Технари и экономисты 1 курс – декабрь 2016

1. (10 баллов)
   В большом бочонке 8 литров нефти. Требуется разлить эту нефть пополам в две ёмкости. В наличии имеется еще два пустых бочонка: в один входит 5 литров, в другой – 3 литра. Как разлить нефть не более чем за 7 переливаний?

2. (15 баллов)
   Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n}$ при любом значении a.

3. (15 баллов)
   Решить уравнение $X^{2016} = X^{2}$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 > 0.$

4. (15 баллов)
   Может ли сечение куба (некоторой плоскостью) быть правильным пятиугольником?

5. (15 баллов)
   Решите неравенство $y^2 + y^3 + \sqrt[4]{y^3 - x^2 - 3xy} \leq 5xy$ в действительных числах.

6. (15 баллов)
   Докажите, что геометрическое место середин параллельных отрезков с концами на разных ветвях гиперболы есть прямая.

7. (15 баллов)
   Последовательность a_n задана рекуррентно: $a_1 = 1;\ a_{n+1} =$
   $\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_n\ , & \text{если } n \text{ чётно} \\ \quad a_n + 1 & \text{, если } n \text{ нечётно} \end{cases}$
   Найдите остаток от деления a_{2016} на 24.

Технари и экономисты 2-4 курсы – декабрь 2016

1. (15 баллов)
   Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья за 13 минут и выпить кастрюльку молока за 14 минут. Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком (состоящим, очевидно, из одного торта, одной банки варенья и одной кастрюльки молока)?

2. (15 баллов)
   Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$.

3. (20 баллов)
   Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

4. (20 баллов)
   Пусть квадратные матрицы из действительных чисел A и B такие, что $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$. Приведите пример таких матриц и докажите, что $detA = detB$.

5. (15 баллов)
   Решите дифференциальное уравнение $x(x+y)y' = x + xy + y^2$.

6. (15 баллов)
   Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$.

Технари и экономисты 1 курс – декабрь 2015

I курс

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Могут ли $sin\varphi$ и $cos\varphi$ быть одновременно ненулевыми рациональными числами?
3. Решить уравнение: $(tgx + ctgx)(2 + siny) = 2$.
4. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
5. Вычислите определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a, элементы его побочной диагонали равны b, а остальные элементы равны нулю.
6. Докажите тождество: $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{a}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
7. Найти $\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$, если $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x + \sqrt{1 + x^4}$ при $x > 0$.
8. Вычислите предел (или же установите, что он не существует): $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sqrt{sin\frac{1}{x^2}}$.
9. Пусть $x_i = \cos(x_{i-1})$ при $i = 2; 3; 4; \dots$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и не зависит от $x_1 (x_1 \in \mathbb{R})$.
10. Найдите $detA$, если A – матрица размера 2×2 и $A^2 + E = 0$.

Технари и экономисты 2-4 курсы – декабрь 2015

II-IV курсы

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
3. Вычислите определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a, элементы его побочной диагонали равны b, а остальные элементы равны нулю.
4. Пусть $x_i = \cos(x_{i-1})$ при $i = 2; 3; 4; \dots$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и не зависит от $x_1 (x_1 \in \mathbb{R})$.
5. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^4 - y^2 + 2x^2y}$.
6. Длина верёвки 12 метров. Каким образом нужно разрезать верёвку на 3 части длиной x, y, z (метров), чтобы величина xy^2z^3 приняла наибольшее возможное значение.
7. Вычислите неопределённый интеграл: $\int \frac{ln(lnx)}{xln^2x} dx$.
8. Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.
9. Найдите общее решение уравнения $y = xy' + x^2y''$.
10. Найдите сумму ряда $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \frac{1}{7\cdot10} + \cdots$.

Технари и экономисты ВСЕ курсы – март 2015

1. Плоскость выкрашена в три цвета. Доказать, что для любого положительного числа d найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно d.
2. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = x^2 - 4$.
3. Докажите, что определитель любого порядка (не менее двух), каждый из элементов которого по модулю равен 1, сам не может равняться по модулю 1.
4. Постройте график функции $y = \lim\limits_{n\to+\infty}(x-1)arctg(x^n)$
5. При каких a, b функция $f(x) = \begin{cases} a, x = 0 \\ b, x = 1 \\ \frac{x\ln x}{x^2-1}, x > 0, x \neq 1 \end{cases}$ дифференцируема при $x > 0$?
6. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
7. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2+i^2}$.
8. Докажите, что все решения уравнения $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ ограничены на всей числовой оси.
9. Найдите многочлен $P(x)$ третьей степени с целочисленными коэффициентами, такой что $\int_0^1 xP(x)dx = \int_0^1 x^3P(x)\,dx = \int_0^1 x^5P(x)dx = 0$.
10. Для всякой ли матрицы A второго порядка можно найти такие числа p, q, что $A^2 + pA + qE = 0$?

