МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ НЕФТЕХИМИЧЕСКОЙ И ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ им. И. М. ГУБКИНА

М. А. Гусейнзаде, М. Б. Добкина, Л. И. Другина,
Н. С. Никольская, О. Н. Петрова, Т. С. Соболева

Утверждено Советом института в качестве учебного пособия

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие по математике для студентов вечернего факультета и филиалов МИНХ и ГП

МОСКВА — 1979

УДК 53:51

Настоящее пособие создано на основе курса лекций, читаемых в МИНХ и ГП кафедрой высшей математики студентам дневного факультета, где количество часов, отведенных на изучение курса уравнений математической физики, ограниченно.

© Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина, 1979 г.

ГЛАВА I.

КЛАССИФИКАЦИЯ И ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Читатель уже знаком с обыкновенными дифференциальными уравнениями, т. е. с уравнениями, в которых неизвестная функция одной переменной содержится под знаком производной или дифференциала. Так, относительно функции $y = y(x)$ уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = f(x)$$

является примером обыкновенного (линейного) дифференциального уравнения второго порядка.

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией более чем одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Например:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$,

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$,

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}$.

Максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) от неизвестной функции называется порядком уравнения в частных производных. Так, уравнение 1) в предыдущем примере является уравнением 1-го порядка в частных производных, а уравне-

ния 2) и 3)—второго порядка. Решением уравнения в частных производных называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, произвольная функция $u = f(x + at)$ является решением первого из приведенных уравнений. Аналогично функция

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \quad (r \neq 0)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Легко проверяется, что функция

$$u = c_1(x^2 - z^2) + c_2(y^2 - z^2) + \\ + c_3 xy + c_4 yz + c_5 zx,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — произвольные постоянные, также является решением уравнения (1), т. е. мы сумели указать бесчисленное множество решений уравнения (1).

Рассмотрим еще один пример уравнения, решение которого несложно получить:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

предполагая, что неизвестная функция v является функцией переменных x и y. Данное уравнение можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$, откуда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_1(y), \quad v(x, y) = \varphi_1(y) \cdot x + \varphi_2(y),$$

где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ являются произвольными функциями, т. е. рассмотренное нами уравнение также имеет бесчисленное множество решений.

Итак, можно утверждать, что решение уравнения в частных производных (как и обыкновенных дифференциальных) определяется неоднозначно. Как выделить из всего множества решений уравнения одно, интересующее нас, будет показано ниже, а сейчас рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике уравнения в частных производных.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К основным уравнениям математической физики относят следующие уравнения в частных производных второго порядка:

1) Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z} = f(x, y, z) \tag{2}$$

называется уравнением Пуассона в трехмерном пространстве. Если в этом уравнении $f(x, y, z) \equiv 0$, то оно называется уравнением Лапласа:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Для двухмерного пространства уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

для одномерного

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

В некоторых задачах удобно использовать уравнение Лапласа не в декартовых координатах, а в цилиндрических в случае трехмерного пространства или в полярных для плоского случая.

В цилиндрических координатах ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$) уравнение Лапласа запишется как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{5}$$

и для плоского случая в полярной системе координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) оно будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (2)—(6) также называются уравнениями эллиптического типа.

К исследованию уравнения Лапласа и Пуассона приводит рассмотрение задач о стационарном процессе. К ним относятся, в частности, задачи гидродинамики, диффузии, фильтрации, стационарного распределения температуры и т. д.

2) Уравнение теплопроводности или пьезопроводности

Уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{7}$$

называется уравнением параболического типа и описывает неустановившийся режим тепломассового обмена.

Оно имеет вид для плоского случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{8}$$

для одномерного

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Как уже было отмечено, к исследованию уравнений (7 — 9) приводят задачи нестационарного массо- и теплообмена, в частности, исследование задач о неустановившемся режиме распространения тепла (при этом в уравнениях (7) — (9) a^2 означает коэффициент температуропроводности, а u — температуру в любой точке исследуемой области в любой момент времени), о фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде ($a^2 = \varkappa$ — коэффициент пьезопроводности; под u мыслится давление в любой точке исследуемой среды), о неустановившейся диффузии ($a^2 = D$ — коэффициент диффузии, u — концентрация), о течении жидкости в магистральных трубопроводах, если инерционное слагаемое мало по сравнению с трением о стенки трубы (под u понимают давление или скорость для капельной жидкости и массовую скорость для газа).

Если при рассмотрении этих задач окажется, что в исследуемой области функционируют внутренние источники и стоки массы или внутренние источники тепла, то уравнение следует записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, z, t) = \\ = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{10}$$

где функция $f(x, y, z, t)$ характеризует интенсивность функционирующих источников. Уравнение (10) также называют уравнением параболического типа.

Уравнения (7) — (10) являются простейшими уравнениями параболического типа. Уравнение (7) записано в декартовых координатах. В цилиндрических координатах оно будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \tag{11}$$

в полярной системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \tag{12}$$

3) Волновое уравнение

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{13}$$

называется уравнением гиперболического типа; оно описывает процессы, носящие волновой характер, и потому также называется волновым. Для плоского случая оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Волновым уравнением можно описать следующие процессы:

а) поперечные колебания струны (при этом под u понимают поперечное отклонение струны от недеформированного состояния),

б) продольные колебания упругого стержня (u — продольное отклонение частицы от ее положения при отсутствии деформации),

в) течение жидкости или газа в коротких трубах, когда трением о стенки трубы можно пренебречь (под u понимают давление, скорость или расход жидкости).

В цилиндрических координатах уравнение (13) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \tag{16}$$

Отметим еще, что если есть воздействие внешних сил на струну в задаче *а*, или массовых сил в задаче *б*, или функционируют внутренние источники массы в задаче *в*, то вместо, например, уравнения (15) надо рассматривать уравнение

$$f(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{17}$$

В уравнениях (13)—(17) коэффициент a есть скорость звука в данной среде. Следует особо отметить, что a не есть скорость движущейся частицы, а является скоростью передачи состояния и зависит от физических свойств среды. Так например, значения скорости звука различны при течении различных нефтепродуктов (или же газа) по трубе.

4) Телеграфное уравнение

Установившееся течение жидкости в трубах описывается системой уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + f(x, t) = \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2au, \\ -\dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial p}{\partial t} + g(x, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \tag{18}$$

где функция $f(x, t)$ характеризует место и работу насосных станций в трубопроводе (в случае капельной жидкости), а $g(x, t)$ — место и интенсивность отборов и подкачек. При отсутствии отборов и насосных станций ($f(x, t) \equiv 0$ и $g(x, t) \equiv 0$) система (18) может быть сведена к одному уравнению относительно давления $p(x, t)$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2a}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{19}$$

или относительно массовой скорости $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2a}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{20}$$

такого вида уравнения называют телеграфными. Решение уравнений (19) или (20) имеет волновой характер, но с затухающей амплитудой. Степень затухания зависит от значения величины a, характеризующей трение о стенки трубы. Телеграфное уравнение так же, как и волновое, относят к уравнениям гиперболического типа. Отметим, что в приведенных выше уравнениях x, y и z означают декартовы координаты, параметр t — время.

§ 3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Как уже отмечалось выше, решения приведенных уравнений в частных производных определяются неоднозначно. Вообще говоря, решение какого-либо из этих уравнений не может служить решением какой-либо физической задачи. Для решения конкретной физической задачи необходимо знать, какое именно из этих уравнений следует решать и при каких дополнительных условиях, диктуемых характером задачи. Так например, если имеет место течение жидкости к совершенной по степени вскрытия и характеру скважине в „плоском" пласте, то исходя из (6), давление $p(x, y)$ определяют из уравнения

$$\frac{d^2p}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dp}{dr} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$p = c_1 + c_2 \ln r$$

при произвольных значениях постоянных c_1 и c_2. Для определения этих постоянных необходимо задание двух дополнительных условий, вытекающих из характера задачи. Такими условиями, например, могут быть задание давления p_k на контуре питания $r = R_к$ и дебита или давления $p_н$ на забое скважины $r = R_c$. В этом случае решение задачи имеет вид

$$p = p_н + \frac{p_к - p_н}{\ln \frac{R_к}{R_c}} \ln \frac{r}{R_c}.$$

Таким образом, чтобы обеспечить единственность решения конкретной физической задачи, необходимо, помимо уравнения, наложить на искомую физическую величину еще дополнительные условия, характер которых определяется физическим явлением. ~~описывающим данное~~

~~уравнение~~. Эти дополнительные условия задаются в форме так называемых граничных и начальных условий. Совокупность граничных и начальных условий называют краевыми условиями задачи. При этом, если уравнение описывает установившийся или стационарный процесс, т. е. процесс, при котором искомая физическая величина, изменяясь от точки к точке, остается постоянной во времени, дополнительное условие для искомой величины достаточно задать только в форме граничных условий. Если же процесс, описываемый уравнением, является неустановившимся, т. е. искомая физическая величина изменяется не только в зависимости от пространственных координат, но и от времени, дополнительные условия для искомой физической величины следует задать как в форме граничных условий по пространственным координатам, так и начальных условий по времени. Сформулируем граничные и начальные условия для приведенных основных уравнений математической физики.

