

30.11.2017

## I курс

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. А, В и С – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. А и В сказали следующее. А: «В по рангу выше, чем С.» В: «С по рангу выше, чем А.» Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу – А или В?»
2. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$ .
3. Найдите все возможные тройки чисел  $(x; y; z)$ , если известно, что  $x! + y! = 24z + 2017$ , числа  $x$  и  $y$  – натуральные, а  $z$  – целое и нечётное.
4. Сколько различных векторов длины  $5\sqrt{2}$  с целочисленными координатами существует в 3-мерном пространстве?
5. Для  $x = \frac{\pi}{2n}$  найдите значение суммы  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx$ .
6. Пусть  $L$  – точка пересечения диагоналей  $CE$  и  $DF$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  со стороной 3. Точка  $K$  такова, что  $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ . Найдите длину отрезка  $KC$ .
7. Последовательность  $a_n$  задана рекуррентно:  $a_0 = 0$ ;  
 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 243, & \text{если } a_n \leq 0, \\ a_n - 343, & \text{если } a_n > 0. \end{cases}$  Найти  $\min\{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$
8. Существует ли в 3-мерном пространстве треугольник площади  $\sqrt{7}$ , вершины которого имеют целочисленные координаты?
9. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$  имеет ровно три различных решения?
10. Найти все целочисленные решения матричного уравнения

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \text{ если } A^T = A.$$

30.11.2017

## II-IV курсы

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. А, В и С – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. А и В сказали следующее. А: «В по рангу выше, чем С.» В: «С по рангу выше, чем А.» Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу – А или В?»
2. Найдите все возможные тройки чисел  $(x; y; z)$ , если известно, что  $x! + y! = 24z + 2017$ , числа  $x$  и  $y$  – натуральные, а  $z$  – целое и нечётное.
3. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$  имеет ровно три различных решения?
4. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$ .
5. Доказать, что  $\underbrace{\sin \sin \sin \dots \sin}_{2017 \text{ раз}} 1 < \frac{1}{12}$ .
6. При каких значениях константы  $\alpha > 0$  сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^{-\alpha})^n$ ?
7. Найти интеграл  $\int \frac{(1-x^2)^5}{(1+x^2)^6} dx$ .
8. Сколько несовпадающих частных производных 2017-го порядка имеет функция  $f(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ ?
9. Даны константы  $A, B \in \mathbb{R}$  и  $m > k > 0$ . Найти предел  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin kt + B \sin mt)^2 dt$ .
10. Решить задачу Коши  $\begin{cases} y'' \cos x - 2y' \sin x + 8y \cos x = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

## Технари и экономисты 1 курс – декабрь 2016

11. (10 баллов)

В большом бочонке 8 литров нефти. Требуется разлить эту нефть пополам в две ёмкости. В наличии имеется еще два пустых бочонка: в один входит 5 литров, в другой – 3 литра. Как разлить нефть не более чем за 7 переливаний?

12. (15 баллов)

Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^n$  при любом значении  $a$ .

13. (15 баллов)

Решить уравнение  $X^{2016} = X^2$ , где  $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ;  $x^2 + y^2 > 0$ .

14. (15 баллов)

Может ли сечение куба (некоторой плоскостью) быть правильным пятиугольником?

15. (15 баллов)

Решите неравенство  $y^2 + y^3 + \sqrt[4]{y^3 - x^2 - 3xy} \leq 5xy$  в действительных числах.

16. (15 баллов)

Докажите, что геометрическое место середин параллельных отрезков с концами на разных ветвях гиперболы есть прямая.

17. (15 баллов)

Последовательность  $a_n$  задана рекуррентно:  $a_1 = 1$ ;  $a_{n+1} =$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n, & \text{если } n \text{ чётно} \\ a_n + 1, & \text{если } n \text{ нечётно} \end{cases}$$

Найдите остаток от деления  $a_{2016}$  на 24.

## Технари и экономисты 2-4 курсы – декабрь 2016

1. (15 баллов)

Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья за 13 минут и выпить кастрюльку молока за 14 минут. Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком (состоящим, очевидно, из одного торта, одной банки варенья и одной кастрюльки молока)?

2. (15 баллов)

Вычислить  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$ .

3. (20 баллов)

Найти сумму ряда  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$ .

4. (20 баллов)

Пусть квадратные матрицы из действительных чисел  $A$  и  $B$  такие, что  $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$ . Приведите пример таких матриц и докажите, что  $\det A = \det B$ .

5. (15 баллов)

Решите дифференциальное уравнение  $x(x + y)y' = x + xy + y^2$ .

6. (15 баллов)

Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \dots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$ .

