Министерство образования и науки Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА имени И.М.ГУБКИНА

Г.Г. Литова, Д.Ю. Ханукаева

ПРЕДЕЛЫ

Пособие для студентов, обучающихся по специальности
«Прикладная математика»

Москва 2012

УДК 517.9
Л33

Литова Г.Г., Ханукаева Д.Ю.

Л33 Пределы. Пособие для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика». – М.: РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2012. – 115с.

Пособие предназначено для студентов, изучающих методы вычисления пределов в курсе высшей математики. В нем детально изложены различные приемы вычисления пределов, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения. Наряду с типовыми приемами вычисления пределов функции в точке разобраны также методы, использующие понятие производной функции и подразумевающие владение техникой дифференцирования. Знакомиться с этими методами следует после изучения темы «Производная функции одной переменной».

Пособие может использоваться студентами всех специальностей, изучающими курс математического анализа. Для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», в данное пособие включены дополнительные примеры. Ряд тонкостей вычисления пределов функций изложен более подробно. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

Ведущий научный сотрудник кафедры высшей геометрии и топологии МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор А.В. Зарелуа

Профессор кафедры высшей математики РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина В.В. Сильвестров

Учебное издание

Редактор: В.В. Калинин
Компьютерная верстка: Д.Ю. Ханукаева

Оглавление

Предисловие

В связи с введением новых федеральных государственных образовательных стандартов программы многих дисциплин подверглись существенному изменению и сокращению. Именно так обстоит дело с курсом математического анализа, который является одним из базовых курсов для специалистов в области технических и естественных наук. В результате студентам все большую долю работы по освоению учебного материала приходится выполнять самостоятельно. В помощь к этому процессу и создано данное пособие.

Кроме того, современное состояние науки и техники постоянно требует инновационных решений, т.е. постановки новых инженерных, технологических или научных задач и поиск путей их наиболее рационального решения. Поэтому важна способность каждого специалиста к самообразованию, к освоению нового, не заложенного в рамки стандартных учебных программ. Эта компетенция – одно из наиболее ценных качеств современного специалиста наряду с его профессиональной подготовкой.

Поэтому студент обязательно должен научиться работать самостоятельно, чтобы стать широко образованным, думающим специалистом, умеющим работать с литературой, способным увидеть инженерную задачу, грамотно ее поставить и найти способ решения.

Высшая математика в этом контексте важна не только как аппарат для решения задач в самых разных областях естествознания, но также является общепризнанным инструментом для развития логического мышления и вырабатывает навыки поиска решения не только чисто научных, но и практических задач. Она развивает способность видеть проблему и внутри, и извне, анализировать ее в разных аспектах и находить наиболее оптимальные пути решения.

Данное пособие посвящено основным методам вычисления пределов различных функций в точке. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, затем разбирается довольно большое количество примеров, после которых предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведены ответы к этим задачам. Кроме того, авторы сочли разумным привести примерные варианты рейтинговых работ по материалу, изложенному в пособии.

Решение многих примеров в данном пособии изложено очень подробно. Авторы надеются, что это поможет разобраться в материале, который недостаточно был усвоен на лекциях или практических занятиях. Кроме того, наряду с простыми примерами разбираются и более сложные. Они могут оказаться полезными для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», а также для всех тех, кто не хочет ограничиваться рамками минимальных знаний по данному разделу курса высшей математики.

Предлагаемое пособие может быть полезно не только студентам, начинающим знакомство с вычислением пределов, но также и магистрантам, аспирантам и инженерам, желающим восстановить свои знания в этой области. Преподаватели, ведущие занятия по данному разделу курса высшей математики, также могут найти здесь примеры для решения на семинарах.

Разумеется, изложенный в пособии материал не исчерпывает всего разнообразия приемов нахождения пределов функций. Представлены только самые основные методы и наиболее распространенные типовые задачи. Теория пределов функций глубоко изложена в учебниках [1-5], а большое количество примеров для решения имеется в [6-7].

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Т.1. – М.: Айрис-пресс, 2004. 253с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. – СПб.: Лань, 2006. 736с.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике; учебное пособие. – М.: Наука, 1973. 640с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика; учебник для ВУЗов. Т.1. – М.: Дрофа, 2004. 509с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления; учебное пособие для ВУЗов. Т.1. – М.: Физматлит, 2006. 864с.
6. Демидович Б.П. (ред.). Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: АСТ, 2001. 495с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2004. 432с.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:
http://kvm.gubkin.ru/index.html

§1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Напомним, что каждое действительное число изображается точкой на координатной оси; будем называть эту точку собственной. Удобно считать, что есть еще две несобственные точки, бесконечно удаленные от начала координат, соответственно, в положительном и отрицательном направлениях: $+\infty$ и $-\infty$.

Определение. ***Интервал* (*a*; *b*)** – это множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, где a, b – фиксированные числа.

Определение. ***Отрезок* [*a*; *b*]** – это множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$, где a, b – фиксированные числа.

Определение. ***Полуинтервалы* [*a*; *b*), (*a*; *b*]** – множества действительных чисел, удовлетворяющих, соответственно, неравенствам $a \le x < b$ и $a < x \le b$, где a, b – фиксированные числа.

Общее название для всех определенных понятий – ***промежуток***.

Определение. ***ε - окрестность точки a*** – множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, т.е. интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (рис.1).

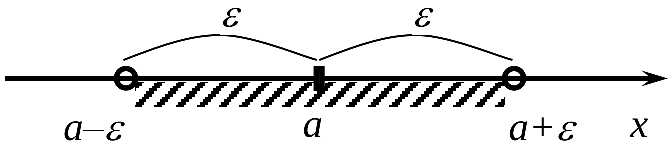

Рис. 1.

Определение. ***Проколотая окрестность точки a*** – множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \varepsilon$, т.е. интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ с выколотой точкой a.

M ***- окрестность несобственной точки*** $+\infty$ – множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x > M$, т.е. интервал $(M; +\infty)$ (рис.2).

M ***- окрестность несобственной точки*** $-\infty$ – множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x < M$, т.е. интервал $(-\infty; M)$ (рис.3).

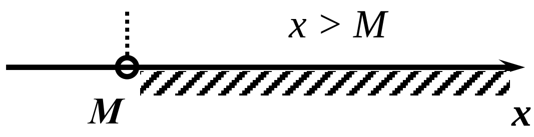

Рис. 2.

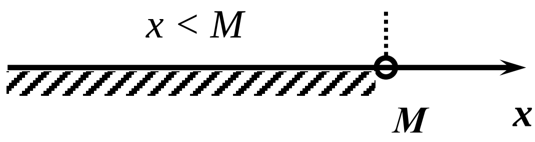

Рис. 3.

Определение. ***Модуль действительного числа а:***

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Полезные соотношения (рис.4):

$$|x| = a \;\Leftrightarrow\; x = \pm a,$$
$$|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a,$$
$$|x| > a \;\Leftrightarrow\; x > a \quad \text{или} \quad x < -a.$$

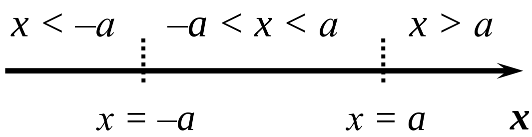

Рис. 4.

На практике часто приходится иметь дело со ***сложной функцией*** или функцией от функции. Она получается, когда в некоторую функцию вместо аргумента подставляют другую функцию от другого аргумента. Например, если $y = \cos z$, а $z = x^3$, то получится сложная функция $y = \cos x^3$. Иногда функцию $z(x)$ называют внутренней функцией, а $y(z)$ – внешней функцией.

Определение. ***Элементарными функциями*** называют класс функций, состоящий из степенных функций, многочленов, рациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических, гиперболических, обратных гиперболических функций, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырех арифметических действий и операции взятия сложной функции, применяемых конечное число раз.

§2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Определение. ***Последовательностью*** $\{x_n\}$ будем называть пронумерованное бесконечное множество чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Определение. Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ и записывается $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $N = N(M)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$.

Замечание 1. Определения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ вводятся аналогично. Сформулируйте их самостоятельно.

Определение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***.

Определение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ то последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***.

Определение. Последовательность, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***.

Свойства пределов сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c, \quad c = const$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, в частности,

3а. $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Обратимся к геометрическому толкованию предела последовательности.

Пусть задана некоторая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Члены этой последовательности и число a изображены на координатной оси (рис.5).

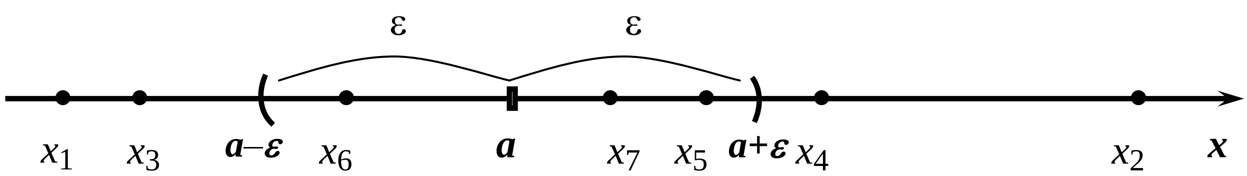

Рис. 5.

Зададим любое ε и построим ε-окрестность точки a, т.е. интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Существование $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$, или, что то же, $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ для $n > N$. В частности, для последовательности, изображенной на рис.5, все члены, начиная с пятого (т.е. для этого примера $N = 4$), попадают в ε - окрестность точки a и, следовательно, отличаются от a не больше, чем на ε. Если бы мы выбрали ε меньше, то номер $N(\varepsilon)$ был бы уже бóльшим. Чем больше номер члена последовательности, тем ближе этот член располагается к точке a и тем меньше отличается от a. Поскольку ε выбирается произвольно, оно может быть малым (сколь угодно малым!), и потому мало (сколь угодно мало!) отличаются от предела a члены последовательности, оказавшиеся в ε - окрестности точки a, а их бесконечное множество, т.е. сколько угодно членов последовательности сколь угодно мало отличаются от a.

На рис.5 для выбранного ε число $N = 4$, т.к. при $n > 4$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Если выбрать другое значение ε, то, очевидно, получим другое N, т.е. N зависит от ε: $N = N(\varepsilon)$.

Замечание 2. В любой окрестности точки a (предела последовательности) находится бесчисленное множество членов последовательности (все ее члены, начиная с некоторого), вне ее – конечное число их.

Замечание 3. Члены последовательности могут «приближаться» к своему пределу а) и слева, и справа; б) только справа; в) только слева. Придумайте соответствующие примеры-рисунки и покажите на них, как для каждого ε подбирается свое значение N.

ПРИМЕР 1. Дана последовательность $\{x_n\} = \{2; 3/2; 5/4; 9/8; \ldots\}$.

а) Написать одно из возможных выражений для общего члена.

б) Написать $x_5, x_6, x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+k}$.

в) Выбрав подходящий масштаб, изобразить на координатной оси первые шесть членов.

г) Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

д) Начиная с какого n выполняется неравенство $|x_n - 1| < 0,2$ ($\varepsilon_1 = 0,2$)? Чему равно N для этого случая? Результат проиллюстрировать на координатной оси изображением ε_1-окрестности точки $x = 1$.

е) Найти ε_2-окрестность точки $x = 1$, если $\varepsilon_2 = 0{,}01$. Найти число точек, лежащих вне ε_2-окрестности точки $x = 1$; сравнить это количество с числом точек, лежащих вне ε_1-окрестности точки $x = 1$.

Решение. а) Заметив, что

$$x_1 = 2 = 1+1 = 1+\frac{1}{2^0}, \qquad x_2 = \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2^1},$$

$$x_3 = \frac{5}{4} = 1+\frac{1}{4} = 1+\frac{1}{2^2}, \qquad x_4 = \frac{9}{8} = 1+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2^3},$$

получаем $x_n = 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(n = 1,2,3,...)$. (1)

б) Подставляя в формулу (1) вместо n номера соответствующих членов последовательности, имеем:

$$x_5 = 1+\frac{1}{2^4} = \frac{17}{16}; \; x_6 = 1+\frac{1}{2^5} = \frac{33}{32};$$

$$x_i = 1+\frac{1}{2^{i-1}}; \; x_{i-1} = 1+\frac{1}{2^{i-2}}; \; x_{i+k} = 1+\frac{1}{2^{i+k-1}}.$$

в) Первые шесть членов заданной последовательности изображены на рис.6.

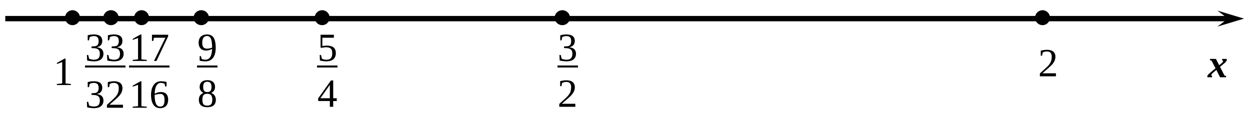

Рис. 6.

г) В соответствии с определением предела, надо показать, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно отыскать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Решая неравенство $\left|1+\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right| < \varepsilon$, получаем

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon, \quad 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n-1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > 1 - \log_2 \varepsilon.$$

Выбирая в качестве N целую часть числа $1-\log_2 \varepsilon$, $N = E(1-\log_2 \varepsilon)$, получаем, что для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ найдено такое число $N = N(\varepsilon) = E(1-\log_2 \varepsilon) > 0$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

д) Повторяя рассуждения пункта г), решаем неравенство $|x_n - 1| < 0,2$:

$$\frac{1}{2^{n-1}} < 0,2, \qquad 2^{n-1} > 5, \quad n-1 > \log_2 5, \qquad n > 1 + \log_2 5.$$

Т.к. $\log_2 5 > \log_2 2^2 = 2$, то $n = 1 + \log_2 5 > 3$ и требуемое неравенство выполняется, начиная с $n = 4$, а потому $N = E(1+\log_2 5) = 3$.