Граничные условия для уравнений эллиптического типа

Уравнения Пуассона (2) и Лапласа (3)—(4) относятся к числу уравнений в частных производных, описывающих установившиеся процессы. Для определения физических величин, участвующих в этих процессах, следует, как уже было отмечено, помимо уравнения, решением которого является искомая величина, сформулировать граничные условия, т. е. условия на границе области, в которой ищется решение. Если искомая функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет ~~условию~~ уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(или вообще любому из уравнений (2)—(4)) во всех внутренних точках некоторой области, ограниченной поверхностью s, то на границе s следует задать одно из трех условий

$$u(x, y, z)|_s = \varphi_1(p), \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = \varphi_2(p), \tag{22}$$

$$\left(\alpha u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n}\right)_s = \varphi_3(p), \tag{23}$$

где p — текущая точка границы s, $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает в условии (22) производную от искомой функции по направлению внешней нормали к поверхности s. Условия (21) — (23) называют граничными условиями соответственно I, II, III рода. Задача интегрирования уравнения Лапласа с граничным условием I рода называется задачей Дирихле. Если ставится условие II рода, то такая задача называется задачей Неймана. В частности, если уравнение Лапласа описывает установившийся режим фильтрации, а функция $u(x, y, z)$ определяет давление в каждой точке пласта, то граничное условие (21) означает, что в точках поверхности s задается давление (например, давление на забое скважины и на контуре питания при плоско-параллельном течении); задание граничного условия II рода равносильно заданию потока фильтрующейся жидкости, т. е. дебита в каждой точке p границы s.

При рассмотрении стационарного распределения температуры (u—температура в любой точке области, ограниченной поверхностью s) формулировка граничных условий будет сводиться к заданию значения или искомой функции u — температуры в точках поверхности s (граничное условие I рода (21) или теплового потока в точках поверхности s (граничное условие (22)). Это условие встречается, например, в задачах о распространении тепла в пласте под действием нагревателя, закачиваемого в скважину. В том случае, когда на границе s не заданы значения ни температуры, ни теплового потока, но известен коэффициент теплоотдачи от внешней среды к телу, граничное условие будет формулироваться равенством (23) (граничное условие III рода). Граничное условие III рода возникает также при рассмотрении задачи о фильтрации жидкости в пласте, когда имеет место переток жидкости в выше- или нижележащие пласты.

Отметим еще, что граничное условие (23) является наиболее общим, включающим (21) и (22) как частные случаи.

Граничные и начальные условия для уравнения параболического типа

Уравнение теплопроводности (7) — (10) описывают нестационарные процессы, и следовательно, как уже отмечалось, дополнительные условия для искомой функции следует сформулировать в форме граничных и начальных условий. Чтобы задать начальное условие, нужно знать

в начальный момент ($t = 0$) распределение искомой физической величины

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = u_0(x, y, z).$$

Это может быть начальное пластовое давление при решении уравнения пьезопроводности в задаче о фильтрации жидкости в упругой пористой среде, начальное распределение температуры при решении задачи о нестационарном распределении температур, начальное распределение концентрации для уравнения диффузии и т. д.

Функция $u_0(x, y, z)$ задается из конкретных условий или определяется из условий задачи, в частности она может быть константой.

Так, при рассмотрении задачи о неустановившемся течении жидкости в магистральном трубопроводе давление в любом сечении его, если пренебречь инерционным слагаемым, определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{24}$$

Если до начала неустановившегося режима движение в трубопроводе отсутствовало, то начальное условие определяется константой

$$p(x, t)|_{t=0} = p_0 = \text{const}.$$

Если же в трубопроводе имело место установившееся течение жидкости, а при $t = 0$ в силу каких-либо причин (например, изменили давление или расход хотя бы на одном конце трубопровода) изменился режим его работы, то начальное распределение давления $p_0(x)$ будет определяться из уравнения (24) с учетом граничных условий, имевших место при начальном установившемся режиме

$$p|_{x=0} = p_н, \quad p|_{x=l} = p_к$$

(l — длина трубопровода), а именно,

$$\frac{\partial^2 p_0(x)}{\partial x^2} = 0.$$

Отсюда имеем

$$p_0(x) = p_н + \frac{p_к - p_н}{l} x,$$

т. е. начальное условие определяется линейной функцией.

Граничные условия для уравнений (7) — (10) формулируются аналогично тому, как это было сделано для уравнения Лапласа (условия (21) — (23)), но поскольку уравнение типа теплопроводности описывает нестационарные процессы, то и условия на границе рассматриваемой области, которым подчиняют искомую физическую величину, будут содержать функцию, в общем случае зависящую от времени, т. е. если мы определяем функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

во всех внутренних точках области, ограниченной поверхностью s, то на границе s функция $u(x, y, z, t)$ должна удовлетворять одному из условий:

$$u(x, y, z, t)|_s = \varphi_1(p, t) \quad \text{(граничное условие I рода)}, \quad (25)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = \varphi_2(p, t) \quad \text{(граничное условие II рода)}, \quad (26)$$

$$\left(\alpha u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \right)_s = \varphi_3(p, t) \quad \text{(граничное условие III рода)}, \quad (27)$$

где p — текущая координата поверхности s.

Так, при решении уравнения (24), записанного относительно давления $p(x, t)$ в любом сечении $x (0 \leqslant x \leqslant l)$ магистрального трубопровода, возможно задание граничных условий следующими равенствами.

I. Значения давления на концах трубопровода при $t > 0$:

$$p(x, t)|_{x=0} = \varphi_1(t),$$

$$p(x, t)|_{x=l} = \varphi_2(t),$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — известные функции времени. Например,

$$\varphi_1(t) = p_н(1 + \cos \omega t), \quad \varphi_2(t) = p_к,$$

или

$$\varphi_1(t) = p_{н_1} [\sigma(t) - \sigma(t - t_1)] +$$
$$+ p_{н_2} [\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)] + p_{н_3} \sigma(t - t_2).$$

II. Значение давления в начале трубопровода ($x = 0$), а в конце его ($x = l$) — значение расхода (или производной от искомой функции по x):

$$p(x, t)|_{x=0} = \varphi_1(t),$$

$$\left.\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \varphi_2(t).$$

В частном случае, если конец трубопровода закрыт, то

$$\left.\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0.$$

III. В начале ($x = 0$) и в конце ($x = l$) трубопровода могут задаться расходы

$$\left.\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(t),$$

$$\left.\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \varphi_2(t).$$

Граничные и начальные условия для волнового и телеграфного уравнений

Граничные условия для волнового и телеграфного уравнений задаются теми же условиями (25) — (27), что и для уравнения теплопроводности. Но поскольку волновое и телеграфное уравнения содержат по переменной t производную второго порядка, то для указанных уравнений должно быть сформулировано два начальных условия:

$$u(x,\ y,\ z,\ t)|_{t=0} = \psi_1(x,\ y,\ z), \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2(x,\ y,\ z). \tag{29}$$

Если u — потенциал скорости, то условие (28) равносильно заданию начального распределения потенциала скоростей, а условие (29) — начальному распределению давлений или деформаций.

Для системы (18), учитывая, что и $u(x,\ t)$ и $p(x,\ t)$ содержатся под знаком производной по переменной t, также следует задать два начальных условия: начальное распределение давления

$$p(x,\ t)|_{t=0} = p_0(x)$$

и начальное распределение скорости

$$u(x,\ t)|_{t=0} = u_0(x).$$

Граничных условий ~~тоже должно быть два~~. Это может быть, например, давление $(p(x, t)|_{x=0} = p_н(t))$ или расход $(u(x, t)|_{x=0} = u_н(t))$ в начале трубопровода и в конце его — одно из условий: давление $(p(x, t)|_{x=l} = p_к(t))$ или расход $(u(x, t)|_{x=l} = u_к(t)_2)$. В том случае, если краевые условия для системы (18) удается записать относительно одной из функций $u(x, t)$ или $p(x, t)$, то, как правило, решают не систему уравнений, а одно уравнение (19) или (20).

Таким образом, для уравнения (15), описывающего одномерное распространение волны, необходимо знание, например, значения u на концах $x = 0$ и $x = l$, а также значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$. Первыми (граничными) условиями, например, могут быть

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

что означает закрепление концов при колебании струны. Таким образом, причиной возмущения, т. е. появления колебания в струне, могут быть $u|_{t=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$, где u означает смещение точек струны от положения равновесия $(u(x) \equiv 0)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ — скорость смещения. Поясним последние условия. Для этого рассмотрим различные (возможные) условия, приводящие к колебанию струны (рис. 1).

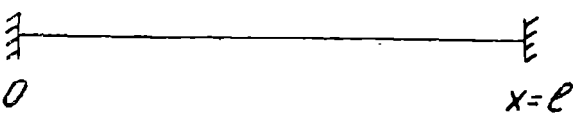

Рис. 1

I. Струне дали определенную начальную форму (рис. 2) и предоставили самой себе без начальной скорости. В этом случае начальными условиями будут

$$u|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Функцию $f(x)$ определяют, исходя из начальной формы струны. Например, для условия рис. 2, *б* она имеет вид

$$u|_{t=0} = f(x) = \frac{x(l-x)}{l}.$$

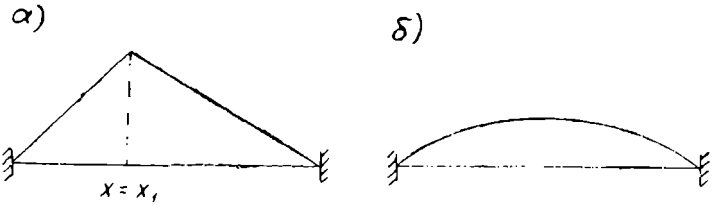

Рис. 2

В этом случае причиной колебания струны (т. е. причиной волнового движения) является удаление струны от положения равновесия и предоставление самой себе.