## I курс

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Могут ли  $\sin\varphi$  и  $\cos\varphi$  быть одновременно ненулевыми рациональными числами?
3. Решить уравнение:  $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)(2 + \sin y) = 2$ .
4. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
5. Вычислите определитель порядка  $2n$ , если элементы его главной диагонали равны  $a$ , элементы его побочной диагонали равны  $b$ , а остальные элементы равны нулю.
6. Докажите тождество:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ .
7. Найти  $\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)}$ , если  $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x + \sqrt{1 + x^4}$  при  $x > 0$ .
8. Вычислите предел (или же установите, что он не существует):  
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt{\sin \frac{1}{x^2}}.$$
9. Пусть  $x_i = \cos(x_{i-1})$  при  $i = 2; 3; 4; \dots$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  существует и не зависит от  $x_1$  ( $x_1 \in \mathbb{R}$ ).
10. Найдите  $\det A$ , если  $A$  – матрица размера  $2 \times 2$  и  $A^2 + E = 0$ .

## II-IV курсы

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
3. Вычислите определитель порядка  $2n$ , если элементы его главной диагонали равны  $a$ , элементы его побочной диагонали равны  $b$ , а остальные элементы равны нулю.
4. Пусть  $x_i = \cos(x_{i-1})$  при  $i = 2; 3; 4; \dots$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  существует и не зависит от  $x_1$  ( $x_1 \in \mathbb{R}$ ).
5. Найти и построить область определения функции  $z = \sqrt{1 - x^4 - y^2 + 2x^2y}$ .
6. Длина верёвки 12 метров. Каким образом нужно разрезать верёвку на 3 части длиной  $x, y, z$  (метров), чтобы величина  $xy^2z^3$  приняла наибольшее возможное значение.
7. Вычислите неопределённый интеграл:  $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln^2 x} dx$ .
8. Вычислите предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$ .
9. Найдите общее решение уравнения  $y = xy' + x^2y''$ .
10. Найдите сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$ .

## Технари и экономисты ВСЕ курсы – март 2015

1. Плоскость выкрашена в три цвета. Доказать, что для любого положительного числа  $d$  найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно  $d$ .
2. Решите уравнение  $\sqrt{x+4} = x^2 - 4$ .
3. Докажите, что определитель любого порядка (не менее двух), каждый из элементов которого по модулю равен 1, сам не может равняться по модулю 1.
4. Постройте график функции  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1) \operatorname{arctg}(x^n)$
5. При каких  $a, b$  функция  $f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ b, & x = 1 \\ \frac{x \ln x}{x^2 - 1}, & x > 0, x \neq 1 \end{cases}$  дифференцируема при  $x > 0$ ?
6. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
7. Вычислить  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2 + i^2}$ .
8. Докажите, что все решения уравнения  $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  ограничены на всей числовой оси.
9. Найдите многочлен  $P(x)$  третьей степени с целочисленными коэффициентами, такой что  $\int_0^1 xP(x)dx = \int_0^1 x^3P(x)dx = \int_0^1 x^5P(x)dx = 0$ .
10. Для всякой ли матрицы  $A$  второго порядка можно найти такие числа  $p, q$ , что  $A^2 + pA + qE = 0$ ?

## I курс

1. Доказать, что многочлен  $\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{24} + \frac{x}{30}$  при любых целых  $x$  принимает целые значения.
2. Постройте линию, задаваемую уравнением  $|y| = (|x| - 1)(|x| - 3)$ .
3. Дано:  $ABCD$  — прямоугольник,  $M$  — любая точка пространства. Доказать, что  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ .
4. Найти  $A^{2014}$ , если  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .
5. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2014x}$ .
6. Найти  $a$  и  $b$ , если  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x^3+ax+b} = -3$ .
7. Найти  $f(x)$ , если  $\begin{cases} f'(x) = f'(x-1) \\ f(x) + f(x-1) = x \end{cases}$ .
8. Доказать, что  $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$  при  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ .
9. Пусть  $\Delta_n$  — определитель порядка  $n$ , в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу — числами  $(-1)$ , остальные элементы — нули. Показать, что  $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$  и найти  $\Delta_{14}$ .
10. Две вершины треугольника фиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании вдвое больше другого. Доказать, что она движется по гиперболе.

## II-IV курсы

1. Постройте линию, задаваемую уравнением  $\log_2(4x^2 + y^2) = \log_2^2(x^2 + 0,25y^2)$ .
2. Найти  $A^{2014 \cdot 2014}$ , если  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .
3. Доказать, что  $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .
4. Пусть  $\Delta_n$  – определитель порядка  $n$ , в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу – числами  $(-1)$ , остальные элементы – нули. Показать, что  $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$  и найти  $\Delta_{14}$ .
5. Найти  $y(x)$ , если  $y(x) = \int_0^x y^2(t) dt + 2014x$ .
6. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} y_1' = 2014y_1 + y_2 \\ y_2' = 2014y_2 + y_3 \\ y_3' = 2014y_3 \end{cases}$$
7. Функция  $f(x)$  положительна на всей оси. Вычислить  $\int_a^b \frac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}$ .
8. Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \dots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$ .
9. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
10. Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ , где  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  – последовательные корни уравнения  $x = \operatorname{tg} x$ ?