Для точки $x = 1$ ε_1-окрестность ($\varepsilon_1 = 0,2$) – это интервал $(1-0,2; 1+0,2) = (0,8; 1,2)$. На рис.7 видно, что все члены последовательности, начиная с четвертого, лежат в ε_1-окрестности точки $x = 1$. Вне этой окрестности находятся три точки.

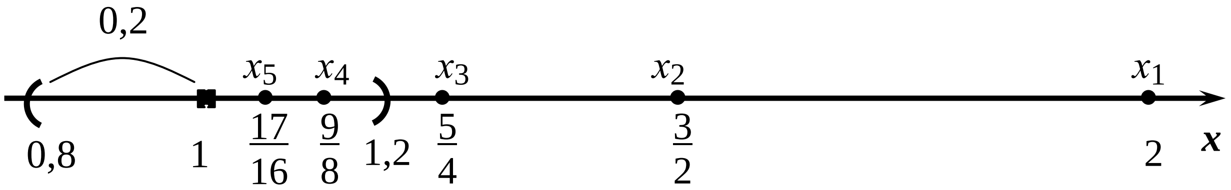

Рис. 7.

е) Для точки $x = 1$ ε_2-окрестность ($\varepsilon_2 = 0,01$) находим, решая неравенство $|x_n - 1| < 0,01$: $0,99 < x_n < 1,11$. Вне этого интервала остаются члены последовательности, удовлетворяющие неравенству $|x_n - 1| > 0,01$.

$$\frac{1}{2^{n-1}} > 0,01, \qquad 2^{n-1} < 100, \quad n-1 < \log_2 100, \quad n < 1 + \log_2 100.$$

Т.к. $\log_2 100 < \log_2 2^7 = 7$, то $n < 8$. Значит, вне окрестности находятся семь членов последовательности. Начиная же с восьмого члена все они попадают в ε_2-окрестность точки $x = 1$.

Сравнивая случаи $\varepsilon_1 = 0{,}2$ и $\varepsilon_2 = 0{,}01$, делаем вывод: чем меньше ε, тем большее число членов последовательности остается вне окрестности точки $x = 1$. Но (и это главное!) в любом случае <u>все остальные</u> члены лежат в соответствующей ε-окрестности точки $x = 1$, если число 1 является пределом этой последовательности. ■[1]

ПРИМЕР 2. Объяснить, почему последовательность 1, 0, 1, 0, ... не имеет предела.

Решение. Все бесконечное множество членов этой последовательности располагается в двух точках координатной оси: $x = 0$ и $x = 1$. Для того чтобы некоторое число a было пределом последовательности, надо, чтобы в <u>любой</u> ε-окрестности этой точки находились все члены данной последовательности, начиная с некоторого (см. Замечание 2). Пусть a – произвольное действительное число. Тогда всегда можно подобрать такое малое ε, чтобы в ε-окрестность этой точки не попали члены последовательности, либо выражаемые числом 1, либо выражаемые числом 0. Таким образом, вне этой окрестности будет находиться бесчисленное множество членов последовательности, и, значит, утверждение, что все члены последовательности, начиная с некоторого, будут лежать в ε-окрестности точки a, не справедливо. Следовательно, число a не будет пределом последовательности. Т.к. a произвольно, то нет такого числа, которое являлось бы пределом заданной последовательности. ■

[1] Черным квадратиком ■ здесь и далее обозначается, что рассмотрение примера завершено.

ПРИМЕР 3. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n}{3n+1}$ имеет своим пределом число 1/3.

Решение. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $n > N$ будет следовать неравенство $\left|x_n - 1/3\right| < \varepsilon$.

Решим последнее неравенство. Т.к. $\left|x_n - \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{n}{3n+1} - \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{-1}{3(3n+1)}\right| = \dfrac{1}{9n+3}$, то

$$\frac{1}{9n+3} < \varepsilon, \qquad 9n+3 > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad n > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

Пусть $N = E\left(\dfrac{1}{9\varepsilon} - \dfrac{1}{3}\right)$, тогда при $n > N$ и произвольном выборе $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство $\left|x_n - \dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$. ■

ПРИМЕР 4. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ является бесконечно малой при $n \to \infty$.

Решение. Согласно определению бесконечно малой последовательности надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $n > N$ будет следовать неравенство $\left|x_n - 0\right| < \varepsilon$. Т.к. $\left|x_n - 0\right| = \left|\dfrac{1}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$, то получим

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon, \qquad n^2 > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Пусть $N = n(\varepsilon) = E\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, тогда для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|x_n\right| < \varepsilon$, что и доказывает факт: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

Замечание 4. Аналогично можно доказать, что последовательности с общими членами $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и другие последовательности с общим членом вида $1\big/n^p$, где p – любое положительное число, являются бесконечно малыми при $n \to \infty$.

ПРИМЕР 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

а) $x_n = \dfrac{4n^3 + 3n + 1}{3 + 2n^2 + 5n^3}$; б) $x_n = \dfrac{\sqrt{3n^3 + n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$; в) $x_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{3 + 2n^3}$.

Решение. При решении каждого из данных примеров применяется один и тот же прием: в числителе и знаменателе выносятся члены со старшей степенью n, которые затем сокращаются. Более подробное обсуждение этого приводится в Замечании 3 из §3.

а) Высшей степенью с основанием n и в числителе, и в знаменателе является n^3, его выносим за скобки и сокращаем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(4 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{3}{n^3} + \dfrac{2}{n} + 5\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{3}{n^3} + \dfrac{2}{n} + 5};$$

по свойству 4 пределов последовательностей последнее выражение можно представить в виде дроби от деления двух пределов, затем в числителе и в знаменателе предел суммы можно по свойству 2 заменить на сумму пределов. Далее, опираясь на решение примера 4 и Замечание 4, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{3}{n^3} + \dfrac{2}{n} + 5} = \frac{4 + 0 + 0}{0 + 0 + 5} = \frac{4}{5}.$$

б) В данном примере высшей степенью n является $n^{3/2}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\left(\frac{\sqrt{3n^3+n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}\right)}{\sqrt{n^3}\sqrt{\frac{n^3+1}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3+0}+0}{\sqrt{1+0}} = \sqrt{3}\,.$$

в) Числитель представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$. Используя формулу суммы n членов арифметической прогрессии, получаем

$$1+2+...+n = S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Тогда $\quad x_n = \dfrac{(1+n)n}{2(3+2n^3)}$.

Выносяза скобки в числителе n^2, в знаменателе n^3, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2(3+2n^3)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)}{n^3\left(2+\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+1}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\frac{0+1}{2+0} = 0\,.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№1. Написать несколько первых членов последовательности, а также x_{100}, x_m, x_{m+2}, если задан общий член последовательности:

а) $x_n = \dfrac{n+1}{2n^2+n}$; б) $x_n = \dfrac{4n+3}{3^n}$; в) $x_n = \dfrac{\sin[\pi(n+1)/2]}{n^3}$.

№2. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$;

начиная с какого номера n выполняется неравенство $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}$?

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1;$

сколько членов последовательности лежит в интервале $\left(1 - \frac{1}{100}; 1 + \frac{1}{100}\right)$?

№3. Показать, что последовательность 1, –1, 2,–2, 3, –3, ... не имеет предела.

№4. Дана последовательность $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$. Написать выражение для ее общего члена. Доказать, что эта последовательность является бесконечно малой.

№5. Привести примеры бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

№6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

а) $x_n = \frac{2n^4 + n + 3}{3n^2 + n^3}$; б) $x_n = \frac{(2n+5)(3n-1)}{5n^2 + 3n}$;

в) $x_n = \frac{(2n-1)^3(3n+1)^2}{(2n+1)^5}$; г) $x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{\ln\left(e - \frac{1}{2^n}\right)}$.

§3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Точка a действительной оси называется ***предельной точкой множества X***, если в любой окрестности точки a содержатся точки из множества X, отличные от a.

Точка a может быть как собственной точкой множества X (т.е. $a \in X$), так и несобственной ($a \notin X$).

Определение (по Коши). Пусть точка a является предельной точкой области определения $X = D(f)$ функции $f(x)$. Число A называется ***пределом функции f(x) в точке a*** (записывается $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$), если для любой окрестности V точки A существует такая проколотая окрестность U точки a, что для всех $x \in X$, лежащих в U, соответствующие значения $f(x) \in V$.

Число A может быть как конечным, так и бесконечным.

Для случая **конечных** a и A имеет место

Определение (на языке «ε - δ»). Число A называется ***пределом функции f(x) в точке a***, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ и входящих в область определения функции $f(x)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В случаях бесконечных a или A имеем

Определение (на языке «ε - M»). Число A называется ***пределом функции f(x) при $x \to +\infty$*** ($A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x > M$ и входящих в область определения функции $f(x)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=+\infty$.

Предлагаем самостоятельно дать определения пределов для случаев:

$a = -\infty, A = -\infty, A = +\infty$ и т.д.

Геометрическая иллюстрация «ε - δ» определения для случая конечных a и A выглядит следующим образом. Пусть дан график функции $y = f(x)$ (рис.8) и пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

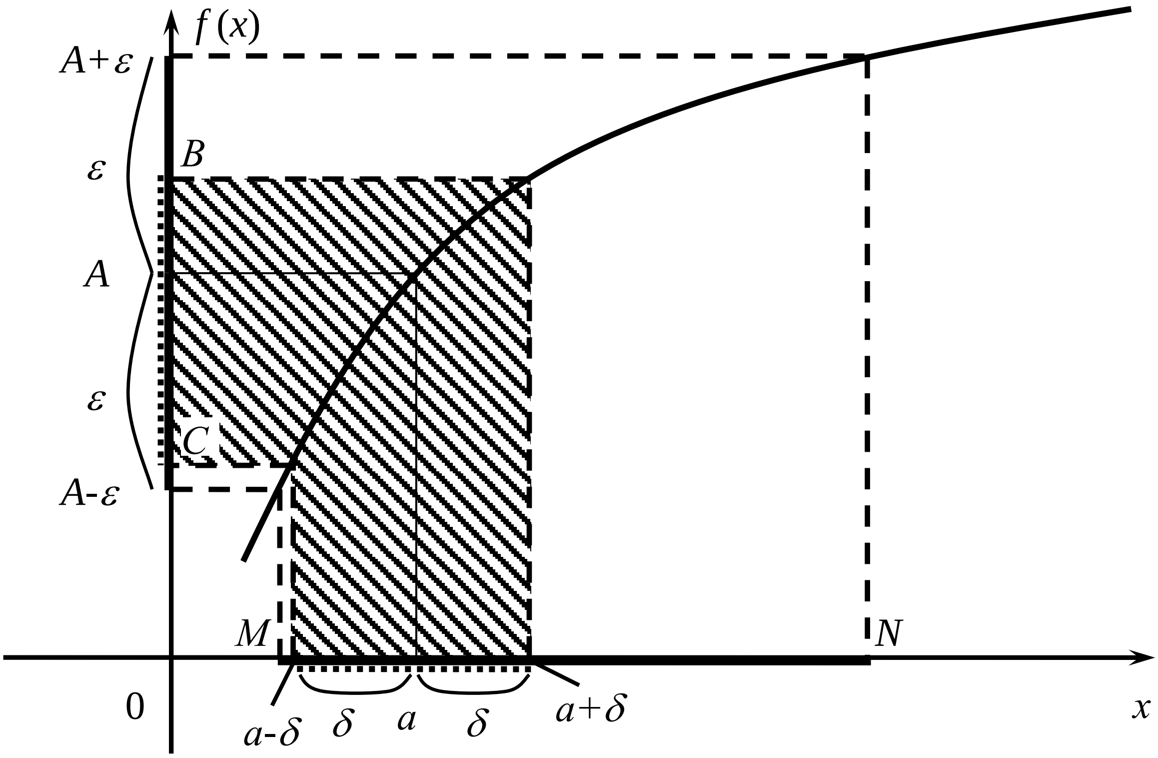

Рис. 8.

Покажем, как по произвольно заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x (из области определения $f(x)$), удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, т.е. взятых из проколотой δ - окрестности точки a: $a-\delta<x<a+\delta,\ \ x\neq a$ соответствующие значения $f(x)$ удовлетворяли бы неравенству $|f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. попали бы в ε - окрестность точки A: $A-\varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Выберем произвольно число ε; возьмем отрезок длины ε:

На оси Oy строим ε - окрестность точки A, откладывая отрезки длины ε вверх и вниз от точки A; при этом получатся точки $A+\varepsilon$ и $A-\varepsilon$. Значениям $f(x)$, попавшим в ε - окрестность точки A (она на рисунке выделена линией), соответствуют значения x на отрезке MN оси Ox (выделены линией). Из двух отрезков Ma и aN выбираем меньший (на рис.8 это отрезок Ma); в качестве величины δ можно взять любую длину, не превышающую длины отрезка Ma. Отложив отрезок длины δ и влево, и вправо от a, имеем δ - окрестность точки a (отмечена линией). И тогда любым x из полученной δ - окрестности точки a, будут соответствовать значения $f(x)$ из промежутка (C, B), лежащего внутри ε - окрестности точки A, т.е. эти значения будут удовлетворять неравенству $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Итак, показано, что по произвольно выбранному ε подобрано такое δ, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ (проколотая δ - окрестность точки a) следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Правила вычисления пределов функций

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c, \quad c = const$;

Если пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то справедливы равенства:

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, в частности,

3а. $\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Замечание 1. Правило вычисления предела произведения двух функций справедливо и в том случае, если предел только одной из них конечен.

Часто применяются следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел);

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\approx 2,7183$ (второй замечательный предел).

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией при x→a,*** если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется ***бесконечно большой функцией при x→a,*** если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=+\infty$, или $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=-\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left|\beta(x)\right|=+\infty$.