II. При условиях I возможно задание также начальной скорости (например, толчок). В этом случае начальными условиями будут

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x).$$

Если в условиях I решение задачи будет зависеть только от $f(x)$, т. е. от начальной формы струны, то в условиях II оно зависит как от начальной формы $f(x)$, так и от начального распределения скорости $\varphi(x)$.

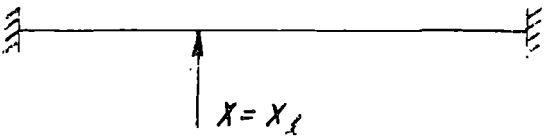

Рис. 3

III. Колебание струны возможно и без изменения начального положения (т. е. начальной формы), если задать начальную скорость (рис. 3). При этом начальные условия примут вид

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x).$$

На решение задачи будет влиять только распределение начальной скорости $\varphi(x)$.

Вывод уравнений течения жидкости в круглых трубах

В предыдущих параграфах указывалось, что с помощью уравнений математической физики описывают те или иные физические процессы. В частности, поле давления в трубопроводе может быть описано уравнением теплопроводности. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим конкретное физическое явление: неустановившееся течение жидкости в трубопроводе.

Пусть имеем неустановившееся течение жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе. Обозначим среднее давление в сечениях трубы I—I и II—II через $p(x, t)$ и $p(x+dx, t)$ (рис. 4). Сила трения, действующая на боковую поверхность элементарного круглого цилиндра, заключенного между сечениями I—I и II—II, будет равна

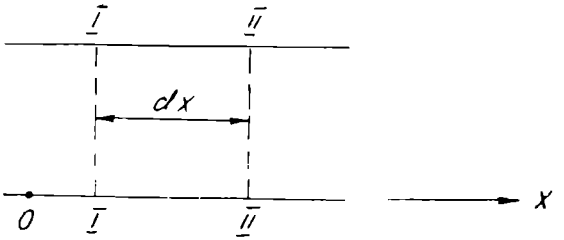

Рис. 4

$\tau \varkappa dx$, где $\varkappa$ — смоченный периметр, а τ — касательное напряжение. Сумма всех сил, действующих на выделенный элементарный цилиндр, будет равна

$$\tau \varkappa\, dx + F(p(x+dx, t) - p(x, t)) =$$

$$= \tau \varkappa\, dx + F\, \frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

здесь через F обозначена площадь поперечного сечения трубы.

По принципу Даламбера эта сумма всех действующих сил равна силе инерции:

$$-\frac{d(mw)}{dt} = -\frac{d(\rho F\, dx\, w)}{dt} = -F\frac{d(\rho w)}{dt}\, dx.$$

По теореме импульсов дифференциал количества движения $d(\rho w F)\, dx$ равен элементарному импульсу всех действующих сил (в проекциях на ox)

$$-\left[\tau \varkappa\, dx + F\frac{\partial p}{\partial x} dx\right] dt. \tag{30}$$

Через w обозначена средняя по сечению скорость движения жидкости, ρ — плотность. Итак, из теоремы импульсов имеем

$$\frac{d(\rho w)}{dt} = -\frac{\varkappa \tau}{F} - \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{31}$$

Как известно,

$$\frac{d(\rho w)}{dt} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} =$$

$$= w\frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t}.$$

Так как скорость w мало меняется по длине трубы, то первым слагаемым правой части последнего выражения можно пренебречь по сравнению со вторым и считать

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \approx \frac{d(\rho w)}{dt}.$$

И тогда вместо (31) будем иметь

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = -\frac{\tau\varkappa}{F} - \frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (32)$$

Касательное напряжение τ определено (для установившегося течения) опытным путем по формуле

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{1}{8}\lambda w^2,$$

а

$$\frac{\varkappa}{F} = \frac{1}{\delta},$$

где δ — гидравлический радиус, λ — гидравлическое сопротивление. С учетом двух последних равенств уравнение течения (32) перепишем в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\lambda}{8\delta}\rho w^2. \qquad (33)$$

Выведем теперь уравнение неразрывности (или материального баланса). Количество жидкости, проходящей через сечения I—I, и количество жидкости, проходящей через II—II, не равны между собой, т. е.

$$Fv(x, t) \neq Fv(x + \Delta x, t),$$

где v — массовая скорость, $v = \rho w$.

За время Δt разность между количеством притока жидкости в рассматриваемый элементарный цилиндр $Fv(x, t)$ и утечкой из этого объема $Fv(x + \Delta x, t)$ приводит к изменению плотности жидкости в объеме. Если $v(x, t) > v(x + \Delta x, t)$, то в объем притекает больше жидкости, чем вытекает из него, и это приводит к увеличению

плотности, т. е. $\rho(x_1 t+\Delta t)>\rho(x_1 t)$. Изменение количества жидкости в данном объеме за время Δt составит

$$[v(x+\Delta x,\ t)-v(x,\ t)]\,F\Delta t.$$

Изменение массы в том же объеме за время Δt будет

$$-[\rho(x,\ t+\Delta t)-\rho(x,\ t)]\ F\Delta x.$$

Так как из закона сохранения массы эти количества равны, то получим

$$\frac{v(x+\Delta x,\ t)-v(x,\ t)}{\Delta x}=-\frac{\rho(x,\ t+\Delta t)-\rho(x,\ t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, будем иметь уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{34}$$

Так как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}$$

и

$$\frac{dp}{d\rho}=c^2,$$

где c — скорость звука в данной среде, то уравнение (34) примет вид

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial x}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{35}$$

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений для определения p, ρ, w:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x}=\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\dfrac{\lambda}{8\delta}\rho w^2 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t}=c^2\,\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial x}. \end{cases} \tag{36}$$

К этой системе следует добавить еще уравнение состояния.

Система (36) является нелинейной, и в общем случае ее решение может быть получено численным методом. Для получения расчетных формул аналитическим путем пользуются линеаризованной системой уравнения. Один

из способов линеаризации состоит в том, что величину $\frac{\lambda w}{8\delta}$ заменяют ее средним значением:

$$\frac{\lambda w}{8\delta} \approx \left(\frac{\lambda w}{8\delta}\right)_{\text{ср}} = 2a.$$

Тогда система (36) примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial t} + 2\,a(\rho w) \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} = c^2\,\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial x} \end{cases} \tag{37}$$

Эту систему можно свести к телеграфному уравнению

$$c^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2a\,\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{38}$$

Для магистральных трубопроводов потеря давления на трение обычно превосходит инерционное слагаемое, и поэтому в первом уравнении системы (37) можно пренебречь слагаемым $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}$ по сравнению со слагаемым $2\,a(\rho w)$. Тогда из системы (37) легко получается уравнение для определения p

$$c^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2\,a\,\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Это уравнение типа теплопроводности. Для коротких трубопроводов потеря давления на трение обычно невелика, и можно пренебречь слагаемым $\frac{\rho\lambda}{8\,R\delta}\,w^2$ в системе (36) по сравнению с инерционным слагаемым.

Тогда систему (36) легко свести к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

При решении конкретной физической задачи мы не можем исходить только из уравнения, а как было указано выше, должны учесть некоторые дополнительные условия. Сформулируем эти условия для случая, когда пренебрегают инерционным слагаемым. Условия по времени — так называемые начальные условия — могут быть следующие:

1) если в начальный момент времени $t=0$ движение в трубопроводе отсутствовало, то давление в трубопроводе в этот момент имело постоянное значение p_0. Таким образом, математическая запись этого начального условия имеет вид

$$p(x,\ t)|_{t=0} = p(x,\ 0) = p_0;$$

2) если к моменту $t=0$ в трубопроводе установилось течение, такое, что в начале трубопровода поддерживается постоянное давление $p_н$, а в конце трубопровода давление $p_к$, то начальное условие будет иметь вид

$$p(x,\ t)|_{t=0} = p_н + \frac{p_к - p_н}{l} x$$

(l — длина трубопровода).

Могут быть заданы и другие начальные условия. Рассмотрим теперь некоторые из возможных граничных условий, т. е. условий в начале и конце трубопровода.

1) На концах трубопровода изменения давления поддерживаются в заданном режиме в зависимости от времени, т. е.

$$p(x,\ t)|_{x=0} = p(0,\ t) = f_1(t),$$

$$p(x,\ t)|_{x=l} = p(l,\ t) = f_2(t),$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — известные функции времени.

2) В начале трубопровода ($x=0$) известно изменение давления, а на его конце ($x=l$) — изменение расхода:

$$p(x,\ t)|_{x=0} = p(0,\ t) = \varphi_1(t),$$

$$\left.\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \varphi_2(t),$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — известные функции времени.

3) Иногда решается задача о движении жидкости в так называемом полубесконечном трубопроводе. При этом считается, что трубопровод достаточно длинный, так что при исследовании процессов, происходящих вблизи начала трубопровода, не ощущается наличие конца его, по крайней мере, первое время. Тогда, если в начале трубопровода предполагается известным давление $p_н$, то вторым условием будет требование ограниченности $p(x,\ t)$ и $\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial x} = 0$ при $x \to \infty$.

ГЛАВА II.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Решение уравнений гиперболического типа

а) Решение смешанной задачи для однородного гиперболического уравнения при нулевых граничных условиях.

