтому для определения $S(x)$ надо найти первообразную для функции $S'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}$. (Заметим, что из этого равенства следует, что правая часть имеет такой же предел, что и левая, при $x\to 0$, а сумма ряда из производных $S'(x)$ непрерывна в 0). Последнее выражение интегрируется, напомним, по частям:

$$-\int \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx = \int \ln(1-x)d\,\frac{1}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \int \frac{1}{x}d\ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{x} + \int \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Напомним вычисление последнего интеграла

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{(1-x)+x}{x(1-x)}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \ln|x| + \ln(1-x) + C \ .$$

Здесь не нужен модуль у последнего логарифма при $x<1$. Все это вместе дает: $S(x) = -\ln|x| + \dfrac{\ln(1-x)}{x} + \ln|x| + \ln(1-x) + C = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)\ln(1-x) + C$. Как уже отмечалось, сумма ряда $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Поэтому константу можно определить по значению суммы ряда в нуле. С одной стороны, подставив в исходный ряд $x=0$, получим $S(0)=0$. С другой стороны в силу непрерывности

$$S(0) = \lim_{x\to 0}\frac{1-x}{x}\ln(1-x) + C = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} + C = -1 + C \ .$$

(Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{1-x} = -1$ по правилу Лопиталя). Поэтому $C=1$.

Итак, при $|x|<1$ сумма исходного ряда $S(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)\ln(1-x) + 1$ при $x \neq 0$ и 0 при $x=0$. Так как ряд сходится на всем отрезке $[-1,1]$, включая концы, и $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$, по теореме Абеля можно утверждать, что $S(x)$ есть сумма ряда и при $x=-1$, а при $x=1$ суммой ряда будет $\lim\limits_{x\to 1}\left(1 + \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)\right) = 1$.

<u>Задание 8</u>

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы следующих рядов

8.1 $\quad x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$; 8.2 $\quad x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$;

8.3 $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$.

Решение.

8.1. Ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, область сходимости $-1<x<1$. Он получается умножением на x ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\ldots nx^{n-1}+\ldots$. Этот ряд, очевидно, имеет такую же область сходимости. Если обозначить его сумму $S(x)$, то исходный ряд имеет сумму $xS(x)$. Новый ряд можно проинтегрировать почленно от 0 до x при любом $-1<x<1$. Получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n=\dfrac{1}{1-x}-1$. Таким образом, исходный ряд при $-1<x<1$ имеет сумму

$$xS(x)=x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{x}{(1-x)^2} .$$

8.2. Ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$. Область сходимости его $-1<x<1$. Снова представим его как $x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}\equiv S(x)$. Проинтегрировав новый ряд, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n\equiv\tilde{S}(x)$. С этим рядом, отличающимся от ряда из предыдущего примера множителями $(-1)^{n-1}$, проделаем все то же самое, в итоге получим новый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n=-\left(\frac{1}{1+x}-1\right) .$$

Тогда $\tilde{S}(x)=x\left(-\dfrac{1}{1+x}+1\right)'=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. А так как $x\cdot\tilde{S}'(x)=S(x)$, то окончательно имеем $S(x)=x\left(\dfrac{x}{(1+x)^2}\right)'=x\dfrac{1-x}{(1+x)^3}$ при $-1<x<1$.

8.3. Сначала проинтегрируем этот ряд с областью сходимости $-1<x<1$ почленно:

$$\int\limits_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

Новый ряд снова проинтегрируем (каждый раз интегрирование ведется от 0 до значения x, находящегося внутри области сходимости), $\int\limits_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}-1$. Отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, затем находим сумму исходного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\left(x^2\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$ при $-1<x<1$.

Задание 9

Пользуясь разложениями в степенной ряд, вычислить с указанной точностью значения следующих величин:

9.1 e с точностью до $0{,}000001$; 9.2 $ln\,1{,}2$ с точностью до $0{,}0001$;

9.3 π с точностью до $0{,}001$;

с точностью до $0{,}001$ интегралы:

9.4 $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$; 9.5 $\int\limits_0^2\dfrac{\sin x}{x}dx$.

Решение.

9.1. Заметим, что каждое разложение в ряд Тейлора из $1^{\circ}-5^{\circ}$ является формальным выражением того факта, что остаточный член в формуле Тейлора n-го порядка стремится к нулю при $n\to\infty$ и таким образом значение функции является пределом n-й частичной суммы данного ряда, которая есть многочлен Тейлора n-го порядка. Из разложения по формуле Тейлора e^x с остаточным членом в форме Лагранжа при $x = 1$ получим $e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n$, где $R_n = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$. Следовательно, если при некотором n будет $R_n < 0,000001$, то сумма справа и даст искомое приближение. Из оценки $|R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0.000001$ следует, что достаточно найти n такое, чтобы было $(n+1)! > 3000000$. Простым перебором получаем $n = 9$. Поэтому берем для нашего приближения первые 10 слагаемых:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{9!} = 2,5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} =$$
$$= 2,718282\ldots$$

9.2. Разложение 4° при $x = 0,2$ таково:

$\ln 1,2 = 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{0,2^n}{n} + \ldots$. Этот ряд знакопеременный и потому остаток оценивается первым из своих членов: $|R_n| < \frac{0,2^{n+1}}{(n+1)}$. Будем искать первое такое n, чтобы $\frac{0,2^{n+1}}{(n+1)} < 0,0001$. Это $n = 4$:

$\frac{1}{5^5 \cdot 5} = \frac{1}{25 \cdot 25 \cdot 25} \cdot \frac{4^2}{4^2} = \frac{1}{100 \cdot 100} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} < \frac{1}{10000}$. Поэтому нужное приближение дают первые четыре слагаемых:

$$\ln 1,2 \approx 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} - \frac{0,2^4}{4} = 0,2 - \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{3} - \frac{0,0016}{4} = 0,2 - 0,02 +$$
$$+ 0,002(6) - 0,004 = 0,2026(6) - 0,0204 \approx 0,1823.$$

9.3. Как уже отмечалось, для нахождения приближенного значения π можно пользоваться разложением, полученным в примере 5.1: $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, также используя для оценки погрешности свойства знакопеременных рядов. Но знакопеременные ряды, сходящиеся лишь условно, очень медленно сходятся (как следует из их характера сходимости: не за счет быстрого убывания величины их членов, а за счет перемены знака), поэтому данный способ приведет к необходимости брать очень большое число членов ряда: из оценки $\frac{1}{2n+1}<0,0001$ следует, что первое такое n = 5000. Поэтому следует поискать другие ряды, дающие π. Например, тот, что был получен в примере 5.2:

$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$. Полагая в нем x = 0,5 , получим

$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)}$. Оценим n-й остаток ряда

$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^{2k+1}\cdot(2k)!!(2k+1)}$, пользуясь тем, что $\frac{1}{2k+1}\le\frac{1}{2n+3}$ при всех $k\ge n+1$ и $\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=\frac{(2k-1)}{2k}\cdot\frac{(2k-3)}{(2k-2)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}$, так что в каждом следующем слагаемом в этом выражении добавляются новые сомножители по сравнению с предыдущим, каждый из которых меньше единицы. Поэтому $\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\le\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$ при всех $k\ge n+1$. Поэтому оценить остаток можно через геометрическую прогрессию так:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)}\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}<\frac{1}{2^{2n+3}}\cdot\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=$$

$$=\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{2^{2n+3}}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}.$$

Поскольку из разложения в ряд $\frac{\pi}{6}$ разложение для π получится умножением на 6, то нам остается простым перебором убедиться, что оценка $\frac{6}{2n+3}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\leq 0,001$ справедлива при $n=4$. Поэтому достаточно взять первые пять членов разложения:

$$\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{48}+\frac{3}{1280}+\frac{5}{14336}+\frac{35}{72\cdot 8192}=0,52359...$$

Окончательно имеем : $\pi\approx 3{,}142$.

9.4. Воспользуемся разложением $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$, полученным в примере 6.1. Для приближенного вычисления при помощи этого разложения $\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt$ надо подставить в ряд $x=1$: $\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}+...(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\cdot n!}+...$. Поскольку этот ряд знакопеременный, левая часть этого равенства отличается от суммы первых n членов ряда на величину, не превосходящую по модулю модуль следующего члена ряда. Поэтому нужная точность приближения получится при таком n, для которого будет справедлива оценка: $\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}<0,001$.

Простым перебором находим первое число, обладающее этим свойством: $n=4$. Поэтому требуемое приближение:

$$\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}=0,747...$$

9.5. Воспользуемся разложением

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} + \ldots$$, полученным в примере 6.2.

Подставим $x = 2$. Имеем $\int_0^2 \frac{\sin t}{t}dt = 2 - \frac{2^3}{3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} + \ldots$.

Снова, как в предыдущем случае, для знакопеременного ряда оцениваем погрешность следующим членом ряда $\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!}$. Тогда

$\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!} < 0{,}001$ при $n = 3$. Поэтому с точностью до 0,001

$$\int_0^2 \frac{\sin t}{t}dt \approx 2 - \frac{2^3}{3\cdot 3!} + \frac{2^5}{5\cdot 5!} - \frac{2^7}{7\cdot 7!} = 2 - \frac{4}{9} + \frac{4}{75} - \frac{8}{7\cdot 21\cdot 15} = 1{,}605\ldots$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В. А. Математический анализ, часть 1. – М., Наука, Гл. ред. Физ.-мат. литер., 1981.(или Изд-е 3-е, 2001)
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 2, Изд. 8-е, Сер. Физ.-мат. , 2002.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1 и 2, М., Наука, 1969, 1970.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - Москва, Гл. изд-во ФМ литер., 1962 .(или АСТ, 2000)
5. Ляшко И.И., Боярчук. А.К., Гай И.И., Головач Г.П. Антидемидович. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2. М.: Едиториал УРСС, 2003.

Подписано в печать Формат 60x90/16

Объем Тираж

Заказ

119991, Москва, Ленинский просп., 65

Государственное унитарное предприятие

Издательство «Нефть и газ» РГУ им. И.М.Губкина

Тел.: 135-84-06, 930-97-16. Факс: 135-74-16