Аналогично определяются бесконечно малая и бесконечно большая функции при $x\to\infty$.

Замечание 2. Если при $x\to a$ $\beta(x)$ – бесконечно большая функция, то $1/\beta(x)$ является бесконечно малой функцией; если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая функция.

ПРИМЕР 1. Пользуясь ε - δ, ε - M и другими определениями предела функции в точке, показать, что

а) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)=3$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+4}=\dfrac{2}{3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

Решение. а) Надо показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x (область определения функции $f(x)=4x-5$ – вся числовая ось), удовлетворяющих неравенству $0 < |x-2| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-3| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно неравенствам:

$$|4x-5-3| < \varepsilon; \quad |4x-8| < \varepsilon; \quad 4|x-2| < \varepsilon; \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Принимая $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, получаем, что из неравенства $|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$ следует неравенство $|(4x-5)-3| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x \to 2}(4x-5) = 3$.

б) Надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq -\frac{4}{3}$, для которых $|x| > M$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{2x-1}{3x+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Действительно, преобразуя последнее неравенство, имеем

$$\left|\frac{6x-3-6x-8}{3(3x+4)}\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{-11}{3(3x+4)}\right| < \varepsilon; \quad \frac{11}{9\left|x+\frac{4}{3}\right|} < \varepsilon;$$

$\left|x+\frac{4}{3}\right| > \frac{11}{9\varepsilon}$, после чего принимаем $M = \frac{11}{9\varepsilon}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $M = \frac{11}{9\varepsilon}$ такое, что из неравенства $\left|x+\frac{4}{3}\right| > M$ следует неравенство $\left|\frac{2x-1}{3x+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, что и означает: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2}{3}$.

в) Надо показать, что для любого $M > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(M) > 0$, что из неравенства $0 < |x-1| < \delta$ будет следовать неравенство $\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > M$.

Т.к. $\left|\dfrac{1}{(1-x)^2}\right| = \dfrac{1}{(1-x)^2} > M$, то $0 < (1-x)^2 < \dfrac{1}{M}$, откуда $0 < |1-x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ и $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$. Если принять $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, то для любого $M > 0$ из неравенства $0 < |x-1| < \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ следует неравенство $\left|\dfrac{1}{(1-x)^2}\right| > M$, что и означает $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. ■

Обратимся к тактике вычисления пределов, которую продемонстрируем на примерах.

I. Непосредственное вычисление пределов

ПРИМЕР 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}$.

Решение. Т.к. при $x \to 1$ пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то можно пользоваться свойством предела частного:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x}{x^2-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)};$$

далее пользуемся свойствами предела суммы и вынесения константы за знак предела:

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2 + 3\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}x^2 - 2} = \frac{1+3}{1-2} = -4. \ ■$$

В дальнейшем изложенные только что подробные выкладки будут опускаться.

ПРИМЕР 3. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Решение. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}=\dfrac{0}{-2}=0$, откуда и следует, что по определению данная функция является бесконечно малой при $x \to 0$.

Обратите внимание: данная функция не является бесконечно малой при $x \to 1$ (см. Пример 2). ■

ПРИМЕР 4. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}$, уже разобранная в примерах 2 и 3, является бесконечно большой при $x \to \sqrt{2}$.

Решение. Преобразуем дробь $\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-2}{x^2+3x}}$. Функция $\dfrac{x^2-2}{x^2+3x}$ является бесконечно малой при $x \to \sqrt{2}$, т.к. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}=\dfrac{x^2-2}{x^2+3x}=\dfrac{0}{2+3\sqrt{2}}=0$. Тогда исходную функцию можно рассматривать как «обратную» к функции $\dfrac{x^2-2}{x^2+3x}$ при $x \to \sqrt{2}$. Следовательно, в соответствии с Замечанием 2, функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to \sqrt{2}$. ■

II. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to \infty$

Как было показано в предыдущем пункте, вычисление любого предела от элементарной функции при $x \to a$ следует начинать с подстановки в функцию вместо x значения a.

В некоторых случаях при этом получается выражение вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, называемое неопределенностью по той причине, что результат его нельзя вычислить, надо находить предел, который может быть равен ∞, нулю, любому другому числу или не существовать, т.е. не определен заранее.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ и точку x_0. «Процессом» будем называть изменение значения функции $f(x)$ при приближении ее аргумента к x_0. Пусть в окрестности некоторой точки какая-либо функция является бесконечно большой. Тогда ее бесконечное возрастание можно трактовать как происходящий при $x \to x_0$ «процесс», в котором функция неограниченно увеличивается. Та же функция при стремлении аргумента к другой точке может быть бесконечно малой, т.е. ее бесконечное убывание может трактоваться как «процесс», при котором функция уменьшается, приближаясь к значению нуль.

Тогда в неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ имеется два «процесса»: неограниченно увеличивается и числитель, и знаменатель. Очевидно, результат зависит от взаимосоотношения этих процессов. Об этом будет сказано ниже. А пока для выяснения неопределенности можно предложить следующее: вынести за скобки в числителе и знаменателе высшую степень x каждого из них, а затем воспользоваться свойствами пределов функций, аналогично тому, как это делалось при вычислении пределов последовательностей.

ПРИМЕР 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x+3}{2+x+5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2+3x+5x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+3}{x^3+5x^4}$.

Решение. а) Высшие степени x в числителе и знаменателе – соответственно x^3 и x^2. Выносим их за скобки, затем сокращаем дробь на x^2 и пользуемся правилами вычисления пределов с учетом Замечания 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x+3}{2+x+5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+5\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+5\right)}\cdot\lim_{x\to\infty}x=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{т.к. при } x\to\infty \text{ дроби } \frac{2}{x^2},\frac{3}{x^3},\\ \frac{2}{x^2},\frac{1}{x} \text{ стремятся к нулю, то}\end{array}\right\|=\frac{4+0+0}{0+0+5}\cdot\lim_{x\to\infty}x=\frac{4}{5}\cdot\infty=\infty.$$

б) Аналогично $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2+3x+5x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+5\right)}=\dfrac{1+0}{0+0+5}=\dfrac{1}{5}.$

в) В этом примере высшие степени числителя и знаменателя – соответственно x^2 и x^4 (выносим их за скобки):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+3}{x^3+5x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(\frac{1}{x}+5\right)}=\frac{4-0+0}{0+5}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{4}{5}\cdot 0=0.\ \blacksquare$$

Замечание 3. Сравним высшие степени x числителей и знаменателей в дробях примера 5 и обратим внимание на зависимость полученных ответов от этих степеней:

а) высшая степень числителя x^3, знаменателя – x^2, т.е. в числителе степень выше, при этом предел дроби равен ∞;

б) высшие степени x в числителе и знаменателе одинаковы (x^3), при этом предел дроби равен 4/5, т.е. отношению коэффициентов при высших степенях x числителя и знаменателя;

в) высшая степень числителя x^3, знаменателя – x^4, т.е. в знаменателе степень выше, при этом предел равен 0.

Выводы. Сравнивая высшие степени x числителя и знаменателя в неопределенностях вида $\frac{\infty}{\infty}$, получаем:

1. **∞, если степень выше в числителе;**
2. **0, если степень выше в знаменателе;**
3. **отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя, если они равны.**

В простейших случаях будем пользоваться этими выводами.

ПРИМЕР 6. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{4x^2+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{4-x}{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{5x^4+1}}{2+4x}$ (два предела) и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{5x^4+1}}{2+4x}$.

Решение. а) Делим числитель и знаменатель на x, подводя x под корни второй, третьей и четвертой степени:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}}{\sqrt[4]{\frac{x}{x^4}}+\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+1/x^2}+\sqrt[3]{1/x}}{\sqrt[4]{1/x^3}+\sqrt{4+1/x^2}}=\frac{\sqrt{3}+0}{0+\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Конечно, можно было воспользоваться Выводами Замечания 3, а именно: высшая степень и числителя, и знаменателя – $\sqrt{x^2}$, т.е. x^1, поэтому в ответе будет стоять отношение коэффициентов перед ними: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty} 5^{\frac{4-x}{5+3x}} = 5^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x}{5+3x}} = 5^{-\frac{1}{3}}$, т.к. высшие степени числителя и знаменателя совпадают, отношение коэффициентов при них равно $-\frac{1}{3}$. Здесь не дается обоснование перехода от предела показательной функции к пределу ее показателя. Правомерность подобного перехода для этой и других непрерывных функций будет рассмотрена в §6.

в) В подкоренном выражении выносим x^4 за скобки и извлекаем корень, в знаменателе выносим за скобку x:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{5x^4+1}}{2+4x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt[4]{5+\frac{1}{x^4}}}{x\left(\frac{2}{x}+4\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{5+\frac{1}{x^4}}}{\frac{2}{x}+4} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{4} = \left\| \begin{array}{l} \nearrow \underline{\text{при } x\to+\infty} \\ \searrow \underline{\text{при } x\to-\infty} \end{array} \right\| \begin{array}{l} = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}1 = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}, \\ = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x} = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(-1) = -\frac{\sqrt[4]{5}}{4}. \end{array}$$

Обозначим $\frac{\sqrt[4]{5x^4+1}}{2+4x} = f(x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}$ означает по определению предела, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти такое $M_1 = M_1(\varepsilon_1) > 0$, что для всех $x > M_1$ и входящих в область определения функции $f(x)$, выполняется неравенство $\left| f(x) - \frac{\sqrt[4]{5}}{4} \right| < \varepsilon_1$. Другими словами, для значений x, достаточно удаленных вправо по оси Ox, значение $f(x)$ мало отличается от числа $\frac{\sqrt[4]{5}}{4}$.

Аналогично, из того, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\sqrt[4]{5}}{4}$ следует, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ можно найти такое $M_2 = M_2(\varepsilon_2)$, что для всех $x < M_2$ и входящих в область определения функции $f(x)$, будет $\left| f(x) - \left(-\frac{\sqrt[4]{5}}{4} \right) \right| < \varepsilon_2$. Т.е. для значений x, достаточно удаленных влево по оси Ox, значение $f(x)$ мало отличается от числа $-\frac{\sqrt[4]{5}}{4}$.

Существование предела $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означало бы, что для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы найти такое $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, было бы $|f(x) - A| < \varepsilon$. Т.е. должно существовать такое число A, чтобы для всех x, достаточно удаленных и влево и вправо по оси Ox, значение $f(x)$ мало отличалось бы от числа A. В силу изложенного такого числа просто нет, а потому $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ не существует. ■

III. *Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при $x \to a$*

В разделе *II* изменение функции при стремлении ее аргумента к некоторому значению рассматривалось как «процесс». В выражении вида $\frac{0}{0}$ стоящий в числителе 0 означает, что в этом «процессе» числитель уменьшается, при этом дробь тоже уменьшается, стоящий же в знаменателе 0 указывает, что в том же «процессе» знаменатель уменьшается, при этом дробь увеличивается. Каков же будет результат? Это требует выяснения.

Напомним, что вычисление любого предела начинается с подстановки в функцию вместо независимой переменной того значения, к которому она стремится. Если получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия в некоторых случаях используются известные из курса элементарной математики теорема Безу и следствия из нее, а именно:

1. Если число a является корнем многочлена относительно x, то этот многочлен делится без остатка на разность $x - a$.

2. Если число a является корнем многочлена относительно x, то этот многочлен может быть представлен в виде произведения двух множителей: разности $x - a$ и некоторого многочлена.

Из этих утверждений следует, что многочлены, стоящие в числителе и знаменателе рассматриваемой дроби, имеют общий множитель, на который дробь можно сократить. После этого неопределенность может исчезнуть, в противном случае надо повторить процедуру. В частных случаях для разложения на множители можно использовать другие методы (формулы сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки и т.п.).

ПРИМЕР 7. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3-x^4+24}$;

в) $\lim\limits_{\alpha\to x}\dfrac{(x+\alpha)^3-x^3}{\alpha^2-x\alpha}$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(x+\alpha)^3-x^3}{\alpha^2-x\alpha}$.

Решение. В трех из этих примеров после подстановки в функцию вместо переменной x значений, к которым она стремится (1; –2; 0 соответственно), получаем $\dfrac{0}{0}$.

а) Числитель и знаменатель должны иметь общий множитель $(x - 1)$. Действительно, вынося в числителе за скобки общий множитель x и используя формулу разности квадратов, а в знаменателе применяя формулу квадрата разности, получим этот множитель $(x - 1)$, на который и сократим дробь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)}{x-1}=\left[\frac{1\cdot 2}{0}\right]=\infty.$$

Несмотря на то, что запись дроби с нулем в знаменателе не является вполне корректной, мы будем позволять себе ее и в дальнейшем. Строго надо было бы использовать Замечание 2, согласно которому функция, обратная к бесконечно малой функции, стоящей в данном случае в знаменателе, является бесконечно большой: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

Заметим, что правило вычисления предела произведения двух функций использовано здесь правомерно в силу Замечания 1.

б) Для разложения числителя на множители используем формулу: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни трехчлена, которые находятся по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Трехчлен $2x^2-x-10$ имеет корни $x_1=-2$, $x_2=5/2$, и раскладывается на множители следующим образом: $2x^2-x-10=2(x+2)(x-\frac{5}{2})=(x+2)(2x-5)$.