Получить решение конкретной физической задачи, т. е. проинтегрировать соответствующее уравнение с учетом определенных краевых условий, диктуемых характером задачи, можно различными методами. ~~В этой работе~~ Мы будем пользоваться только методом разделения переменных (метод Фурье) и методом интегрального преобразования Фурье.

Для решения многих задач математической физики применяется метод разделения переменных, или метод Фурье, который является одним из самых распространенных методов решения уравнений с частными производными. Рассмотрим его на примере решения волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{39}$$

при граничных условиях

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0 \tag{40}$$

и начальных условиях

$$\begin{aligned} &а)\quad u|_{t=0} = \varphi(x), \\ &б)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ &\qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \end{aligned} \tag{41}$$

Решение задачи будем искать в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая только от t, т. е.

$$u(x,\ t) = T(t) \cdot X(x), \tag{42}$$

где $T(t)$ — функция, зависящая от t, и $X(x)$ — функция, зависящая от x. Так как мы считаем, что ~~уравнение~~ (42) удовлетворяет уравнению (39), то, подставляя эту функцию $u(x,\ t)$ в уравнение (39), получим

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x) \tag{43}$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{44}$$

Чтобы функция (42) была решением уравнения (39), равенство (44) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений переменных $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$.

Правая часть равенства (44) является функцией только переменного x, а левая — только t. Следовательно, в силу того, что x и t — независимые переменные, равенство (44) возможно лишь в том случае, если величина входящих в него отношений будет постоянной. В самом деле, если бы эти отношения зависели от соответствующих переменных, то, изменяя слева t и не меняя справа x, мы не могли бы иметь равенства для всех значений x и t.

Обозначим эту пока неизвестную постоянную через $-\lambda^2$, где λ — действительное число. Тогда из (44) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0,$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{45}$$

которым должны удовлетворять функции $X(x)$ и $T(t)$.

Общие решения уравнений (45) имеют вид

$$T(t) = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t,$$

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x. \tag{46}$$

Следовательно,

$$u(x,\ t) = X(x)T(t) =$$

$$= (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x)(A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t). \tag{47}$$

Функция $u(x,\ t)$ должна удовлетворять граничным условиям (40) и начальным условиям (41). Из первого граничного условия $u(0,\ t) = 0$ имеем

$$u(0,\ t) = (A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t)\, C = 0.$$

Так как первый множитель не может тождественно равняться нулю, то $C = 0$. Поэтому

$$u = (A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t) D \sin \lambda x.$$

Внесем D в скобки и, обозначив AD через $\tilde{A}$ и BD через $\tilde{B}$, получим

$$u = (\tilde{A} \cos a\lambda t + \tilde{B} \sin a\lambda t) \sin \lambda x. \tag{48}$$

Используя второе граничное условие $u(l, t)$, получим

$$u(l, t) = (\tilde{A} \cos a\lambda t + \tilde{B} \sin a\lambda t) \sin \lambda l = 0, \tag{49}$$

откуда

$$\sin \lambda l = 0,$$

и, следовательно,

$$\lambda = \frac{k\pi}{l} \tag{50}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$

Каждому значению $\lambda = \lambda_k = \frac{(k\pi)}{l}$ соответствует частное решение уравнения (39):

$$u_k = \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{51}$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

Легко проверить, что сумма

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{52}$$

($k = 0$ дает лишь тождественно равное нулю решение) удовлетворяет уравнению и граничным условиям (40) в силу линейности и однородности уравнения (39) и граничных условий (40).

Подберем теперь постоянные A_k и B_k таким образом, чтобы сумма (52) удовлетворяла начальным условиям (41). Полагая в равенстве (52) $t = 0$ и принимая во внимание начальное условие (41 а), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{53}$$

Равенство (53) означает, что функция $\varphi(x)$ разложена в интервале $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам; поэтому из известных формул для нахождения коэффициентов Фурье имеем

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \tag{54}$$

Чтобы найти коэффициенты B_k, используем начальное условие (41 б). Продифференцируем равенство (52) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{l} \left(-A_k \sin \frac{ak\pi}{l} t + \right.$$

$$\left. + B_k \cos \frac{ak\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{55}$$

Полагаем в равенстве (55) $t = 0$. Принимая во внимание начальное условие, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{l} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Отсюда, как и в случае нахождения коэффициентов A_k, имеем:

$$B_k = \frac{2l}{ak\pi l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{2}{ak\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \tag{56}$$

Ряд (52), в котором A_k и B_k вычислены по формулам (54) и (56), дает решение нашей задачи.

Примечание. Если бы мы взяли вместо $-\lambda^2$ выражение $+\lambda^2$, то второе уравнение (45) приняло бы вид

$$X'' - \lambda^2 X = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Отличное от нуля решение в такой форме не может удовлетворять краевым условиям (40), как нетрудно убедиться непосредственными вычислениями. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение второго уравнения (45) имеет вид

$$X(x) = ax + b.$$

Граничные условия дают

$$X(0) = [ax + b]_{x=0} = b = 0,$$

$$X(l) = al = 0,$$

т. е. $a = 0$ и $b = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

Пример 1. Струна, закрепленная в концах $x = 0$ и $x = 2$, в начальный момент $t = 0$ имеет форму параболы с уравнением $u = 2x - x^2$, причем начальная скорость точек струны $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. Найти смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, зная, что коэффициент $a = 1$.

Решение. Это задача о свободных колебаниях конечной закрепленной струны. Решение ее сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = 1). \tag{а}$$

Так как концы $x = 0$ и $x = 2$ закреплены, то соответствующие граничные условия будут

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases} \tag{б}$$

Начальные условия:

$$u(x, 0) = 2x - x^2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{в}$$

Ищем решение уравнения (a) в виде

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x),$$

т. е.

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (\lambda > 0).$$

Получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Характеристические уравнения, отвечающие им, совпадают:

$$k^2 + \lambda^2 = 0 \quad (k = \pm i\lambda).$$

Поэтому общие решения этих уравнений есть

$$T(t) = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t,$$

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

Тогда

$$u = T(t) \cdot X(x) = (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t)(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x).$$

Наша функция $u(x, t)$ должна удовлетворять краевым условиям (б).

Следовательно, при $x = 0$ имеем

$$0 = (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) C.$$

Отсюда $C = 0$ и

$$u(x, t) = (AD \cos \lambda t + BD \sin \lambda t) \sin \lambda x.$$

Обозначим неизвестный коэффициент AD одной буквой, например A, а BD — буквой B. Тогда

$$u = (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) \sin \lambda x.$$

При $x = 2$ имеем

$$u(2, t) = (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) \sin 2\lambda = 0.$$

Отсюда

$$\sin 2\lambda = 0, \ 2\lambda = k\pi \ (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda = \frac{k\pi}{2}.$$

Каждому значению k отвечает значение $\lambda = \lambda_k$, и поэтому соответствующее частное решение u_k имеет вид

$$u_k = \left(a_k \cos \frac{k\pi}{2} t + b_k \sin \frac{k\pi}{2} t \right) \sin \frac{k\pi}{2} x,$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Сумма ряда из u_k

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{2} t + b_k \sin \frac{k\pi}{2} t \right) \sin \frac{k\pi}{2} x$$

удовлетворяет уравнению (а) и краевым условиям (б).

Подберем теперь a_k и b_k так, чтобы эта сумма удовлетворяла и начальным условиям (в):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k\pi}{2} a_k \sin \frac{k\pi}{2} t + \right.$$

$$\left. + \frac{k\pi}{2} b_k \cos \frac{k\pi}{2} t \right) \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

Полагая $t = 0$ в рядах для u и $\frac{\partial u}{\partial t}$, получаем в силу начальных условий

$$2x - x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{2} x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2),$$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{2} b_k \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

Эти два ряда дают разложения в ряды Фурье по синусам функций

$$\varphi(x) = 2x - x^2, \quad \psi(x) \equiv 0.$$

Коэффициенты Фурье для функции, тождественно равной нулю, должны быть все равны нулю. Следовательно,

$$\frac{k\pi}{2} b_k = 0.$$

Отсюда $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Найдем a_k, интегрируя по частям:

$$a_k = \int_0^2 (2x - x^2) \sin \frac{k\pi}{2} x dx =$$

$$= (2x - x^2)\left(-\frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} x \right)\Bigg|_0^2 +$$

$$+ \frac{4}{k\pi} \int_0^2 (1 - x) \cos \frac{k\pi}{2} x dx = \ldots =$$

$$= -\frac{16}{k^3\pi^3} \cos \frac{k\pi}{2} x \Bigg|_0^2 = + \frac{16}{k^3\pi^3} (1 - \cos k\pi) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{32}{k^3\pi^3} & \text{при } k = 2n - 1 \\ 0 & \text{при } k = 2n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \times$$

$$\times \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} t \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} x.$$

Эта функция и будет решением поставленной задачи.

Решение смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения при нулевых граничных условиях

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{57}$$

которое описывает колебательное движение под действием силы $f(x, t)$. Присоединив к нему граничные и начальные условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \tag{58}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = \psi(t), \tag{59}$$

будем решать поставленную смешанную задачу (57) — (59).

По аналогии с обыкновенными линейными неоднородными уравнениями вынужденные колебания можно представить как результат сложения двух колебательных движений, из которых одно есть чисто вынужденное колебание, т. е. такое, которое совершается под действием силы $f(x, t)$ при нулевых начальных условиях, а другое — свободное.