## Технари и экономисты 1 курсы – декабрь 2014

1. Дроби  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$  образуют арифметическую прогрессию. Можно ли составить арифметическую прогрессию, содержащую 4 члена вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и такую, что все её члены различны? А аналогичную, содержащую 10 членов такого вида? А 1000 членов?

2. Пусть  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 21C & 7Z & 133c \\ 15A & 5X & 95a \\ 3B & Y & 19b \end{vmatrix}$ . Вычислить  $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ .

3. Вычислите  $\cos 7^\circ + \cos 79^\circ + \cos 151^\circ + \cos 223^\circ + \cos 295^\circ$ .

4. Прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  пересекаются под углом  $30^\circ$ . Докажите, что хотя бы одно из чисел  $A_1, B_1, A_2, B_2$  иррационально.

5. Найдите область определения функции  $y = \log_2 \log_3 \log_4 \log_5 x$ .

6. Найдите значение выражения  $\sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \dots}}}}}}$ .

7. Вычислите  $y^{(n)}$  ( $n$ -ю производную,  $n \in \mathbb{N}$ ) для функции  $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

8. Найдите область определения функции  $y = \sqrt{1 + x - e^x}$ .

9. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (т.е. такие матрицы  $B$ , что  $AB = BA$ ).

10. Может ли сечением куба (плоскостью) быть правильный пятиугольник?

## Технари 1 курс – 2013

1. Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + \dots + n^n}{n^n}$ .

2. Дифференцируема ли в нуле функция  $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$ ?

3. Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0;1]$  и дифференцируема на интервале  $(0;1)$ . Доказать, что если  $f(0) = f(1) = 0$ , то в некоторой точке  $(0;1)$   $f'(x) = f(x)$ .

4. Решить уравнение  $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$ .

5. Доказать, что определитель  $\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}$  не равен нулю.

6. Найти угол, под которым пересекается парабола  $y = px^2$  ( $p \neq 0$ ) и эллипс  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

7. Доказать, что для любого натурального  $n$  число  $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n$  является целым и нечетным.

## Экономисты 2 курс и выше – 2013

1. (1 б.) Вычислить производную функции  $y = \log_{(x+2 \lg x)}(\cos \sqrt{x} - \log_3(\operatorname{arctg} x))$ .
2. (2 б.) Найти расстояние между прямыми  $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$  и  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$  и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.
3. (2 б.) Решить неравенство  $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$ .
4. (2 б.) Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x+1)) - \cos(\ln x))$ .
5. (3б.) Дан треугольник с вершинами  $A(0;-2), B(4;0), C(0;11)$ . Найти расстояние от вершины  $C$  до биссектрисы угла  $A$ .
6. (3 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 4, 6, 8. Какова вероятность, что оно делится  
а) на 4;  
б) на 5?
7. (3б.) Вычислить интеграл  $\int_0^1 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$ .
8. (3б.) Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  при  $x = -1$ , если  $z = x^2 + y^2 + 2y$ , где  $y(x)$  есть решение уравнения  $1 + x + y^2 = e^{x+y^2}$ .
9. (5 б.) В круг, куда вписан квадрат, наудачу бросаются 7 точек. Какова вероятность, что 3 точки попадут в квадрат, а 4 – по одной в каждый из образовавшихся круговых сегментов?
10. (6б.) Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |a \cos nx - b \sin nx| dx$ ,  $a, b \in R, n \in N, ab > 0$ .

## Экономисты 1 курс – 2013

1. (1 б.) Доказать, что если  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$  - медианы  $\triangle ABC$ , то  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ .
2. (2 б.) Вычислить производную функции  $y = \log_{(x+5e^{-x})}(\sin \sqrt{x} - \lg(\arcsin x))$ .
3. (2 б.) Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n} - \ln n}$  на сходимость.
4. (3 б.) Найти расстояние между прямыми  $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$  и  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$  и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.
5. (3 б.) Решить неравенство  $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$ .
6. (3 б.) Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x+1)) - \cos(\ln x))$ .
7. (3 б.) Найти  $a$  и  $x_0$  при условии, что уравнение  $3x^4 - 4x^3 + a = 0$  имеет единственный корень  $x_0$ .
8. (3 б.) При каком  $\alpha \in R$  существует вектор  $\vec{a}$ , удовлетворяющий условиям:  $\vec{a} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 3$ ,  $\vec{a} \times (\vec{j} - \vec{i} + 2\vec{k}) = \alpha\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ?
9. (4 б.) Дан треугольник с вершинами  $A(0; -4), B(3; 0), C(0; 6)$ . Найти расстояние от вершины  $C$  до биссектрисы угла  $A$ .
10. (4 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 2, 3, 5. Какова вероятность, что оно делится  
а) на 4;  
б) на 5?