Знаменатель, согласно теореме Безу, делится без остатка на разность $x-(-2)=x+2$. Напомним эту операцию, <u>не забыв делимое и делитель расположить по убывающим степеням x</u>:

1) первый член делимого $-x^4$ делим на первый член делителя x и результат $-x^3$ записываем в частном;

2) $-x^3$ умножаем на делитель и записываем под делимым;

3) вычитаем из делимого выражение, стоящее под ним, записывая результат по убывающим степеням x;

4) снова повторяем процедуру с выражением, получившимся в результате вычитания, пока не получим в остатке 0.

$$
\begin{array}{l|l}
-x^4+x^3+24 & \underline{x+2} \\
-\underline{-x^4-2x^3} & -x^3+3x^2-6x+12 \\
\quad 3x^3+24 & \\
\quad -\underline{3x^3+6x^2} & \\
\qquad -6x^2+24 & \\
\qquad -\underline{-6x^2-12x} & \\
\qquad\quad 12x+24 & \\
\qquad\quad -\underline{12x+24} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Теперь, используя следствие из теоремы Безу, получим: $-x^4+x^3+24=(x+2)(-x^3+3x^2-6x+12)$. В результате имеем:

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-x-10}{x^3-x^4+24}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x-5)}{(x+2)(-x^3+3x^2-6x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2x-5}{-x^3+3x^2-6x+2}=-\frac{9}{34}.$$

в) Судя по условию предела $\alpha\to x$, переменной здесь является α, x играет роль параметра. Если $x\neq 0$, то подставляя вместо α значение x, получим:

$$\lim_{\alpha\to x}\frac{(x+\alpha)^3-x^3}{\alpha^2-x\alpha}=\frac{(x+x)^3-x^3}{x^2-x^2}=\left(\frac{7x^3}{0}\right)=\infty.$$

Если же $x=0$, то исходно имеем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(0+\alpha)^3-0^3}{\alpha^2-0\cdot\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^3}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\alpha=0.$$

Во втором из этих двух примеров при подстановке вместо α числа 0 имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя в числителе формулу разности кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а в знаменателе вынося α за скобки, получим:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(x+\alpha)^3-x^3}{\alpha^2-x\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{(x+\alpha-x)((x+\alpha)^2+(x+\alpha)x+x^2)}{\alpha(\alpha-x)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha((x+\alpha)^2+(x+\alpha)x+x^2)}{\alpha(\alpha-x)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{(x+\alpha)^2+(x+\alpha)x+x^2}{\alpha-x}=$$

$$=\frac{x^2+x^2+x^2}{-x}=-3x.$$

Заметим, что найденное значение предела верно при любом x, в том числе и при $x=0$.■

IV. Вычисление пределов, содержащих иррациональности

Иногда при наличии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (или $\infty-\infty$, которая будет разбираться ниже) функция содержит в числителе или знаменателе иррациональные выражения типа $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ и т.п. Вспоминая формулы сокращенного умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$, будем домножать числитель и знаменатель дроби на сопряженные выражения, в результате чего функции, составляющие неопределенность, превратятся в рациональные.

ПРИМЕР 8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Решение. Во всех трех примерах имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

а) Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и раскладывая квадратный трехчлен на множители (корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ – проверьте!), получим:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(x-4)\underbrace{(\sqrt{x}+2)}_{\searrow 4}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-1)(x-4)}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-1)(x-4)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

Фигурной скобкой выделено выражение, имеющее конечный предел, в данном случае равный 4. Таким же обозначением будем пользоваться и в дальнейшем.

б) Для числителя сопряженным будет выражение $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$, при умножении на которое получим формулу разности кубов; сопряженным для знаменателя будет выражение $\sqrt{x}+1$, при умножении на которое получим формулу разности квадратов. Итак, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и так же числитель и знаменатель – на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)\overbrace{(\sqrt{x}+1)}^{\nearrow 2}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}_{\searrow 3}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{(\sqrt{x})^2-1^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}1=\frac{2}{3}.$$

в) Выражение, сопряженное числителю, есть $\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}$, сопряженным для знаменателя будет выражение $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$. Поступая так же, как в предыдущем примере, имеем:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11})(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11})\overbrace{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}^{\nearrow 3}}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)\underbrace{(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11})}_{\searrow 6}}=$$

$$=\frac{3}{6}\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+10})^2-(\sqrt{2x+11})^2}{(\sqrt[3]{x})^3+1^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x+10-2x-11}{x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{-x-1}{x+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}1=-\frac{1}{2}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to2}\log_3\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}}$.

Решение. Подставляя вместо x число 2, убеждаемся в том, что под знаком логарифма имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to2}\log_3\frac{(x-2)\overbrace{(\sqrt{2x-1}+\sqrt{3})}^{\nearrow 2\sqrt{3}}}{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{3})}=\log_3\left(2\sqrt{3}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{2x-1-3}\right)=$$

$$=\log_3\left(2\sqrt{3}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{2(x-2)}\right)=\log_3\left(2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}.$$

Примененный в ходе решения переход от предела логарифмической функции к пределу ее аргумента возможен в силу ее непрерывности. Правомерность такого перехода обсуждается в §6. ■

IV. Принципы применения первого замечательного предела

Напомним, что первый замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Очевидно, что предел не зависит от обозначения переменной, т.е. $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$. Обозначим $2x = t$, тогда при $x \to 0$ будет $t \to 0$, и получим первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Или в пределе $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{(x-3)}$ обозначим $x - 3 = t$, если $x \to 3$, $t \to 0$, и снова получим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Вообще,

$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,$ т.е. 1) если аргумент синуса и знаменатель представляют собой одну и ту же функцию и 2) она стремится к нулю, то имеет место конструкция первого замечательного предела и этот предел равен единице.

ПРИМЕР 10. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x}$.

Решение. а) Подставляя предельное значение x, в первом примере имеем:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{\sin\pi}{\pi/2}=\frac{0\cdot 2}{\pi}=0.$$

NB! Здесь нет неопределенности, поэтому сразу получен ответ.

В следующем примере представим дробь в виде $\frac{\sin 2x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin 2x$. Здесь функция $\sin 2x$ при $x \to \infty$ предела вообще не имеет, но является ограниченной $(-1 \le \sin 2x \le 1)$, а множитель $1/x$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой функцией. Вопреки избранному принципу изложения материала в данном пособии (сначала – сведения из теории, затем – примеры, иллюстрирующие их) воспользуемся Свойством 3 бесконечно малых функций, приведенным далее в §4: произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция, предел которой равен нулю. Получаем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 2x = 0.$$

В последнем примере из группы а) после подстановки нуля вместо x получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Проделаем следующие операции:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

б) В первом примере: 1) аргумент синуса и знаменатель дроби совпадают, они равны $x - 1$, но 2) при $x \to 2$ имеем $x - 1 \to 1$, а не к нулю, т.е. второе условие конструкции первого замечательного предела не выполнено. Поэтому первого замечательного предела здесь нет, более того, здесь нет и неопределенности. Подставляя $x = 2$, получим ответ:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{\sin(2-1)}{2-1} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1.$$

А во втором примере оба условия, входящие в конструкцию первого замечательного предела выполнены: 1) аргумент синуса и знаменатель дроби совпадают: $x - 1$ и 2) при $x \to 1$ разность $x - 1 \to 0$, следовательно,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1.$$

В третьем примере группы б) нет неопределенности. Сразу получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x}=\frac{\sin(1-1)}{1}=\frac{\sin 0}{1}=0. \blacksquare$$

ПРИМЕР 11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-\alpha)+\sin\alpha}{x^2+\alpha x}$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\cos^2 x-\cos^2 a}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{6x-\pi}$;

д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{\cos 4x}-1}{x^2-(\pi+1)x+\pi}$.

Решение. а) Используя тригонометрическую формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2(\alpha/2)$ и конструкцию первого замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(5x/2)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x/2)}{x}\right)^2;$$

«достраиваем» выражение в скобке до первого замечательного предела, умножая знаменатель и числитель на 5/2, получим

$$2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5}{2}\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2=\frac{25}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2=\frac{25}{2}\cdot 1^2=\frac{25}{2}.$$

Подробные преобразования, проделанные в этом примере, конечно, не обязательны, и в дальнейшем будут опускаться.

б) Неопределенность $\dfrac{0}{0}$ (проверьте!). Применяем тригонометрическую формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, в знаменателе выносим x за скобки:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-\alpha)+\sin\alpha}{x^2+\alpha x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\dfrac{x-\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{x-\alpha-\alpha}{2}}{x(x+\alpha)}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\overset{\nearrow 0}{\sin\dfrac{x}{2}}\;\overbrace{\cos\dfrac{x-2\alpha}{2}}^{\nearrow\cos(-\alpha)}}{\underset{0\swarrow}{x}\;\underset{\searrow\alpha}{(x+\alpha)}}=\left\|\begin{array}{l}\text{учитывая, что при } x\to0\\ \cos\dfrac{x-2\alpha}{2}\to\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\ x+\alpha\to\alpha,\ \text{получим}\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x}=\frac{2\cos\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)\cdot2}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{2\alpha}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}=\frac{\cos\alpha}{\alpha},$$

т.к. второй множитель представляет собой первый замечательный предел.

в) Неопределенность $\dfrac{0}{0}$ (проверьте!). В числителе стоит выражение, содержащее иррациональности; в соответствии с приемом, изложенным выше, домножаем его (и знаменатель) на сопряженное выражение $\sqrt{x}+\sqrt{a}$. Знаменатель раскладываем на множители по формуле разности квадратов.

$$\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\cos x-\cos a)(\cos x+\cos a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})};$$

в числителе получилась формула разности квадратов, в знаменателе при $x\to a$ $\cos x+\cos a\to2\cos a$, $\sqrt{x}+\sqrt{a}\to2\sqrt{a}$; к выражению $\cos x-\cos a$ применим формулу разности косинусов:

$$\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\cos x-\cos a)(\cos x+\cos a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\cos a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\lim_{x\to a}\frac{x-a}{-2\sin\dfrac{x-a}{2}\sin\dfrac{x+a}{2}}$$

Числитель полученного выражения разделим и умножим на 2, а также учтем, что при $x\to a$ имеем $A=\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\to1$, поэтому $\dfrac{\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}}=\dfrac{1}{A}\to1$, кроме того, $\sin\dfrac{x+a}{2}\to\sin a$ при $x\to a$. Итак,

$$\frac{1}{2\cos a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\lim_{x\to a}\frac{x-a}{-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{a}\,2\cos a\sin a}\lim_{x\to a}\frac{\frac{x-a}{2}\cdot 2}{\sin\frac{x-a}{2}}=$$

$$=-\frac{2}{4\sqrt{a}\,2\sin 2a}=-\frac{1}{2\sqrt{a}\sin 2a}.$$

г) Неопределенность $\frac{0}{0}$. При $x\to\frac{\pi}{6}$ будет $x-\frac{\pi}{6}\to 0$, поэтому в знаменателе выносим 6 за скобки, в числителе выносим 2 за скобки и представляем $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{6x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left\|\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\|=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}}{x-\frac{\pi}{6}};$$

$\cos\frac{\pi/6+x}{2}\to\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x\to\frac{\pi}{6}$, в знаменателе выносим знак «–» за скобки, делим и умножаем на 2, «выстраивая» первый замечательный предел:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\frac{\pi/6-x}{2}}{-\frac{\pi/6-x}{2}\cdot 2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi/6-x}{2}}{\frac{\pi/6-x}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

д) Неопределенность $\frac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\sqrt{\cos 4x}+1$; квадратный трехчлен раскладываем на множители, найдя предварительно его корни: $x^2-(\pi+1)x+\pi=0$, по теореме Виета $x_1+x_2=\pi+1,\quad x_1\cdot x_2=\pi\quad\Rightarrow\quad x_1=\pi,\quad x_2=1$ или по обычной формуле корней квадратного уравнения $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

$$D=b^2-4ac=(\pi+1)^2-4\pi=\pi^2-2\pi+1=(\pi-1)^2;$$

$$x_1=\frac{\pi+1+\pi-1}{2}=\pi;\quad x_2=\frac{\pi+1-\pi+1}{2}=1.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{\cos 4x}-1}{x^2-(\pi+1)x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\sqrt{\cos 4x}-1)(\sqrt{\cos 4x}+1)}{(\sqrt{\cos 4x}+1)(x-1)(x-\pi)};$$

в числителе формула разности квадратов, в знаменателе $\sqrt{\cos 4x}+1\to 2$, $x-1\to\pi-1$ при $x\to\pi$; получаем:

$$\frac{1}{2(\pi-1)}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 4x-1}{x-\pi};$$

в числителе выносим знак «–» за скобки и применяем формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{1}{2(\pi-1)}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 4x-1}{x-\pi}=-\frac{1}{2(\pi-1)}\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 2x}{x-\pi}=\left\|\begin{array}{l}\text{замена } x-\pi=t,\\ \text{тогда } t\to 0 \text{ при } x\to\pi\end{array}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{\pi-1}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2(\pi+t)}{t}=\left\|\begin{array}{l}\text{по формуле приведения}\\ \sin 2(\pi+t)=\sin(2\pi+2t)=\sin 2t\end{array}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{\pi-1}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2t}{t}=-\frac{1}{\pi-1}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t}{2t}\cdot\lim_{t\to 0}\sin 2t=$$

$$=\left\|\frac{\sin 2t}{2t}\to 1 \text{ при } t\to 0\right\|=-\frac{1}{\pi-1}\cdot 2\cdot 1\cdot 0=0.\blacksquare$$

ПРИМЕР 12. Показать, что: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$.

в) Чему равен $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arccos x}{x}$?

Решение. а) Неопределенность $\frac{0}{0}$. Представляем функцию в виде $\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\frac{\sin x/\cos x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

б) Неопределенность $\frac{0}{0}$. Обозначаем $\arcsin x = t$, отсюда $x = \sin t$ $\left(-\pi/2 \le t \le \pi/2\right)$, причем, если $x \to 0$, то $t = \arcsin x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{1}=1.$$

в) В данном случае неопределенности нет, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arccos x}{x}=\left(\frac{\arccos 0}{0}\right)=\left[\frac{\pi/2}{0}\right]=\infty. \blacksquare$$

Замечание 4. В дальнейшем будем считать, что нам известны пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$ (покажите!).