Аналитически это приводит к представлению решения $u(x, t)$ в виде суммы $v(x, t) + w(x, t)$, где $w(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t); \tag{60}$$

$$\text{(а) } w|_{x=0} = 0; \text{ (б) } w|_{x=l} = 0; \tag{61}$$

$$\text{(а) } w|_{t=0} = 0, \text{ (б) } \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{62}$$

и дает чисто вынужденные колебания, а функция v удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{63}$$

$$\text{(а) } v|_{x=0} = 0, \quad \text{(б) } v|_{x=l} = 0, \tag{64}$$

$$\text{(а) } v|_{t=0} = \varphi(x); \text{ (б) } \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{65}$$

и дает свободное колебание.

Составив сумму $v + w$, убеждаемся, что она дает решение нашей задачи. Метод отыскания функции v был разобран в § 1. Поэтому необходимо найти лишь функцию w, которую будем искать в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{66}$$

Для этой функции граничные условия (61) выполняются автоматически. Подставляем ряд (66) в уравнение (57), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \times$$

$$\times \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x + f(x, t). \tag{67}$$

Для удобства обозначим $\frac{a\pi n}{l} = \omega_n$, тогда (67) можно переписать в виде

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)\right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{68}$$

Функция $f(x, t)$, рассматриваемая как функция от x при фиксированном t, может быть разложена в ряд Фурье по $\sin \frac{\pi n}{l} x$:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{69}$$

причем

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(u, t) \sin \frac{\pi n}{l} u du. \tag{70}$$

Сравнивая разложения (68) и (69), получаем

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t) \tag{71}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Далее из первого начального условия (62 а) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0, \tag{72}$$

откуда

$$T_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{73}$$

Точно так же из второго начального условия (62 б) вытекает, что

$$T_n'(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{74}$$

Таким образом, для определения $T_n(t)$ нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t)$$

с условиями $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, можно показать, что

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau)\, d\tau. \qquad (75)$$

Подставив это равенство в (66), получим функцию $W(x, t)$, дающую решение задачи (60) — (62).

Пример 2. Однородный стержень длины l совершает продольные колебания под действием силы $f(x, t) = \sin \omega t$. Один конец стержня ($x = 0$) закреплен, другой ($x = l$) свободен. Начальные смещения отсутствуют, начальная скорость в каждой точке стержня равна нулю. Найти зависимость смещения точек стержня от времени ($a = 1$).

Решение. Уравнение такого колебания будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \omega t. \qquad (а)$$

Закрепленный конец стержня $x = 0$ означает, что

$$u(0, t) = 0. \qquad (б)$$

Свободный конец $x = l$ характеризуется тем, что в нем нет напряжений, а это эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \qquad (в)$$

Далее начальные условия будут

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (г)$$

Решение этой задачи ищем в виде

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

При такой форме решения граничные условия (б) и (в) принимают вид

$$X(0) \cdot T(t) = 0,$$

$$X'(l) \cdot T(t) = 0,$$

так как $T(t) \neq 0$, то из этих формул получаем новую форму граничных условий:

$$X(0) = 0, \; X'(l) = 0. \qquad (д)$$

однородное

Подставив решение $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ в уравнение (а), получаем:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad \cancel{(\lambda > 0)}.$$

Приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

$$X'' + \lambda^2 T = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Используя граничные условия (д), получаем:

$$A = 0,$$

$$X'(l) = -A\lambda \sin \lambda l + B\lambda \cos \lambda l = B\lambda \cos \lambda l = 0;$$

$B \neq 0$, так как иначе $X(x) \equiv 0$, следовательно, $\cos \lambda l = 0$. Отсюда

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

или

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\right)\pi.$$

Таким образом, для различных n имеем

$$X_n(x) = B \sin \lambda_n x = B \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x.$$

Положим $B = 1$. Разложим функцию $\sin \omega t$ в ряд Фурье по $\sin \lambda_n x$.

Для этого полагаем:

$$\sin \omega t = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \sin \lambda_n x,$$

где

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}.$$

Подсчет коэффициентов Фурье дает

$$F_n(t) = \frac{2}{\lambda_n l} \sin \omega t \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. разложение имеет вид

$$\sin \omega t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n l} \sin \omega t \cdot \sin \lambda_n x.$$

Ищем теперь решение задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x.$$

Такое решение удовлетворяет граничным условиям:

$$u''_{tt} = \sum_{n=0}^{\infty} T''_n(t) \sin \lambda_n x,$$

$$u''_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) (-\lambda_n^2 \sin \lambda_n x).$$

Подставляем в уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t)) \sin \lambda_n x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n l} \sin \omega t \sin \lambda_n x.$$

Перенесем все члены в одну сторону:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - \frac{2}{\lambda_n l} \times \right.$$

$$\left. \times \sin \omega t \right] \sin \lambda_n x = 0.$$

Отсюда видно, что сумма ряда Фурье равна нулю при всех значениях x, следовательно, все коэффициенты этого ряда равны нулю, т. е.

$$T''_n + \lambda_n^2 T_n = \frac{2}{\lambda_n l} \sin \omega t \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad \text{(е)}$$

Таким образом, для нахождения $T_n(t)$ осталось решить линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решение такого уравнения имеет вид

$$T_n = T_n^* + \bar{T}_n,$$

где $\bar{T}_n$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, ~~которое имеет вид~~

$$\bar{T}_n = A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t,$$

T_n^* — частное решение неоднородного уравнения, которое можно искать методом вариации произвольных постоянных или методом неопределенных коэффициентов.

1) Если $\omega \neq \lambda_n$, то

$$T_n^* = a_n \cos \omega t + b_n \sin \omega t.$$

Подставляем это выражение в уравнение (*е*), получаем

$$a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l\lambda_n\left(\lambda_n^2 - \omega^2\right)}.$$

Отсюда

$$T_n(t) = A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t +$$

$$+ \frac{2 \sin \omega t}{l\lambda_n\left(\lambda_n^2 - \omega^2\right)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, решение уравнения будет

$$u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \sin \omega t}{l\lambda_n\left(\lambda_n^2 - \omega^2\right)} \right) \sin \lambda_n x. \qquad (ж)$$

Постоянные A_n и B_n определяем из начальных условий:

$$u(x,\ 0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x,$$

$$u_t(x,\ 0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \lambda_n + \frac{2\omega}{l\lambda_n\left(\lambda_n^2 - \omega^2\right)} \right] \sin \lambda_n x.$$

Отсюда получаем

$$A_n = 0,$$

$$B_n = \frac{2\omega}{l\lambda_n\left(\omega^2-\lambda_n^2\right)} \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Окончательное решение задачи имеет вид

$$u(x,\ t) = \frac{2\omega}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n t\cdot\sin\lambda_n x}{\lambda_n\left(\omega^2-\lambda_n^2\right)} +$$

$$+\frac{2\,\omega\sin\omega t}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n\left(\lambda_n^2-\omega^2\right)},$$

где

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2l}\pi\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

2) Теперь разберем случай $\omega = \lambda_k$ (случай резонанса), где k — одно из значений $n = 0,\ 1,\ \ldots$.

Тогда частное решение T_n^* при $n = k$ нужно искать в виде

$$T_k^* = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

После подстановки в уравнение (e) получаем

$$T_k^* = -\frac{2t}{l\omega\lambda_k}\sin\omega t.$$

Таким образом, будем иметь:

$$T_n^*(t) = A_n\cos\lambda_n t + B_n\sin\lambda_n t +$$

$$+\frac{2\sin\omega t}{l\lambda_n\left(\lambda_n^2-\omega^2\right)}$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \neq k),$$

$$T_k^*(t) = A_k\cos\lambda_k t + B_k\sin\lambda_k t -$$

$$-\frac{2t}{l\omega\lambda_k}\sin\omega t.$$

Слагаемое T_k^* в формуле (ж) будет стоять отдельно, а в сумме нужно убрать слагаемое с номером $n = k$. Подстановка начальных условий производится аналогично и приводит к окончательному результату.

Решение неоднородного гиперболического уравнения при неоднородных граничных условиях

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{76}$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = \alpha(t),$$
$$u(l, t) = \beta(t) \tag{77}$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{78}$$

Будем искать решение этой задачи при помощи некоторой вспомогательной неизвестной функции $v(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \tag{79}$$

где $w(x, t)$ подберем таким образом, чтобы задача нахождения неизвестной функции $v(x, t)$ была с однородными граничными условиями. Итак, имеем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2(v_{xx} + w_{xx}) + f(x, t). \tag{80}$$

Отсюда получаем:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x, t) - (w_{tt} - a^2 w_{xx}). \tag{81}$$

Граничные условия для $v(x, t)$ имеют вид:

$$v(0, t) = \alpha(t) - w(0, t),$$
$$v(l, t) = \beta(t) - w(l, t). \tag{82}$$

Подберем $w(x, t)$ так, чтобы

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \tag{83}$$

откуда

$$\begin{cases} w(0, t) = \alpha(t), \\ w(l, t) = \beta(t). \end{cases} \tag{84}$$

В качестве $w(x, t)$ можно взять любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую

условиям (84). Например, $w(x, t)$ может быть линейной относительно x функцией вида:

$$w(x, t) = \alpha(t) + \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t)). \tag{85}$$

Таким образом, для нахождения функции $v(x, t)$ имеем следующую задачу:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t) = a^2 v_{xx} + f(x, t) - \\ - \left\{ \alpha_{tt}(t) + \frac{x}{l}(\beta_{tt} - \alpha_{tt}) \right\} \tag{86}$$

с граничными условиями:

$$v(0, t) = 0, \ v(l, t) = 0$$

и начальными условиями:

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \left[\alpha(0) + \frac{x}{l}(\beta(0) - \alpha(0)) \right], \\ v_t(x, 0) = \psi(x) - \left[\alpha'(0) + \frac{x}{l} \ \beta'(0) - \alpha'(0) \right]. \tag{87}$$

Решение такой задачи было рассмотрено в § 2.