Технари и экономисты 1 курс и старшие курсы – март 2014

I курс

1. Доказать, что многочлен $\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{24}+\frac{x}{30}$ при любых целых x принимает целые значения.
2. Постройте линию, задаваемую уравнением $|y| = (|x|-1)(|x|-3)$.
3. Дано: *ABCD* — прямоугольник, *M* — любая точка пространства. Доказать, что $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.
4. Найти A^{2014} , если $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2014x}$.
6. Найти a и b, если $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-5)}{x^3+ax+b} = -3$.
7. Найти $f(x)$, если $\begin{cases} f'(x) = f'(x-1)\\ f(x)+f(x-1) = x\end{cases}$.
8. Доказать, что $sinx + tgx > 2x$ при $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
9. Пусть Δ_n – определитель порядка n, в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу – числами (-1), остальные элементы – нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$ и найти Δ_{14} .
10. Две вершины треугольника фиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании вдвое больше другого. Доказать, что она движется по гиперболе.

II-IV курсы

1. Постройте линию, задаваемую уравнением $log_2(4x^2 + y^2) = log_2^2(x^2 + 0{,}25y^2)$.
2. Найти $A^{20142014}$, если $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
3. Доказать, что $sinx + tgx > 2x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Пусть Δ_n – определитель порядка n, в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу – числами (-1), остальные элементы – нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$ и найти Δ_{14}.
5. Найти $y(x)$,если $y(x) = \int_0^x y^2(t)dt + 2014x$.
6. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 2014y_1 + y_2 \\ y_2' = 2014y_2 + y_3 \\ y_3' = 2014y_3 \end{cases}$.
7. Функция $f(x)$ положительна на всей оси. Вычислить $\int_a^b \frac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}$.
8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2}e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2}e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{2n}{n^2}e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$.
9. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
10. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ – последовательные корни уравнения $x = tgx$?

Технари и экономисты 1 курсы – декабрь 2014

1. Дроби $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$ образуют арифметическую прогрессию. Можно ли составить арифметическую прогрессию, содержащую 4 члена вида $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ и такую, что все её члены различны? А аналогичную, содержащую 10 членов такого вида? А 1000 членов?

2. Пусть $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 21C & 7Z & 133c \\ 15A & 5X & 95a \\ 3B & Y & 19b \end{vmatrix}$. Вычислить $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

3. Вычислите $\cos 7^0 + cos79^0 + cos151^0 + cos223^0 + cos295^0$.

4. Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются под углом 30^0. Докажите, что хотя бы одно из чисел A_1, B_1, A_2, B_2 иррационально.

5. Найдите область определения функции $y = log_2 log_3 log_4 log_5 x$.

6. Найдите значение выражения $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5 \dots}}}}}}$.

7. Вычислите $y^{(n)}$ (n-ю производную, $n \in \mathbb{N}$) для функции $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

8. Найдите область определения функции $y = \sqrt{1 + x - e^x}$.

9. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (т.е. такие матрицы B, что $AB = BA$).

10. Может ли сечением куба (плоскостью) быть правильный пятиугольник?

Технари 1 курс – 2013

1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+...+n^n}{n^n}$.

2. Дифференцируема ли в нуле функция $f(x)=\sqrt[3]{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$?

3. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема на интервале $(0;1)$. Доказать, что если $f(0)=f(1)=0$, то в некоторой точке $(0;1)$ $f'(x)=f(x)$.

4. Решить уравнение $2^{-|x|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1|+|x-1|)$.

5. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}$ не равен нулю.

6. Найти угол, под которым пересекается парабола $y=px^2$ ($p\neq 0$) и эллипс $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

7. Доказать, что для любого натурального n число $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ является целым и нечетным.

Экономисты 2 курс и выше – 2013

1. (1 б.) Вычислить производную функции $y = \log_{(x+2\lg x)}(\cos\sqrt{x} - \log_3(arcctgx))$.

2. (2 б.) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.

3. (2 б.) Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.

4. (2 б.) Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos(\ln(x+1) - \cos(\ln x))$.

5. (3б.) Дан треугольник с вершинами $A(0;-2), B(4;0), C(0;11)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A.

6. (3 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 4, 6, 8. Какова вероятность, что оно делится
   а) на 4;

   б) на 5?

7. (3б.) Вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$.

8. (3б.) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $x = -1$, если $z = x^2 + y^2 + 2y$, где $y(x)$ есть решение уравнения $1 + x + y^2 = e^{x+y^2}$.

9. (5 б.) В круг, куда вписан квадрат, наудачу бросаются 7 точек. Какова вероятность, что 3 точки попадут в квадрат, а 4 – по одной в каждый из образовавшихся круговых сегментов?

10. (6б.) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|a\cos nx - b\sin nx|dx$, $a,b \in R, n \in N, ab > 0$.

Экономисты 1 курс – 2013

1. (1 б.) Доказать, что если $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ - медианы ΔABC, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

2. (2 б.) Вычислить производную функции $y = \log_{(x+5e^{-x})}(\sin\sqrt{x} - \lg(\arcsin x))$.

3. (2 б.) Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n} - \ln n}$ на сходимость.

4. (3 б.) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.

5. (3 б.) Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.

6. (3 б.) Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos(\ln(x+1) - \cos(\ln x))$.

7. (3 б.) Найти a и x_0 при условии, что уравнение $3x^4 - 4x^3 + a = 0$ имеет единственный корень x_0.

8. (3 б.) При каком $\alpha \in R$ существует вектор $\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a}\cdot(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 3$, $\vec{a}\times(\vec{j} - \vec{i} + 2\vec{k}) = \alpha\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?

9. (4 б.) Дан треугольник с вершинами $A(0;-4), B(3;0), C(0;6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A.

10. (4 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 2, 3, 5. Какова вероятность, что оно делится
 а) на 4;

 б) на 5?