V. Принципы применения второго замечательного предела

Напоминаем, что второй замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{2}$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{3}$$

Замечание 5. Обратим внимание на следующие факты:

1) при подстановке в равенства (2) и (3) предельных значений x (∞ или 0 соответственно) получаем в обоих случаях неопределенность 1^{∞}.

2) Оба равенства (2) и (3) по сути выражают одну математическую модель:

$$\boxed{(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \to e \quad \text{при} \quad \alpha(x) \to 0}. \qquad (4)$$

В формуле (4) в основании степени стоит единица плюс бесконечно малая функция, а показатель степени является величиной в точности обратной к этой бесконечно малой функции (т.е. бесконечно большой функцией). Действительно, в равенстве (2) функция $1/x \to 0$ при $x \to \infty$, т.е. является некоторой бесконечно малой функцией при $x \to \infty$, а x, стоящий в показателе степени есть функция, обратная для $1/x$, и при $x \to \infty$ она является бесконечно большой функцией. В равенстве (3) функция x, стоящая в скобке, стремится к нулю при $x \to 0$, а показатель $1/x$ – тоже функция, обратная для x, и $1/x \to \infty$ при $x \to 0$, т.е. является бесконечно большой функцией.

3) $a^{+\infty} = \infty$, если $a > 1$; $a^{+\infty} = 0$, если $0 < a < 1$.

$a^{-\infty} = 0$, если $a > 1$; $a^{-\infty} = \infty$, если $0 < a < 1$.

Если же $a \to 1$, то выражение a^{∞} представляет собой неопределенность, которую будем записывать в виде 1^{∞}, а раскрывать при помощи второго замечательного предела.

ПРИМЕР 13. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{5x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{5x}$.

Решение. а) При подстановке бесконечности вместо x получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2x+3} = \left(1-\frac{5}{\infty}\right)^{\infty} = (1-0)^{\infty} = 1^{\infty} \text{ – неопределенность.}$$

Будем формировать модель (4):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2x+3} = \left\| \begin{array}{l} \text{в скобке должно быть } 1+\alpha(x), \\ \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to\infty \end{array} \right\| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{2x+3};$$

здесь $\alpha(x)=\dfrac{-5}{x}\to 0$ при $x\to\infty$. Для получения соотношения (4) в показателе степени надо иметь выражение, обратное для $-5/x$, т.е. $x/(-5)$. Домножим и разделим на него показатель степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}\cdot\frac{-5}{x}\cdot(2x+3)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}}\right]^{\frac{-5(2x+3)}{x}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{здесь использовано}\\ \text{правило } a^{nm}=(a^n)^m\end{array}\right\|=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(2x+3)}{x}}=e^{-10},$$

т.к. в квадратных скобках имеем модель (4), а выражение $\dfrac{-5(2x+3)}{x}\to -10$ при $x\to\infty$ (см. Выводы в Замечании 3).

б) Подставляя $x=0$, получим неопределенность вида 1^{∞}: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{1}{5x}}=\left(1-\dfrac{0}{7}\right)^{\frac{1}{0}}=(1-0)^{\infty}=1^{\infty}$, следовательно, опять можно формировать модель (4):

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{7}\right)^{\frac{7}{-x}\cdot\frac{-x}{7}\cdot\frac{1}{5x}}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{7}\right)^{\frac{7}{-x}}\right]^{\frac{-1}{35}}=e^{-\frac{1}{35}}.$$

в) Подставляя $x=0$, убеждаемся в том, что в данном случае нет неопределенности, и сразу приходим к ответу:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{5x}=(1-0)^0=1^0=1.\ \blacksquare$$

Замечание 6. Пример 13 в) показывает, как важна предварительная подстановка условия предела: не имея неопределенности того или иного вида, сразу получаем ответ.

ПРИМЕР 14. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{11x+4}\right)^{1+5x}$.

Решение. а) Неопределенность вида 1^{∞}: при $x\to\infty$ $1+5x\to\infty$ и $\dfrac{3x+2}{3x+4}\to\dfrac{3}{3}=1$ (т.к. числитель и знаменатель имеют одинаковые высшие степени (x^1), предел дроби равен отношению коэффициентов при x).

Формируем модель (4); сначала выделяем в скобке единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4-4+2}{3x+4}\right)^{1+5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+4}+\frac{-2}{3x+4}\right)^{1+5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+4}\right)^{1+5x};$$

проверка: при $x\to\infty$ $\dfrac{-2}{3x+4}\to 0$. Чтобы завершить «построение» числа e, в показателе степени надо иметь выражение, обратное для $\dfrac{-2}{3x+4}$, т.е. $\dfrac{3x+4}{-2}$. Продолжая преобразования последнего предела, домножим показатель степени на две указанные дроби:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-2}\cdot\frac{-2}{3x+4}\cdot(1+5x)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(1+5x)}{3x+4}}=e^{-10/3},$$

т.к. при $x\to\infty$ $\dfrac{-2(1+5x)}{3x+4}\to\dfrac{-2\cdot5}{3}=-\dfrac{10}{3}$.

б) Неопределенности нет, т.к.:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}=\left(\frac{0+2}{0+4}\right)^{1+0}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}.$$

в) Неопределенности нет, ответ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{11x+4}\right)^{1+5x}=\left(\frac{3}{11}\right)^{+\infty}=0.$$

(См. пункт 3) Замечания 5). ■

ПРИМЕР 15. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x}{x^2+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x}{x^2+2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+2}{x}}$.

Решение. а) При $x\to\infty$ имеем $\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+3x-1}\to 1$, $\dfrac{x}{x^2+2}\to 0$ (см. Выводы в Замечании 3), то неопределенности здесь нет, и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x}{x^2+2}}=1^0=1.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x}{x^2+2}}=\left(\frac{0-0-1}{0+0-1}\right)^{\frac{0}{0+2}}=1^0=1.$$

в) Неопределенность вида 1^∞ (проверьте!), поэтому займемся «формированием» числа e (модель (4)) так же, как это делали в примере 14 а).

Чтобы выделить единицу, надо иметь в числителе такое же выражение, как в знаменателе. Заметим, что два слагаемых знаменателя (x^2-1) уже есть в числителе, поэтому прибавим в нем (и вычтем) недостающее слагаемое $3x$. После этого получаем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\overbrace{x^2-1+3x}\overbrace{-3x-2x}}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+2}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-5x}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+2}{x}}.$$

Проверка: при $x \to 0$ $\frac{-5x}{x^2+3x-1} \to 0$. «Достраиваем» показатель:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-5x}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{-5x}\cdot\frac{-5x}{x^2+3x-1}\cdot\frac{x^2+2}{x}} =$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-5x}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{-5x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-5x^2-10}{x^2+3x-1}} = e^{10}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 16. Вычислить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{2x-3}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-2}{2x-3}\right)^x$.

Решение. В обоих пределах нет неопределенности ни при $x \to +\infty$, ни при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{2x-3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-2}{2x-3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0.$$ (См. пункт 3) в Замечании 5). ■

ПРИМЕР 17. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos x\right)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение. а) Неопределенность вида 1^{∞} (проверьте!), «формируем» число *e:*

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+(-\sqrt[3]{\sin x})\right)^{\frac{1}{-\sqrt[3]{\sin x}}\cdot\frac{-\sqrt[3]{\sin x}}{1}\cdot\frac{2}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{т.к. } -\sqrt[3]{\sin x}\cdot\dfrac{2}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{-2\sqrt[3]{\sin x}\cos x}{\sin x} = \\ = \dfrac{-2\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \to \left(\dfrac{-2\cdot 1}{0}\right) \to -\infty \quad \text{при} \quad x\to 0 \end{array} \right\| = e^{-\infty} = 0,$$

т.к. $e > 1$.

б) Неопределенности нет:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = (1-0)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} 0}} = 1^{\frac{3}{\infty}} = 1^0 = 1.$$

в) Неопределенность вида 1^∞, «строим» число *e:*

$$\lim_{x\to 0}\left(2-\cos x\right)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+(1-\cos x)\right)^{\frac{1}{3x}} = \left\| \begin{array}{l} \text{проверка: при } x\to 0 \\ 1-\cos x\to 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+(1-\cos x)\right)^{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x}} =$$

$$= \left\| \text{т.к.}\, 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \text{то} \right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\cdot\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \left\| \frac{\sin(x/2)}{x/2} \to 1 \quad \text{при} \quad x\to 0 \right\| = e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}} = e^0 = 1. \blacksquare$$

VI. Неопределенности вида $\infty - \infty$ *и* $0\cdot\infty$

Когда возникают неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0{\cdot}\infty$, обычно достаточно теми или иными способами преобразовать заданное выражение в дробь, после чего получаются уже разобранные выше неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ (или неопределенности вообще не будет). Проиллюстрируем это примерами.

ПРИМЕР 17. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3}{x^2-1}-\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3+3}{x^2-1}-\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\right)$.

Решение. а) Подставляя ∞ вместо x, получаем неопределенность вида $\infty-\infty$: при $x\to\infty$ $\dfrac{x^3+3}{x^2-1}\to\infty$ и $\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\to\infty$ (см. Выводы в Замечании 3). Приводим дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^3+1}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x-x^4-x^3-x-1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x-1}{x^3-x}=-1,$$

(полученная неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ была раскрыта на основании Выводов в Замечании 3).

б) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$: при $x\to1$ $\dfrac{x^3+3}{x^2-1}\to\left(\dfrac{4}{0}\right)\to\infty$ и $\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\to\left(\dfrac{2}{0}\right)\to\infty$. Снова приводим к общему знаменателю, что уже было выполнено в а), и получаем:

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^3+2x-1}{x^3-x}.$$

Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$ (проверьте!). Алгоритм ее раскрытия дан в разделе *III*. В соответствии с ним разложим числитель и знаменатель на множители. Один из них известен, это $(x-1)$. Другой множитель числителя найдем при помощи «деления углом»:

$$
\begin{array}{r|l}
-x^3+2x-1 & x-1 \\
\underline{-x^3+x^2} & -x^2-x+1 \\
-x^2+2x & \\
\underline{-x^2+x} & \\
x-1 & \\
\underline{x-1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Тогда $-x^3+2x-1=(x-1)(-x^2-x+1)$, в знаменателе вынесем x за скобки и применим формулу разности квадратов; в результате получим:

$$\frac{-x^3+2x-1}{x^3-x}=\frac{(x-1)(-x^2-x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2-x+1}{x(x+1)}$$

и, следовательно, при $x \to 1$ имеем:

$$\frac{-x^2-x+1}{x(x+1)} \to \frac{-1-1+1}{1(1+1)}=-\frac{1}{2}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 18. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. а) И при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. В соответствии с изложенным выше методом нахождения пределов от выражений, содержащих иррациональности, выражение, стоящее под знаком предела, умножаем и делим на сопряженное к нему. В результате получаем дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Сравнивая высшие степени числителя и знаменателя, убеждаемся в том, что они равны, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при них. Но числитель положителен при $x \to +\infty$ и отрицателен при $x \to -\infty$, знаменатель же положителен как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2|x|} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 2;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{2|x|} = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -2.$$

б) Подставляя $+\infty$ вместо x, имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Вычисляем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

При $x \to -\infty$ неопределенности нет, и сразу получаем ответ

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = -\infty - \infty = -\infty. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 19. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x}\ln\left(1+2\sin x\right)$.

Решение. а) При подстановке $x=0$ получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Представляя далее данное произведение в виде дроби, получим:

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)};$$

при $x \to 0$ $\cos(x/2) \to 1$, а оставшееся выражение приводим к первому замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x/2}{\sin(x/2)}=2,\quad \text{т.к. } \frac{x/2}{\sin(x/2)}\to 1 \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=2$.

б) Подстановка $x=0$ дает:

$$\frac{1}{\sin 0}\ln\left(1+2\sin 0\right)=\frac{1}{0}\ln\left(1+0\right)=\infty\cdot 0 \text{ – неопределенность.}$$

Используем правило $n\log_a b=\log_a b^n$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(1+2\sin x\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Под знаком логарифма при $x\to 0$ имеем неопределенность $(1+0)^{1/0}=1^{\infty}$. Раскрываем ее с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{2\sin x}\cdot 2}=\ln\lim_{x\to 0}\left(\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{2\sin x}}\right)^2=\ln e^2=2.$$

Заметим, что при вычислении предела использовалась непрерывность логарифмической функции. ■

Задачи для самостоятельного решения

№7. Пользуясь ε - δ и ε - M определениями предела функции в точке, показать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2-5x)=-3$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-2}{5x+1}=\dfrac{3}{5}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{x^2-6x+9}=+\infty$.

№8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{(x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-11}{(x-1)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{(x-1)^2}$.

№9. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ является бесконечно большой при $x\to 0$ и бесконечно малой при $x\to 1$.

В задачах №№ 10-24 вычислить пределы:

№10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5x^2+2}{2x^3+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2+x}{2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x^3-4x}{4x-x^2-x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-x)^3(2x+1)^2}{5x^5+5}$.

№11. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+\sqrt{3x^2+\sqrt{3x}}}}{1+5x+\sqrt[3]{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^4+3}}{3+\sqrt[4]{x^5}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^3+\sqrt[10]{x^3}+1}{\sqrt[5]{x}-x^5+2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x^7+73}{x\sqrt{x^{12}-5}}$.

№12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-3}-30^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}13^{\frac{2x^2-5x}{x^2+3}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-e^{2/x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{5x^2+x+3}}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{5x^2+x+3}}$;

е) существует ли предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{5x^2+x+3}}$?

№13. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-x^2}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{6+x-x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^2-(\alpha+1)x+\alpha}{x^4-\alpha^4}$; е) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-10x^2+9}{(x^2-6x+9)^2}$.