Решение уравнений параболического типа

Метод разделения переменных применялся во всех предыдущих случаях к уравнениям гиперболического типа. Схема применения его в уравнениях параболического типа остается прежней.

Пусть требуется решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial p}{\partial t} \tag{88}$$

при условиях

$$p|_{x=0} = p|_{x=l} = 0, \tag{89}$$

$$p|_{t=0} = f(x). \tag{90}$$

Будем искать решение уравнения (88) в виде произведения двух функций, одна из которых, как описано в § 1, зависит только от x, а вторая только от t, т. е.

$$p(x, t) = X(x)T(t). \tag{91}$$

Подставляя это выражение в (88), получим

$$X''T = a^2 XT'.$$

Разделив обе части последнего равенства на $X \cdot T$, получим

$$\frac{X''}{X} = a^2 \frac{T'}{T}. \tag{92}$$

В левой части равенства (92) содержится функция, которая зависит только от x, а в правой — только от t, а так как x и t независимы между собой, то равенство (92) возможно лишь при условии, что левая и правая части равны постоянной величине, которую обозначим $-\lambda^2$.

Итак, получим

$$\frac{X''}{X} = a^2 \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \tag{93}$$

(выбор знака постоянной определяется аналогично тому, как это было сделано на стр. 23), или

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{94}$$

$$a^2 T' + \lambda^2 T = 0. \tag{95}$$

Мы получим уравнения (94) и (95), которые представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Общие решения этих уравнений имеют вид

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \tag{96}$$

$$T = Ce^{-\frac{\lambda^2}{a^2} t}, \tag{97}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

Подставляя найденные выражения в (91), имеем

$$p(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)\, Ce^{-\frac{\lambda^2}{a^2} t}$$

Функция $p(x, t)$ должна удовлетворять условиям (89), а так как при $C \neq 0$ $T(t) \not\equiv 0$, то условию (89) должна удовлетворять функция $X(x, t)$. Подставляя значения $x = 0$, $x = l$ в равенство (96), получим на основании (89):

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \quad 0 = A \cos \lambda l + B \sin \lambda l.$$

Отсюда

$$A = 0, \ \sin \lambda l = 0, \ \lambda = \frac{\pi n}{l}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Итак, имеем

$$X = B \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Найденные числа λ называются собственными значениями для данной краевой задачи, а функции, им соответствующие, $X(x)$ называются собственными функциями. Для каждого n будем иметь решение уравнения (88), удовлетворяющее условиям (89):

$$p_n(x, t) = D_n \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{a^2 l^2} t}$$

$$(D_n = C \cdot B_n).$$

Таким образом, мы получили множество решений, сумма которых снова будет решением уравнения (88) в силу его линейности, удовлетворяющим условию (89). Функция

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{a^2 l^2}} \tag{98}$$

будет решением нашей задачи, если она удовлетворяет условию (90).

Подставим в (98) $t = 0$; тогда на основании (90) получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Если $f(x)$ такова, что ее можно разложить в ряд Фурье в интервале $(0, l)$, то коэффициент D_n Фурье можно вычислить по формуле

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \tag{99}$$

Итак, решение нашей задачи дается формулой (98), где коэффициент D_n определяется из выражения (99).

Рассмотрим применение этого метода к задаче для параболического уравнения с неоднородными граничными условиями.

Пример 3. На концах тонкого однородного стержня длины l поддерживается температура $u(0, t) = A$ и $u(l, t) = B$, где A и B — постоянные. Температура стержня в начальный момент времени $u(x, 0) = x$. Найти распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$ $(a = 1)$.

Решение. Будем искать решение задачи $u(x, t)$ в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Подберем функцию $w(x, t)$ таким образом, чтобы для нахождения функции $v(x, t)$ получились нулевые граничные условия.

Граничные условия для $v(x, t)$ имеют вид

$$v(0, t) = u(0, t) - w(0, t) = A - w(0, t),$$

$$v(l, t) = u(l, t) - w(l, t) = B - w(l, t).$$

Для того чтобы они были нулевые, нужно соблюсти условия

$$w(0, t) = A,$$

$$w(l, t) = B.$$

Подберем функцию $w(x, t)$, удовлетворяющую этим условиям, следующим образом:

$$w(x, t) = A + \frac{x}{l}(B - A).$$

Тогда для нахождения функции $v(x, t)$ получаем уравнение

$$v_t = v_{xx} - (w_t - w_{xx}) = v_{xx}, \tag{100}$$

так как

$$w_t = 0, \ w_{xx} = 0.$$

Граничные условия для функции $v(x, t)$

$$v(0, t) = 0, \ v(l, t) = 0 \tag{101}$$

(так мы подбирали функцию $w(x, t)$).

Имеем следующие начальные условия:

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) =$$

$$= x - A - \frac{x}{l}(B - A) = \frac{(l + A - B)x}{l} - A. \tag{102}$$

Найдем функцию $v(x, t)$, являющуюся решением задачи (100) — (102):

$$v(x, t) = X(x)\,T(t).$$

Подставим в уравнение (100)

$$T'(t) \cdot X(x) = TX''(x),$$

или

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad \cancel{(\lambda > 0)}.$$

Уравнение

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

имеет решение

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Используя граничные условия, из которых следует, что $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$, получаем

$$A = 0, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l}$$

(B можно считать равным единице).

Таким образом,

$$X_k(x) = \sin\lambda_k x = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Второе уравнение

$$T' + \lambda_k^2 T = 0$$

при $\lambda = \lambda_k$ имеет решение

$$T_k = C_k e^{-\lambda_k^2 t}.$$

Таким образом, решение нашей задачи есть функция

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 t} \sin\lambda_k x.$$

Подстановка начального условия дает

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 0} \sin\lambda_k x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\lambda_k x = \frac{l + A - B}{l}x - A.$$

Таким образом, коэффициент C_k может быть найден как коэффициент Фурье функции $\frac{l+A-B}{l}x-A$ при разложении в ряд по $\sin\lambda_k x$.

Следовательно,

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{l+A-B}{l}x-A\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx=$$

$$=2\left[-\left(\frac{l+A-B}{l}x-A\right)\cdot\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi n}\left(\frac{l+A-B}{l}\right)\int_0^l\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\right]=$$

$$=2\left[-\frac{1}{\pi n}(l-B)\cos\pi n-\frac{1}{\pi n}A+\right.$$

$$\left.+\frac{l}{(\pi n)^2}\left(\frac{l+A-B}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n}[(B-l)(-1)^n-A].$$

Отсюда

$$v(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}[(B-l)(-1)^k-$$

$$-A]\,e^{-\frac{(\pi k)^2}{l^2}t}\left[\sin\frac{\pi kx}{l}\right].$$

Зная функцию $w(x,\ t)$, можем записать окончательный результат:

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)+w(x,\ t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}[(B-l)(-1)^k-A]\,e^{\frac{-(\pi k)^2}{l^2}t}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi kx}{l}+A+\frac{x}{l}(B-A).$$

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Решение многих задач нефтепромысловой механики, как мы видели выше, приводит к интегрированию дифференциальных уравнений математической физики (типа теплопроводности, а также волновых и телеграфных) при

различных граничных и начальных условиях. Классический метод разделения переменных, описанный ранее, не всегда удобен для практического использования (например, при ненулевых граничных условиях). Поэтому в последнее время стали широко применяться операторные методы решения задач математической физики. К их числу относятся конечное и бесконечное преобразования Фурье, которые сводят уравнения в частных производных к обыкновенным и даже алгебраическим уравнениям.

Конечное преобразование Фурье

Конечное преобразование Фурье применяется при решении задач в конечной области: фильтрация жидкости в конечном пласте, течение жидкости или газа в конечной трубе при различных граничных условиях. Конечное преобразование Фурье относится к числу операторных методов решения задач математической физики и применяется по пространственным координатам, причем, каждое преобразование приводит к уменьшению одной пространственной переменной. Так например, если решается плоская задача фильтрации, где две пространственные переменные x и y и одна временна́я координата t, то последовательным применением преобразования Фурье по x и y (с учетом граничных условий) задача сведется к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по переменной координате t. При применении операторного метода Фурье переходят от оригинала (искомой функции) к изображению, что сводит данное уравнение к обыкновенному относительно изображения. Решая полученное уравнение, находят изображение, а затем по нему оригинал.

Известно, что нечетная функция представима рядом Фурье вида

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{103}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx \tag{104}$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

а четная —

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \tag{105}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (106)$$

При применении преобразования Фурье исходят из следующих соображений. Если в формуле (104) известно b_n и требуется определить $f(x)$, то решение этого интегрального уравнения для определения $f(x)$ дается формулой (103). Аналогично, если известно a_n в формуле (106), для определения $f(x)$ пользуемся формулой (105).