№14. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+x^2}{1+\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{4x}}{\sqrt{6-x}-2}$;

г) $\lim\limits_{a\to0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a-ax}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2-\sqrt{4-x-x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

№15. а) $\lim\limits_{x\to 2} \ln\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(1-3^{\frac{x^2+2x}{2x^2-x-10}}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 10}\left(e^{-\frac{1}{(10-x)^4}}-2\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 10}\left(e^{\frac{1}{(10-x)^4}}-2\right)$.

№16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sin(2x-1)}{2x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sin(2x-1)}{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{a^2-ax}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$ (*указание*: воспользоваться формулой приведения $\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$); з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sin 3x}$; и) $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{\pi-6x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}$.

№17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\arcsin x}{2x-\operatorname{arctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x/2)}{\operatorname{arctg} 4x}$.

№18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{9-x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(4x/3)}{x}\right)^{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(e^{\frac{\sin(x-1)}{x^2-x}}-x+1\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)$.

№19. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)^{3/x}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+2x^2)^{x^2/3}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{7+4x}{4+7x}\right)^{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+4x}{4+7x}\right)^{x}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{7x-4}{7x+8}\right)^{2x-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7x+4}{7x+8}\right)^{2x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x^2}{1+5x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; и) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+2x^2}{1+5x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x^2}{1+5x^2}\right)^{x^2}$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x+2}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}}$; м) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x+2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$.

№20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$ (*указание*: воспользоваться формулой $\sin 2x=\sqrt{1-\cos^2 2x}$); г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\arcsin x)^{\frac{3}{\operatorname{arctg}(x/2)}}$.

№21. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}-\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{16-x^2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

№22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$.

№23. а) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}8x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{3}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin 3x$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}x\cdot\operatorname{ctg}2x$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

№24. а) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(1-7x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1-7x)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3\operatorname{tg}2x)}{\arcsin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

§4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$ (см. §3).

Определение. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A = const, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями ***одного порядка малости при x→a*** (записывается: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$; символ O читается как «O-большое»).

В частности, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными функциями при x→a*** (записывается: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$).

Определение. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\beta(x)$ называется бесконечно малой функцией ***более низкого порядка малости, чем α(x), при x→a***, а функция $\alpha(x)$ – бесконечно малой функцией ***более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$, при $x \to a$. Записывается: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$, символ o читается как «o-малое» и означает, что $\alpha(x) << \beta(x)$; знак $<<$ читается как «много меньше».

Определение. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n} = A = const, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией ***порядка n*** в сравнении с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$.

Определение. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ вообще не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***не сравнимыми при x→a***.

Аналогично сравниваются бесконечно большие функции.

Свойства бесконечно малых функций при x→a

1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых функций также является бесконечно малой функцией.

2. Произведение любого конечного числа бесконечно малых функций также является бесконечно малой функцией (высшего порядка в сравнении с каждой из них).

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

4. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости в сравнении с каждой из них.

5. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции, и если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Можно заменять на эквивалентную как обе функции, так и одну из них, любую.

6. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $0 < |A| < +\infty$ и $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то $f(x) \cdot \alpha(x) \sim A \cdot \alpha(x)$ при $x \to a$.

Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$;
3. $\arcsin x \sim x$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
6. $a^x - 1 \sim x \ln a$, $a > 0, a \neq 1$,
   в частности, $e^x - 1 \sim x$;
7. $\ln(1 + x) \sim x$;
8. $(1 + x)^m - 1 \sim m\,x$, в частности,
   $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n} x$.

ПРИМЕР 1. Показать, что функции

а) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2+1}$; $\left[\begin{array}{l}1)\ x\to 0,\\ 2)\ x\to 1;\end{array}\right.$ б) $f(x)=(x-1)^2\cos^{99}\dfrac{1}{x-1}$; $\left[\begin{array}{l}1)\ x\to 1,\\ 2)\ x\to 0;\end{array}\right.$

являются бесконечно малыми функциями при условии 1) и не являются таковыми при условии 2).

Решение. а) 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2+1}=\dfrac{e^0-1}{0^2+1}=\dfrac{0}{1}=0$. Следовательно, данная функция при $x\to 0$ является бесконечно малой по определению.

2) Имеем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-1}{x^2+1}=\dfrac{e^1-1}{1^2+1}=\dfrac{e-1}{2}\neq 0$, откуда следует, что данная функция при $x\to 1$ не является бесконечно малой по определению.

б) В случае 1) функция $(x-1)^2\to 0$ и потому является бесконечно малой при при $x\to 1$; т.к. $\left|\cos^{99}\dfrac{1}{x-1}\right|\le 1$ при всех $x\neq 1$, то множитель $\cos^{99}\dfrac{1}{x-1}$ есть функция ограниченная, тогда по свойству 3 бесконечно малых функций произведение ограниченной функции и бесконечно малой есть бесконечно малая функция.

В случае 2) имеем $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)^2\cos^{99}\dfrac{1}{x-1}=1\cdot\cos^{99}(-1)=\cos^{99}1\neq 0$, следовательно, данная функция не является бесконечно малой при $x\to 0$. ■

ПРИМЕР 2. Сравнить между собой бесконечно малые при $x\to 0$ функции: $x^3,\ x^2,\ x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x}\quad (x\ge 0)$.

Решение. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$, следовательно, x^3 – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем x^2, $x\to 0$ ($x^3 << x^2$ при $x\to 0$ или $x^3=o(x^2)$).

Сравниваем x^2 и x: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$, следовательно, x^2 – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем x, ($x^2 << x$ или $x^2 = o(x)$ при $x\to 0$).

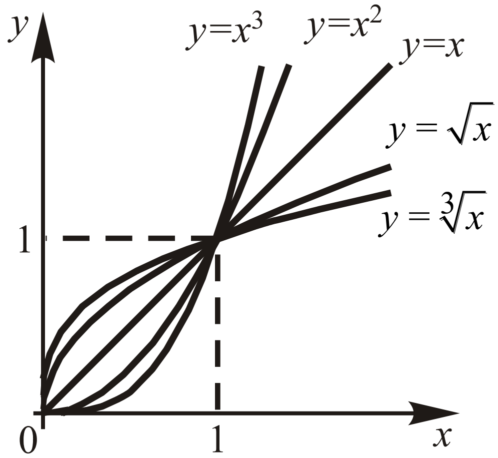

Рис. 9.

Аналогично поступаем и далее: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$, следовательно, x – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\sqrt{x}$, ($x << \sqrt{x}$ или $x = o(\sqrt{x})$ при $x\to 0$).

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[6]{x}=0$, следовательно, $\sqrt{x}$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\sqrt[3]{x}$, ($\sqrt{x} << \sqrt[3]{x}$ или $\sqrt{x} = o(\sqrt[3]{x})$ при $x\to 0$).

Окончательно: при $x\to 0$ $x^3 << x^2 << x << \sqrt{x} << \sqrt[3]{x}$ или при $x\to 0$ x^3 стремится к нулю быстрее, чем x^2; x^2 быстрее, чем x, и т.д. (см. Рис.9). ■

ПРИМЕР 3. Сравнить бесконечно малую функцию $\varphi(x) = x$ при $x\to 0$ со следующими функциями:

а) $f(x)=\sin 2x^4$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}$; в) $f(x)=\sqrt{2x+5}-5$;

Определить порядок малости $f(x)$ относительно $\varphi(x)$.

Решение. а) Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^4}{2x^4}\cdot 2x^3=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^4}{2x^4}\cdot\lim_{x\to 0}2x^3=1\cdot 0=0,$$

следовательно, $f(x)=\sin 2x^4$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\varphi(x) = x$, при $x\to 0$ (т.е. при $x\to 0$ $\sin 2x^4 << x$ или $\sin 2x^4 = o(x)$).

Далее:

т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{(\varphi(x))^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^4}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^4}{2x^4}\cdot 2=1\cdot 2=2$

и $2\neq 0$, $2\neq\infty$, то при $x\to 0$ $f(x)=\sin 2x^4$ есть бесконечно малая функция четвертого порядка малости в сравнении с функцией x.

б) Т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}}{\sqrt[4]{x^3\cdot x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}}{\sqrt[4]{x^3/2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}}{\sqrt[4]{x^3/2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{x}}=1\cdot\frac{1}{0}=\infty,$$

то, при $x\to 0$ $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}$ – бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\varphi(x)=x$, (т.е. при $x\to 0$ $\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}>>x$).

Замечая, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\varphi(x))^{3/4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}}{\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}}{\sqrt[4]{x^3/2}\cdot\sqrt[4]{2}}=1\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

и $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\neq 0$, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\neq\infty$, делаем вывод: бесконечно малая функция $\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3/2}$ при $x\to 0$ имеет порядок 3/4 в сравнении с функцией x.

в) Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+25}-5}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+25}-5)(\sqrt{2x+25}+5)}{x(\sqrt{2x+25}+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+25-25}{x(\underbrace{\sqrt{2x+25}+5}_{\searrow 10})}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\quad \frac{1}{5}\neq 0,\quad \frac{1}{5}\neq\infty,$$

следовательно, $f(x)=\sqrt{2x+5}-5$ и $\varphi(x)=x$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми функциями одного порядка, и каждая из них относительно другой имеет первый порядок малости (или $\sqrt{2x+5}-5=O(x)$). Но, обратите внимание, они не являются эквивалентными, т.к. предел их отношения не равен единице. ■

ПРИМЕР 4. Пусть $x\to 0$. Какие из бесконечно малых функций $100x,\ \frac{x^2}{2},\ 3\sqrt[3]{x},\ -x,\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}2x,\ x\sin\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми функциями одного порядка, высшего порядка, низшего порядка в сравнении с x? Поставьте между ними (там, где это имеет место) значки: ~, >>, <<.

Решение. Рассмотрим пределы отношений данных функций к x:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{100x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}100=100,\ \ 100\neq 0,\ \ 100\neq\infty$, следовательно, бесконечно малые функции $100x$ и x имеют один порядок малости при $x\to 0$, или $100x = O(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$, следовательно, $\frac{x^2}{2}$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем x, при $x\to 0$, т.е. $\frac{x^2}{2}<<x$ или $\frac{x^2}{2}=o(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$, следовательно, бесконечно малая функция $3\sqrt[3]{x}$ имеет более низкий порядок малости, чем x, при $x\to 0$, т.е. $3\sqrt[3]{x}>>x$ или $x=o(3\sqrt[3]{x})$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$, следовательно, бесконечно малые функции $-x$ и x являются функциями одного порядка малости при $x\to 0$ или $-x = O(x)$, но они не являются эквивалентными.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}2x)/2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}=1$, следовательно, бесконечно малые функции $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$ и x эквивалентны при $x\to 0$, т.е. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x\sim x$.

Заметим, что функция $x\sin(1/x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$: x есть бесконечно малая при $x \to 0$, а $\sin(1/x)$ – ограниченная функция при $x \neq 0$, т.к. $|\sin(1/x)| \leq 1$, произведение же бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция. Далее $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует. Вывод: бесконечно малую функцию $x\sin(1/x)$ нельзя сравнить с x при $x \to 0$. ■

ПРИМЕР 5. Показать эквивалентность следующих функций при $x \to 0$:

а) $\ln(1 + x)$ и x; б) $(1 + x)^m - 1$ и mx.

Решение. а) Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$, откуда и следует эквивалентность функций $\ln(1 + x)$ и x при $x \to 0$.

б) Обозначим $(1 + x)^m - 1 = z$ ($z \to 0$ при $x \to 0$). Используем результат примера а), т.е. тот факт, что $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$. Имеем $z \sim \ln(1 + z)$ при $z \to 0$ или, подставляя вместо z выражение $(1 + x)^m - 1$ в последнее соотношение, получим

$$(1+x)^m - 1 \sim \ln(1 + (1+x)^m - 1) = \ln(1+x)^m = m\ln(1+x).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m - 1}{mx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{m\ln(1+x)}{mx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (см. а)), что и требовалось доказать. ■

ПРИМЕР 6. Сравнить между собой бесконечно большие при $x \to \infty$ функции: x^3, x^2, x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ $(x \geq 0)$.

Решение. Имеем: $\lim\limits_{x\to\infty} x^3/x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, следовательно, при $x \to \infty$ бесконечно большая функция x^3 имеет более высокий порядок (роста), чем функция x^2, ($x^3 >> x^2$ или $x^2 = o(x^3)$ при $x \to \infty$).

Сравниваем x^2 и x: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, следовательно, x^2 – бесконечно большая функция более высокого порядка, чем x, при $x\to\infty$ ($x^2 >> x$ или $x = o(x^2)$ при $x\to\infty$).

Далее: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$, откуда следует, что бесконечно большая функция x имеет более высокий порядок, чем $\sqrt{x}$, при $x\to\infty$ ($x >> \sqrt{x}$ или $\sqrt{x}=o(x)$ при $x\to\infty$).

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{x}=\infty$, следовательно, $\sqrt{x}$ – бесконечно большая функция более высокого порядка, чем $\sqrt[3]{x}$, при $x\to\infty$ ($\sqrt{x} >> \sqrt[3]{x}$ или $\sqrt[3]{x}=o(\sqrt{x})$ при $x\to\infty$).

Окончательно: при $x\to\infty$ $x^3 >> x^2 >> x >> \sqrt{x} >> \sqrt[3]{x}$ или при $x\to\infty$ x^3 растет быстрее, чем x^2; x^2 быстрее, чем x, и т.д. (см. Рис.9). ■

ПРИМЕР 7. Пусть $x\to\infty$. Сравнить следующие бесконечно большие функции и определить порядок $f(x)$ относительно $\varphi(x)$. Поставить между ними (там, где это имеет место) значки: ~, >>, <<.

а) $f(x)=5x^{10}+x^3+4$ и $\varphi(x)=2x^8+4x+1$;

б) $f(x)=6x^4+x^2+2$ и $\varphi(x)=(2x+1)(3x^3+2)$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ и $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}$;

г) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+3}$ и $\varphi(x)=\sqrt[4]{3x^2+4}$.