Для пояснения изложенного рассмотрим решение уравнения

$$\frac{d^2p}{dx^2} - 4p = 0 \qquad (107)$$

при граничных условиях

$$p|_{x=0} = 0,\ p|_{x=l} = 1.$$

Эта задача просто решается обычным методом решения уравнения с постоянными коэффициентами, и решение имеет вид

$$p = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} 2l}.$$

Теперь проведем решение этой задачи методом преобразования Фурье. Для этого умножаем уравнение (107) на $\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$ и интегрируем от 0 до l. Производя интегрирование по частям с учетом граничных условий и обозначая

$$p_n = \frac{2}{l}\int_0^l p\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad (108)$$

получим

$$\frac{2}{l}\int_0^l \frac{d^2p}{dx^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\left[\sin\frac{n\pi x}{l}\frac{dp}{dx}\right|_0^l -$$

$$-\frac{n\pi}{l}\int_0^l \frac{dp}{dx}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{l}\frac{n\pi}{l}\left[p\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{n\pi}{l}\int_0^l p\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2\pi n}{l^2}(-1)^{n-1} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot p_n.$$

В результате уравнение (107) сводится к уравнению в изображениях

$$\frac{2\pi n}{l^2}(-1)^{n-1} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot p_n - 4\,p_n = 0, \tag{109}$$

где $n = 1, 2, 3 \ldots$

Из (109) определяем p_n:

$$p_n = \frac{2\pi}{l^2} \cdot \frac{n(-1)^{n-1}}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + 4}. \tag{110}$$

Итак, в формуле (108) известно p_n, неизвестная функция $p(x)$ (в соответствии с формулами (103) и (104)) определится по формуле

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \frac{2\pi}{l^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{(n\pi/l)^2+4}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{111}$$

Так как (см. таблицы сумм и рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha\pi},$$

то из (111) получим

$$p = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} 2l}. \tag{112}$$

Зная изображение преобразования Фурье p_n, легко перейти к оригиналу и тем самым получить решение задачи, не пользуясь никакими сложными теоремами. Однако при использовании преобразования Фурье возникают трудности, связанные с выбором ядра преобразования. Остановимся на вопросе о выборе ядра преобразования, которое зависит от характера граничных условий и должно

удовлетворять соответствующим однородным граничным условиям. Так например, если известны значения p на границах $x=0$ и $x=l$, то ядро должно равняться нулю при $x=0$ и $x=l$. По этой причине при решении задачи для уравнения (107) ядром мы выбирали выражение $\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$, которое обращается в нуль в указанных точках. Если на одном конце в точке $x=0$ задается значение искомой функции, а на другом конце $x=l$ — ее производная, то ядро должно обращаться в нуль при $x=0$ и его производная должна быть равна нулю в точке $x=l$. Ниже приводим таблицу выбора ядра преобразования для некоторых практически важных и часто встречающихся задач нефтепромысловой механики.

Граничное условие		Вид ядра
$x=0$	$x=l$	
p	p	$\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$
p	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{2}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$
$\frac{\partial p}{\partial x}$	p	$\frac{2}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$
$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{2}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$
p	$\frac{\partial p}{\partial x}+\alpha p=\beta$	$M_n\sin\lambda_n x$, где λ_n — корни уравнения $\lambda\cos\lambda l+\alpha\sin\lambda l=0$, а M_n — нормирующий множитель
$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{\partial p}{\partial x}+\alpha p=\beta$	$M_n\cos\lambda_n x$, где λ_n — корни уравнения $\lambda\sin\lambda l+\alpha\cos\lambda l=0$

Примеры решения задач

Покажем применение конечного преобразования Фурье в решении уравнения теплопроводности при неоднородных граничных условиях.

В ограниченном пласте длиной l с начальной температурой T_0 в некоторый момент времени $t=0$ начали поддерживать постоянную температуру $T_н$ на линии нагнетательной галереи и постоянный градиент температуры $\left(\frac{\partial T}{\partial x}=Q\right)$ на линии эксплуатационной галереи. Требуется определить распределение температуры по длине пласта в любой момент времени.

Задача сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{113}$$

$\left(a^2 = \frac{\lambda}{c}\right.$ — коэффициент температуропроводности$\left.\right)$ при условиях:

$$T(x,\ t)|_{x=0} = T_н,$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = Q,$$

$$T(x,\ t)|_{t=0} = T_0 - \text{const}. \tag{114}$$

Пользуясь приведенной выше таблицей, в этом случае умножаем каждое слагаемое уравнения (113) на $\frac{2}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, интегрируем от 0 до l и вводим обозначения

$$T_n = \frac{2}{l}\int_0^l T\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Интегрируя по частям левую часть уравнения, получим

$$\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x dx = \frac{2}{l}\left[\left.\frac{\partial T}{\partial x}\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\right|_0^l - \right.$$

$$\left. - \frac{(2n+1)}{2l}\pi\int_0^l \frac{\partial T}{\partial x}\cos\frac{(2n+1)}{2l}\pi x dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[Q(-1)^n - \frac{(2n+1)\pi}{2l}\left\{\left.T\cos\left(\frac{2n+1}{2l}\right)\pi x\right|_0^l + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2n+1}{2l}\pi\int_0^l T\sin\frac{(2x+1)\pi x}{2l}\right\}\right] =$$

$$= \frac{2}{l}Q(-1)^n + \frac{2n+1}{l^2}\pi T_n - \frac{(2n+1)^2\cdot\pi^2}{(2l)^2}\cdot T_n.$$

Здесь учтены значения температуры и ее градиента при $x=0$ и $x=l$. Интегрирование правой части уравнения (113) дает

$$\frac{1}{a^2}\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial T}{\partial t}\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\,dx =$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2}{l}\int_0^l T\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x dx\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{dT_n}{dt}.$$

Подставляя полученные выражения в (113), будем иметь

$$\frac{2}{l}Q(-1)^n+\frac{(2n+1)}{l^2}\pi\cdot T_н-$$

$$-\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2\cdot T_n=\frac{1}{a^2}\frac{dT}{dt} \qquad (115)$$

при начальном условии

$$T_n|_{t=0}=\frac{2}{l}\int_0^l T_0\cdot\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\,dx=$$

$$=-T_0\frac{2}{l}\cdot\frac{2l}{(2n+1)\pi}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x\Big|_0^l=\frac{4T_0}{(2n+1)\pi},$$

$$T_{n0}=\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}. \qquad (116)$$

Общее решение уравнения (115) имеет вид

$$T_n=\frac{\frac{2}{l}Q(-1)^n+\frac{(2n+1)}{l^2}T_н}{\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right\}^2}+C_n e^{-\left[\frac{2n+1}{2l}\pi\right]^2 a^2 t}, \qquad (117)$$

где C_n определяется из условия

$$T_{n0}=\frac{\frac{2}{l}Q(-1)^n+\frac{(2n+1)}{l^2}\cdot T_н}{\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right\}^2}+C_n$$

и имеет вид

$$C_n = T_{n0} - \frac{\frac{2}{l} Q(-1)^n + \frac{2n+1}{l^2} \cdot T_н}{\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right\}^2}. \qquad (118)$$

Обозначим

$$\frac{\frac{2}{l} Q(-1)^2 + \frac{2n+1}{l^2} \cdot T_н}{\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right\}^2} = A_n,$$

тогда

$$T_n = A_n + (T_{n0} - A_n) \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 a^2 t\right], \qquad (119)$$

и учитывая, что

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,$$

получим решение в виде

$$T = \sum_{1}^{\infty} \left\{A_n + (T_{n0} - A_n) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 \cdot a^2 l\right]\right\} \cdot \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x.$$

Решение можно представить как

$$T = \sum_{1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} (T_{n0} - A_n) \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2 a^2 t\right] \cdot \sin\frac{2n+1}{l}\pi x. \qquad (120)$$

При наличии стационарного продолжения сумма первого ряда дает решение соответствующей задачи при установившемся распределении температур при тех же граничных условиях.

В качестве второго примера рассмотрим течение жидкости в коротком трубопроводе, описываемое волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{121}$$

которое будем решать при условиях

$$p|_{x=0} = p_н, \; p_{x=l} = p_k, \; p|_{t=0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Применяем синус-преобразование к (121), т. е. пользуясь вышеприведенной таблицей, умножаем все члены уравнения на $\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$; интегрируем от 0 до l и, учитывая обозначение

$$p_n = \frac{2}{l}\int_0^l p\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и граничные условия задачи, получим

$$\frac{d^2 p_n}{dt^2} + c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 p_n =$$

$$= \frac{2n\pi c^2}{l^2}[p_н - p_к(-1)^n] \tag{122}$$

при условиях

$$p_n|_{t=0} = 0; \qquad \left.\frac{dp_n}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение уравнения (122) при приведенных условиях имеет вид

$$p_n = \frac{2}{n\pi}[p_н - p_к(-1)^n]\left[1 - \cos\frac{cn\pi}{l}t\right],$$

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi x}{l} = p_н - \frac{p_н - p_к}{l} x -$$

$$- \sum_{1}^{\infty} \frac{2[p_н - p_к(-1)^2]}{\pi n} \cos \frac{cn\pi t}{l} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} =$$

$$= p_н - \frac{p_н - p_к}{l} x - \sum_{1}^{\infty} \frac{x[p_н - p_к(-1)^n]}{n\pi} \times$$

$$\times \left[\sin \frac{n\pi}{l}(x + ct) + \sin \frac{n\pi}{l}(x - ct) \right]. \qquad (123)$$

Из решения (123) видно, что в этом случае вдоль трубопровода распространяются две группы волн (друг против друга) со скоростью звука c.