Решение. а) Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^{10}+x^3+4}{2x^8+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}\left(5+\frac{1}{x^7}+\frac{4}{x^{10}}\right)}{x^8\left(2+\frac{4}{x^7}+\frac{1}{x^8}\right)}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{5}{2}=\infty.$$

Вывод: бесконечно большая функция $f(x)$ имеет более высокий порядок роста в сравнении с $\varphi(x)$ при $x\to\infty$, т.е. $f(x)$ растет быстрее, чем $\varphi(x)$: $f(x) >> \varphi(x)$ или $\varphi(x) = o(f(x))$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^{5/4}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^{10}+x^3+4}{(2x^8+4x+1)^{5/4}} = \frac{5}{\sqrt[4]{2^5}}$, $\frac{5}{\sqrt[4]{2^5}} \neq 0$, $\frac{5}{\sqrt[4]{2^5}} \neq \infty$,

то функция $f(x)$ – бесконечно большая порядка 5/4 относительно функции $\varphi(x)$ при $x\to\infty$.

б) Аналогично

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+x^2+2}{(2x+1)(3x^3+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{2}{x^3}\right)} = \frac{6}{6} = 1.$$

Вывод: бесконечно большие функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного порядка роста при $x\to\infty$, более того, они являются эквивалентными, т.е. $f(x) \sim \varphi(x)$.

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^2}}}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Вывод: бесконечно большая функция $f(x)$ имеет более низкий порядок роста в сравнении с $\varphi(x)$ при $x\to\infty$, т.е. $f(x)$ растет медленнее, чем $\varphi(x)$: $f(x) << \varphi(x)$ или $f(x) = o(\varphi(x))$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{2/3}} = 1$ (проверьте!), то функция $f(x)$ – бесконечно большая порядка 2/3 относительно функции $\varphi(x)$.

г) $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^2+3}}{\sqrt[4]{3x^2+4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{3+\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Вывод: $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции одного порядка роста при $x\to\infty$, или $\varphi(x) = O(f(x))$, но они не являются эквивалентными. ■

Замечание 1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых функций различных порядков при $x\to a$ эквивалентна бесконечно малой самого низкого порядка (т.е. «самой большой» из них – покажите). Это слагаемое называется ***главным членом*** суммы при $x\to a$. Все остальные слагаемые будут бесконечно малыми более высокого порядка по сравнению с главным членом или представлять собой o-малое относительно него при $x\to a$. Тогда любую бесконечно малую функцию можно представить в виде суммы двух слагаемых: ее главного члена и o-малого относительно него. В частности,

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при x→0 может быть записана в виде:

1. $\sin x = x + o(x)$;	7. $a^x - 1 = x\ln a + o(x)$;
2. $\operatorname{tg} x = x + o(x)$;	в частности,
3. $\arcsin x = x + o(x)$;	$e^x - 1 = x + o(x)$;
4. $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$;	8. $(1+x)^m - 1 = mx + o(x)$;
5. $1-\cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$;	в частности,
6. $\ln(1+x) = x + o(x)$;	$\sqrt[n]{1+x} - 1 = \dfrac{1}{n}x + o(x)$.

При вычислении пределов можно пользоваться этими равенствами, а в пределах от произведения и частного бесконечно малых функций их проще заменить на эквивалентные им главные члены.

Те же рассуждения применяются и к бесконечно большим функциям.

Перечислим некоторые ***свойства символа о-малое***.

1. $o(1)$ – множество всех бесконечно малых функций при $x\to a$, где a – любое.
2. $o(x) \pm o(x) \sim o(x)$ при $x\to 0$.

3. $C \cdot o(x) = o(x)$, $C = const$ при $x \to 0$.

4. $o(C{\cdot}x) = o(x)$, $C = const$ при $x \to 0$.

5. Если $n \ge m > 0$ и $x \to 0$, то $o(x^m) + o(x^n) \sim o(x^m)$.

6. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$ при $x \to 0$.

ПРИМЕР 8. Заменить бесконечно малые функции на эквивалентные им при указанных условиях:

а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x, \quad x \to 0$;

б) $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + 4\sqrt[6]{x} + 5\sqrt[7]{x} \quad (x \ge 0), \quad x \to 0$;

в) $f(x) = e^{x-1} - 1, \quad x \to 1$;

г) $f(x) = x\sin^2 2x, \quad x \to 0$;

д) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{arctg}(x/3)}{\ln(1-2x)}, \quad x \to 0$.

Решение. а) Бесконечно малые при $x \to 0$ функции $2x^4$ и $-3x^3$ есть бесконечно малые более высокого порядка в сравнении с функцией $5x$ ($2x^4 << 5x$, $-3x^3 << 5x$ при $x \to 0$ см. Пример 2), т.е. $2x^4 - 3x^3 + 5x \sim 5x$ при $x \to 0$ или $f(x) = 5x + o(x), \quad x \to 0$. Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^4 - 3x^3 + 5x}{5x} = 1$.

б) Аналогично $3\sqrt[5]{x} << 4\sqrt[6]{x} << 5\sqrt[7]{x}$ при $x \to 0$ (см. Пример 2). Тогда $3\sqrt[5]{x} + 4\sqrt[6]{x} + 5\sqrt[7]{x} \sim 5\sqrt[7]{x}$ при $x \to 0$ или $f(x) = 5\sqrt[7]{x} + o(x^{1/7}), \quad x \to 0$.

в) Используем известную эквивалентность (таблица эквивалентных бесконечно малых функций): $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$. Т.к. $x - 1 \to 0$ при $x \to 1$, то $e^{x-1} - 1 \sim x - 1$ при $x \to 1$.

г) Т.к. $2x\to 0$ при $x\to 0$, то $\sin 2x \sim 2x$ при $x\to 0$ (таблица эквивалентных бесконечно малых функций); и тогда при $x\to 0$ $x\sin^2 2x \sim x(2x)^2 = 4x^3$ или $x\sin^2 2x = 4x^3 + o(x^3)$.

д) Имеем $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} \sim \dfrac{x}{3}$, $\ln(1-2x) = \ln(1+(-2x)) \sim -2x$ при $x\to 0$ (таблица эквивалентных бесконечно малых функций), следовательно, при $x\to 0$ $\dfrac{x\operatorname{arctg}(x/3)}{\ln(1-2x)} \sim \dfrac{x\cdot(x/3)}{-2x} = -\dfrac{x}{6}$ или $\dfrac{x\operatorname{arctg}(x/3)}{\ln(1-2x)} = -\dfrac{x}{6} + o(x)$. ■

ПРИМЕР 9. Выделить главный член каждой из следующих функций при указанных условиях:

а) $f(x) = 2x^2 + x - \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt[5]{x}$ при $x\to 0$ и при $x\to\infty$;

б) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ при $x\to 0$;

в) $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$ при $x\to +\infty$;

г) $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2+2x} + 3\sqrt{x+\sqrt{x}}$ при $x\to +\infty$ и при $x\to +0$;

Решение. а) Т.к. при $x\to 0$ $\sqrt[5]{x} >> \sqrt[3]{x} >> x >> x^2$ (см. Пример 2), то главным членом будет слагаемое $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{x}$.

При $x\to\infty$ имеем $\sqrt[5]{x} << \sqrt[3]{x} << x << x^2$ (см. Пример 6), поэтому главный член – слагаемое $2x^2$.

б) Решим этот пример двумя способами.

Первый способ: умножим и разделим функцию на сопряженное выражение:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{1+x-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} =$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

Вычисляя предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$, видим, что $f(x)\sim x$ при $x\to 0$.

Второй способ. $\sqrt[n]{1+x}-1=\frac{1}{n}x+o(x)$. Тогда, учитывая, что $n=\frac{1}{2}$, получаем:

$$f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=1+\frac{1}{2}x+o(x)-(1-\frac{1}{2}x+o(x))=$$
$$=1+\frac{1}{2}x+o(x)-1+\frac{1}{2}x-o(x)=x+o(x)$$

при $x\to 0$, т.е. главный член данной функции есть x. Обратите внимание: символы $o(x)$ и $-o(x)$ взаимно не уничтожаются, т.к. по сути не являются равными (см. свойство $o(x)\pm o(x)\sim o(x)$ при $x\to 0$).

Важно: **заменять бесконечно малые функции, стоящие в алгебраической сумме, на эквивалентные им нельзя**, т.к. это может привести к ошибкам (см. Пример 10).

в) Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=\sqrt{2+\sqrt{\sqrt{x}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+1\right)}}=\sqrt{2+\sqrt[4]{x}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x}}+1}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt[4]{x}\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x}}+1}\right)}=\sqrt[8]{x}\sqrt{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x}}+1}}.$$

При $x\to +\infty$ $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x}}+1}}\to\sqrt{0+\sqrt{0+1}}=1$, поэтому главным членом будет $\sqrt[8]{x}$. Проверка: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{x}\sqrt{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x}}+1}}}{\sqrt[8]{x}}=1.$

г) Т.к. при $x \to +\infty$ $\quad x^2 >> x$ и $x >> \sqrt{x}$, то $2\sqrt[3]{x^2+2x} = 2x^{2/3} + o(x^{2/3})$ и $3\sqrt{x+\sqrt{x}} = 3x^{1/2} + o(x^{1/2})$. Тогда

$$f(x) = 2x^{2/3} + o(x^{2/3}) + 3x^{1/2} + o(x^{1/2});$$

далее т.к. при $x \to +\infty$ $\quad x^{2/3} >> x^{1/2}$ и $o(x^{2/3}) + o(x^{1/2}) = o(x^{2/3})$, то $f(x) = 2x^{2/3} + o(x^{2/3})$, т.е. главным членом является $2x^{2/3}$: $f(x) \sim 2x^{2/3}$ при $x \to +\infty$. Сделайте проверку самостоятельно.

При $x \to 0$ $\quad x >> x^2$ и $\sqrt{x} >> x$, то $2\sqrt[3]{x^2+2x} = 2\sqrt[3]{2}x^{1/3} + o(x^{1/3})$ и $3\sqrt{x+\sqrt{x}} = 3x^{1/4} + o(x^{1/4})$, следовательно,

$$f(x) = 2\sqrt[3]{2}x^{1/3} + o(x^{1/3}) + 3x^{1/4} + o(x^{1/4}),$$

сравнивая при $x \to 0$ $\; x^{1/3}$ и $x^{1/4}$ (см. Рис.9), приходим к выражению: $f(x) = 3x^{1/4} + o(x^{1/4})$, т.е. главный член $f(x)$ при $x \to 0$ равен $3x^{1/4}$: $f(x) \sim 3x^{1/4}$. Проверку сделайте самостоятельно. ■

ПРИМЕР 10. Найти ошибку в вычислении пределов:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \left\| \begin{array}{l} \text{при } x \to 0 \\ \sin x \sim x,\ \operatorname{tg} x \sim x \end{array} \right\| = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0;$$

б) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \left\| \begin{array}{l} \text{из таблицы эквив. функций: } (x+1)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{x}{2}, \\ \text{поэтому } \quad \sqrt{x+1} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x) \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x) - \sqrt{x}\right) = \left\| \sqrt{x} = o(x) \quad \text{при } \; x \to +\infty \right\| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = +\infty.$$

Решение. а) Ошибка состоит в замене бесконечно малых функций-слагаемых на эквивалентные им без учета бесконечно малых более высокого порядка. Их в данном случае нельзя отбросить, т.к. после взаимного уничтожения x и $-x$ в числителе не остается членов, по сравнению с которыми эти добавки являются бесконечно малыми. Правильная замена выглядит так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)-(x+o(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^3},$$

но такая запись не позволяет продолжить решение, т.к. не известно, какой именно порядок малости имеет выражение $o(x)$, стоящее в числителе (для его оценки необходимо привлечение формулы Тейлора, о которой будет сказано ниже). На данном этапе этот пример можно решить так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\dfrac{\cos x-1}{\cos x}}{x^3}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{при }\ x\to 0\ \ \sin x\sim x,\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\ \cos x\to 1\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{-x^2/2}{1}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

б) Допущена грубая ошибка: по условию $x\to+\infty$, при этом $\sqrt{x+1}\to+\infty$, использовалась же формула из таблицы эквивалентных бесконечно малых функций, которая работает при $x\to 0$.

Правильным решением было бы домножение на сопряженное выражение и последующие преобразования. Либо так:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=$$

$$=\left\|\frac{1}{x}\to 0\text{ при }x\to+\infty,\text{ поэтому }\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.\ \blacksquare$$

В примере 10 продемонстрирована важность корректного обращения с бесконечно малыми функциями. Поступая строго, следует записывать каждую бесконечно малую функцию в виде суммы главного члена и o-малой добавки.

Отбрасывать o-малые можно только тогда, когда остаются слагаемые, по отношению к которым эти добавки являются бесконечно малыми, а не так, как это было сделано в формулировке примера 10 а). Решение примера 10 б) показывает, как важно обращать внимание на условие, при котором справедлива та или иная эквивалентность. Например, $\sin x \sim x$ только при $x\to 0$, замена $\sin x$ на x при другом условии на x даст неверный результат!

ПРИМЕР 11. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x^2}{\arcsin(x/2)\ln(1-3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(3x/2)}{\sqrt{1+2x-x^3}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^5-x^4-\sin 5x^3}{(e^{x^2}-1)(x^2+\operatorname{arctg}3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{8x^2+x+2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 5x\cdot\arccos^3 x}{\ln^2(1+\operatorname{tg}(x/2)}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(e^{x-2}-1)^2\cdot x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^2-2x}-1\right)\cdot\ln(1+3x)}$.