Бесконечное преобразование Фурье

Если область, где изучается тот или иной физический процесс, полубесконечна, то обычно для решения задачи пользуются бесконечным синус- или косинус-преобразованием Фурье (интеграл Фурье для нечетной или четной функций соответственно). Так например, если решается задача о течении жидкости в достаточно длинном трубопроводе и изучается изменение давления или расхода вблизи начала трубопровода ($x = 0$), то его можно считать „полубесконечным". Аналогичные рассуждения имеют место при решении задач о течении жидкости в пористой среде. При этом, если в начале трубопровода или на галерее ($x = 0$) известно значение искомой функции (например, давления), то пользуются синус-преобразованием Фурье; если же при $x = 0$ известна производная искомой функции (например, расход жидкости или дебит), то применяют косинус-преобразование Фурье. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = A \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (124)$$

При применении синус-преобразования Фурье к данному уравнению, умножая все его слагаемые и также начальное условие на $\sin \lambda x \, dx$ и интегрируя от 0 до ∞, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения изображения

$$\bar{p}(\lambda, t) = \int_0^\infty p(x, t) \sin(\lambda, x)\, dx.$$

Решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение с преобразованным начальным условием, определяем $\bar{p}(\lambda, t)$. Зная изображение $\bar{p}(\lambda, t)$, пользуемся формулой обращения:

$$p(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda, t) \sin(\lambda x)\, d\lambda.$$

При применении же косинус-преобразования Фурье умножаем уравнение (124) и соответствующее начальное условие на $\cos \lambda x\, dx$ и, интегрируя от 0 до ∞, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для изображения

$$\bar{p}(\lambda, t) = \int_0^\infty p(x, t) \cos(\lambda x) dx.$$

Определяя изображение $\bar{p}(\lambda, t)$ и пользуясь формулой обращения

$$p(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda, t) \cos(\lambda x)\, d\lambda,$$

получаем решение задачи.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим решение уравнения

$$\frac{d^2p}{dx^2} - \alpha^2 p = 0, \tag{125}$$

которое описывает установившееся плоско-параллельное течение жидкости в пласте с проницаемой кровлей. Уравнение (125) получено из приближенного подхода к решению задачи из так называемой схемы Мятиева — Гиринского: в этом уравнении $p(x)$ — давление в каждой точке разрабатываемого пласта, α — гидравлический коэффициент связи между пластами. Уравнение (125) может быть решено при условиях

$$p|_{x=0} = p_н \tag{126}$$

или

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = Q_н, \tag{127}$$

и каждый раз

$$p|_{x\to\infty} = 0,$$

$$\left(\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x\to\infty} = 0\right).$$

В обоих случаях решение задачи труда не представляет, и оно имеет вид

$$p = p_{\text{н}} e^{-\alpha x} \tag{128}$$

при условии (126) и

$$p = -\frac{Q_{\text{н}}}{\alpha} e^{-\alpha x} \tag{129}$$

при условии (127).

Для иллюстрации метода мы дадим решение этих задач с помощью бесконечного преобразования Фурье. Рассмотрим каждый случай в отдельности:

$$p|_{x=0} = p_{\text{н}} = \text{const}.$$

В этом случае, как было указано выше, ядро преобразования должно быть подобрано так, чтобы оно обращалось в нуль в начале координат, т. е. надо использовать синус-преобразование Фурье. Умножаем уравнение (125) на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x\, dx$ и интегрируем от 0 до ∞.

Если обозначить

$$\bar{p}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty p(x) \sin \lambda x\, dx,$$

то после определения $\bar{p}(\lambda)$ решение получим по формуле

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda) \sin \lambda x\, dx.$$

Так как

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^2p}{dx^2} \sin \lambda x\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left.\frac{dp}{dx} \sin \lambda x \right|_0^\infty - \right.$$

$$\left. - \lambda \int_0^\infty \frac{dp}{dx} \cos \lambda x\, dx \right] = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \times$$

$$\times\left[p\cos\lambda x\Big|_0^\infty+\lambda\int_0^\infty p\sin\lambda x dx\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda p_н-\lambda^2\bar{p}(\lambda),$$

то из (125) получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda p_н-\lambda^2\bar{p}(\lambda)-\alpha^2\bar{p}(\lambda)=0,$$

$$\bar{p}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{\lambda^2+\alpha^2}p_н.$$

Таким образом,

$$p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\bar{p}(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda=$$

$$=\frac{2}{\pi}p_н\int_0^\infty\frac{\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}\,d\lambda.$$

Зная, что

$$\int_0^\infty\frac{x\sin(\alpha x)\,dx}{\beta^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta},$$

окончательно получим:

$$p=p_н e^{-\alpha x}.$$

Рассмотрим второй случай: в начале координат задана производная искомой функции

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0}=Q_н.$$

Ядро выбираем в виде $\cos\lambda x$, т. е. умножаем уравнение (125) на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\lambda x\,dx$ и интегрируем от 0 до ∞, вводя обозначения:

$$\bar{p}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty p(x)\cos(\lambda x)\,dx.$$

Так как

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^2p}{dx^2}\cos\lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{dp}{dx}\cos\lambda x\Big|_0^\infty + \right.$$

$$\left. + \lambda\int_0^\infty \frac{dp}{dx}\sin\lambda x\, dx\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}Q_н +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\cdot\left[p\sin\lambda x\Big|_0^\infty - \lambda\int_0^\infty p(x)\cos\lambda x\, dx\right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}Q_н - \lambda^2\bar{p}(\lambda),$$

то из (125) получим

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}Q_н - \lambda^2\bar{p}(\lambda) - \alpha^2\bar{p}(\lambda) = 0$$

и

$$p(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}Q\frac{1}{\lambda^2+\alpha^2}.$$

Решение задачи, как было указано выше, получится по формуле

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \bar{p}(x)\cos\lambda x\, d\lambda =$$

$$= -\frac{2}{\pi}Q_н\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda.$$

Имея в виду

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\beta^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\alpha\beta},$$

окончательно получим

$$p(x) = -\frac{Q_н}{\alpha}e^{-\alpha x}.$$

Пример 2. Рассмотрим течение жидкости в полубесконечном трубопроводе. Решаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (130)$$

при условиях

$$p|_{x=0} = p_н, \quad p|_{t=0} = 0, \quad p|_{x\to\infty} = 0,$$

$$\left(\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x\to\infty} = 0\right). \tag{131}$$

Последнее условие $p|_{x\to\infty} = 0$ показывает, что вдали от начала трубопровода (в бесконечности) среда не возмущена, и, следовательно, давление равно начальному давлению. По этой причине необходимо учесть, что

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x\to\infty} = 0.$$

Задача решается применением преобразования Фурье. Умножаем уравнение (130) на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\lambda x\,dx$ и интегрируем от 0 до ∞.

Если обозначить

$$\bar{p}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty p(x, t)\sin\lambda x\,dx,$$

то после определения $\bar{p}(\lambda, t)$ решение получим по формуле

$$p(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \bar{p}(\lambda t)\sin\lambda x\,dx.$$

Так как

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\sin\lambda x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left.\frac{\partial p}{\partial x}\sin\lambda x\right|_0^\infty - \right.$$

$$\left. - \lambda\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial x}\cos\lambda x\,dx\right] = -\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times$$

$$\times\left[\left. p\cos\lambda x\right|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty p\sin\lambda x\,dx\right] =$$

$$= \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p_н - \lambda^2\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty p\sin\lambda x\,dx}_{\bar{p}(\lambda,\,t)} = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p_н - \lambda^2\bar{p}(\lambda, t),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial t} \sin \lambda x \, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty p \sin \lambda x dx \right] = \frac{d \bar{p}}{dt},$$

то из уравнения (130) получим

$$\frac{2a}{c^2} \frac{d\bar{p}}{dt} + \lambda^2 \bar{p} = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_н.$$

Решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, получим

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_н}{\lambda} + C_\lambda e^{-\frac{\lambda^2 c^2}{2a} t}$$

Постоянную C_λ определим с учетом начального условия

$$\bar{p}|_{t=0} = 0;$$

$$C_\lambda = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_н}{\lambda},$$

тогда получим

$$\bar{p}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_н}{\pi} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_н}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2 c^2}{2a} t}.$$

Переходя от изображения $\bar{p}(\lambda, t)$ к оригиналу $p(x, t)$, получим решение поставленной задачи:

$$p(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda, t) \sin \lambda x \, d\lambda =$$

$$= p_н \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda -$$

$$- p_н \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2 c^2 t}{2a}} \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda =$$

$$= p_н \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2 c^2 t}{2a}} \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda \right].$$

Имея в виду

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2 c^2}{2a} t} \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{a}\, x}{c \sqrt{2t}} \right),$$

где

$$\operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt,$$

окончательно получим

$$p(x, t) = p_н \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{a}\, x}{c \sqrt{2t}} \right).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава I. **Классификация и вывод уравнений математической физики. Краевые условия** 3

§ 1. Основные определения 3

§ 2. Основные типы уравнений математической физики 5

§ 3. Краевые условия для основных уравнений математической физики 9

Глава II. **Некоторые методы решения уравнений математической физики** 22

§ 1. Метод разделения переменных . 22

§ 2. Преобразование Фурье 43

Редактор С. И. Щеглова

Технический редактор В. С. Фролова

Подп. в печ. 20.10.1980 г. Формат 60×90 1/16 Объем 3,75 печ. л.
3,7 уч.-изд. л. Тираж 250 экз. Заказ 1717 Цена 28 коп.

Серпуховская типография Упрполиграфиздата Мособлисполкома