Решение. а) Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$, получим: $\ln(1-3x)=\ln(1+(-3x))\sim -3x$, $\operatorname{tg}5x^2\sim 5x^2$, $\arcsin(x/2)\sim x/2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x^2}{\arcsin(x/2)\cdot\ln(1-3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{(x/2)\cdot(-3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{10x^2}{-3x^2}=-\frac{10}{3}.$$

б) При $x\to 0$ $\sqrt{1+2x-x^3}-1\sim\dfrac{1}{2}(2x-x^3)=x-\dfrac{x^3}{2}\sim x$, т.к. x^3 – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем x; $1-\cos(3x/2)\sim\dfrac{(3x/2)^2}{2}=\dfrac{9x^2}{8}$; следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x/2)}{\sqrt{1+2x-x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2/8}{x}=\frac{9}{8}\lim_{x\to 0}x=0.$$

в) В числителе при $x\to 0$

$$3x^5-x^4-\sin 5x^3=3x^5-x^4-5x^3+o(x^3)\sim -5x^3,$$

т.к. функции x^5 и x^4 имеют более высокий порядок малости по сравнению с x^3 и могут быть отброшены наряду с $o(x^3)$. В знаменателе при $x\to 0$ $e^{x^2}-1\sim x^2$, $x^2+\operatorname{arctg}3x=x^2+3x+o(x)\sim 3x$, т.к. x^2 и $o(x)$ можно отбросить и оставить главный член $3x$. В результате получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5-x^4-\sin 5x^3}{(e^{x^2}-1)(x^2+\operatorname{arctg}3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x^3}{x^2\cdot 3x}=-\frac{5}{3}.$$

г) Учитывая, что при $x\to+\infty$ $\sqrt[3]{x^2}>>\sqrt[5]{x}>>1$, $8x^2>>x>>2$, и отбрасывая бесконечно большие функции более низкого порядка роста, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{8x^2+x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{8x^2}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=-\frac{1}{2}.$$

д) При $x\to 0$ имеем: $\arcsin^2 5x\sim(5x)^2=25x^2$, $\arccos^3 x\to(\pi/2)^3=\pi^3/8$, $\ln^2(1+\operatorname{tg}(x/2))\sim(\operatorname{tg}(x/2))^2\sim(x/2)^2=x^2/4$; учитывая это, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 5x\cdot\arccos^3 x}{\ln^2(1+\operatorname{tg}(x/2))}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2\cdot\pi^3/8}{x^2/4}=\frac{\pi^3}{8}\cdot 25\cdot 4=\frac{25\pi^3}{2}.$$

е) При $x\to 2$ имеем: $e^{x-2}-1\sim x-2$, $x^2\to 4$, $\sqrt[3]{1+x^2-2x}-1\sim\frac{1}{3}(x^2-2x)=\frac{x}{3}(x-2)$, $\ln(1+3x)\sim\ln 7$; в результате получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(e^{x-2}-1)^2\cdot x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^2-2x}-1\right)\cdot\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2\cdot 4}{\frac{x}{3}\cdot(x-2)\cdot\ln 7}=$$

$$=\frac{12}{\ln 7}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x}=\frac{12}{\ln 7}\cdot\frac{0}{2}=0.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№25. Показать, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при условии 1) и бесконечно большой при условии 2):

а) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^3+27}$ 1) $x \to 3$; 2) $x \to -3$;

б) $f(x)=e^{-x}-1$ 1) $x \to 0$; 2) $x \to -\infty$.

№26. Сравнить бесконечно малую функцию $f(x)$ с бесконечно малыми функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Определить порядок малости $f(x)$ относительно $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

а) $f(x)=\sin 3x^2$; $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=x^2$, $x \to 0$;

б) $f(x)=2x+3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}$; $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=\sqrt[3]{x}$, $x \to 0$;

в) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+2}$; $\varphi_1(x)=x-1$, $\varphi_2(x)=\sqrt{x}-1$, $x \to 1$;

г) $f(x)=(x-2)^2\sin(x-2)$; $\varphi_1(x)=(x-2)^3$, $\varphi_2(x)=(x-2)^2$, $x \to 2$.

№27. Являются ли бесконечно малые при заданном условии функции $f(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ эквивалентными?

а) $f(x)=(\sin\sqrt[3]{x})^3$; $\varphi_1(x)=x$; $\varphi_2(x)=2x$, $x \to 0$;

б) $f(x)=\ln^3(1+2x^2)$; $\varphi_1(x)=2x^5$; $\varphi_2(x)=8x^6$, $x \to 0$;

в) $f(x)=e^{1-x}-1$; $\varphi_1(x)=x-1$; $\varphi_2(x)=1-x$, $x \to 1$.

№28. Сравнить бесконечно большие при $x \to \infty$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и определить порядок роста $f(x)$ относительно $\varphi(x)$:

а) $f(x)=3x^2-5x-1$; $\varphi(x)=3x^5-5x^2-8$;

б) $f(x)=\dfrac{x(2x+3)(3x+4)}{x-4}$; $\varphi(x)=5x^2-7$;

в) $f(x)=\sqrt{x^3-2x}+10^{10}$; $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}-10^{10}$.

№29. Заменить каждую из следующих бесконечно малых функций на эквивалентную при заданном условии:

а) $2x+\operatorname{tg}^2 x+\sin^3 3x,\quad x\to 0$; б) $(\sqrt[4]{1-3x}-1)^2,\quad x\to 0$;

в) $\ln(1-x^2)-\ln(1+2x^3),\ x\to 0$; г) $(2^{1-x}-1)\arcsin^2(1-x),\ x\to 1$;

д) $(1-\cos 4x)^2+10x^5,\ x\to 0$; е) $1-e^{\frac{x-2}{3}}+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x-2}}{2},\ x\to 2$;

ж) $\dfrac{2x^2+3x^5-x^6}{2x^2+3x+4},\quad x\to 0$; з) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2\sin(x+3)},\quad x\to -3.$

№30. Выделить главный член выражения при указанных условиях; определить порядок малости (роста) относительно x:

а) $3x^5-x^6+2x^7$; 1) $x\to 0$, 2) $x\to\infty$;

б) $-\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+3\sqrt[7]{4x}$; 1) $x\to 0$, 2) $x\to+\infty$;

в) $\sqrt[5]{3x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-2x-x^5$; 1) $x\to 0$, 2) $x\to+\infty$;

г) $\sin x-\operatorname{tg} x$; $x\to 0$;

д) $2(x+2)^2+3(x^2-4)$; 1) $x\to -2$, 2) $x\to\infty$.

№31. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\arcsin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x/3}-1}{\ln(1+7x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt[3]{1-x^4}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{3-x}-1}{\operatorname{arctg}^3(6-2x)}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(2+x)\ln(3+x)}{\sqrt[3]{x^2\sin(x+1)}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(1-\cos(2-x))\cos x}{\sin^2(x^2-2x)}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[4]{1-\sin^2 3x}-1)(e^{x-1}-1)}{\arcsin\ln(1+5x)}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(25^{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x-1}}-1)(5^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x-1)}}-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi(x-2)}{4}}{\sqrt[6]{\ln(1+\operatorname{tg}^4(x-1))}}$.

§5. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Определение. Число A называется *пределом* ***справа*** *функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta$ и входящих в область определения $f(x)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется *предел* ***слева*** *функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = B$).

В случае $a = 0$ будем записывать $x \to +0$ и $x \to -0$.

Отметим полезную теорему.

ТЕОРЕМА. Если в точке a предел функции $f(x)$ слева равен пределу этой функции справа, то в точке a существует предел функции $f(x)$ и равен указанным односторонним пределам.

ПРИМЕР 1. Найти в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \le 2, \\ -1, & x > 2 \end{cases}$ при $x \to 1$ и $x \to 2$; б) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$;

в) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{|x - 1|}$ при $x \to 1$; г) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. а) Область определения данной функции $-\infty < x < +\infty$.

При $x \to 1 - 0$ $f(x) = x$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} x = 1 - 0 = 1$,

при $x \to 1 + 0$ $f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} 1 = 1$, при $x \to 2-0$ $f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to 2-0} 1 = 1$,

при $x \to 2+0$ $f(x)=-1$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} (-1) = -1$.

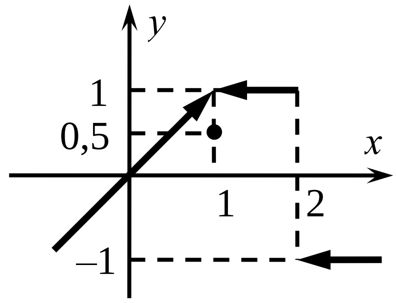

Рис. 10.

График данной функции изображен на рис.10.

б) Область определения функции: $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty,$$

$$\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

в) Область определения функции: $x \neq 1$. Раскрывая модуль по определению, имеем:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1} = -(1+x) & \text{при } x-1>0, \text{ т.е. при } x>1, \\ \dfrac{1-x^2}{-(x-1)} = 1+x & \text{при } x-1<0, \text{ т.е. при } x<1. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} (-(1+x)) =$

$= -(1+1+0) = -2,$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (1+x) =$

$= (1+1-0) = 2.$

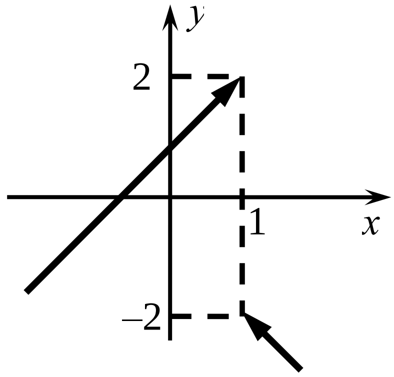

Рис. 11.

График функции показан на рис.11.

г) Область определения функции: $x \neq 0$.

Т.к. $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, то

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{x} & \text{при } 0<x<\pi, \\ \dfrac{-\sqrt{2}\sin x}{x} & \text{при } -\pi<x<0. \end{cases}$$

Тогда $$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \sqrt{2}\,\frac{\sin x}{x} = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2},$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = -\lim_{x\to-0} \sqrt{2}\,\frac{\sin x}{x} = -\sqrt{2}\cdot 1 = -\sqrt{2}. \ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№32. Найти односторонние пределы функций в указанных точках. Нарисовать графики функций а) и б).

а) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$ $\quad x = 0, \ x = 2$ и $x = 1$;

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1, \\ \dfrac{1}{x}, & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$ $\quad x = -1, \ x = 1$ и $x = -1/2$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{3^{2/x} - 3}$; $\ x = 0$; $\qquad$ г) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x^3}$; $\ x = 0, \ x = 1$;

д) $f(x) = \dfrac{|1-x|}{\sin(1-x)}$; $\ x = 1$.

§6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Определение. Функция называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ из области определения функции, если предел ее при $x \to x_0$ существует и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, другими словами:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{значение функции } f(x_0) \text{ существует,} \\ &2)\ \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \end{aligned} \tag{5}$$

Другое **определение** ***непрерывности функции в точке***: функция непрерывна в точке x_0 из области определения, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0. \tag{6}$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества, ***непрерывна на*** этом ***множестве***.

Будем обозначать односторонние пределы $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Если хотя бы одно из условий (5) не выполнено, то функция $f(x)$ будет иметь в точке x_0 разрыв. При этом

а) если односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ конечны, то x_0 называется точкой разрыва ***первого рода***; точка разрыва первого рода является ***устранимой***, если в этой точке предел функции слева равен пределу функции справа, но не равен значению функции: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, и

неустранимой, если $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$; в этом случае разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется ***скачком*** функции.

б) Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называется точкой разрыва ***второго рода*** функции $f(x)$.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма конечного числа непрерывных на некотором множестве функций есть функция непрерывная на этом множестве.
2. Произведение конечного числа непрерывных на множестве функций есть функция непрерывная на этом множестве.
3. Частное двух непрерывных на множестве функций есть функция непрерывная во всех точках множества, в которых знаменатель отличен от нуля.
4. Если $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$ – функции, непрерывные в точках z_0 и x_0 соответственно, то сложная функция[2] $y=f(\varphi(x))$ также непрерывна в точке x_0.
5. Если функция $y=f(x)$ задана на некотором промежутке, непрерывна и имеет на нем обратную функцию, то последняя тоже непрерывна на этом промежутке.

---

[2] В §1 уже упоминалось понятие сложной функции. Дадим здесь строгое определение.

Определение. Пусть функция $y=f(z)$ определена в некоторой области Z, а функция $z=\varphi(x)$ определена в области X, причем все значения функции $\varphi(x)$ содержатся в области Z. Тогда переменная y является функцией от x: $y=f(\varphi(x))$. По заданному x из X находят соответствующее ему значение z из Z, а затем вычисляют значение y; его и считают соответствующим выбранному x. Полученная функция от функции есть ***сложная функция***.

Заметим, что название «сложная функция» – это лишь термин, а не указание на то, что природа функциональной зависимости y от x особенно замысловата.

ПРИМЕР 1. Показать непрерывность функции $f(x)=2x^4-x^2+1$ при любом значении x, используя определение непрерывности (5).

Решение. Область определения данной функции $-\infty < x < +\infty$. Пусть x_0 – произвольная точка числовой оси. Надо показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Действительно, предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ находится по свойствам пределов: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(2x^4-x^2+1)=2x_0^4-x_0^2+1$ и равен значению функции $f(x)$ в соответствующей точке $f(x_0)=2x_0^4-x_0^2+1$. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, а т.к. x_0 – произвольная точка, то данная функция непрерывна в любой точке оси, что и требовалось доказать. ■

ПРИМЕР 2. Пользуясь определением (6) непрерывности функции, доказать, что функция $f(x)=\sin x$ является непрерывной на всей числовой оси.

Решение. Область определения данной функции – вся числовая ось. Покажем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Возьмем произвольную точку x и дадим ей приращение Δx, тогда приращение функции определится выражением:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x =$$
$$=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходим к пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\cdot 0\cdot\cos x=0,$$

т.к. $|\cos x|\le 1$ при любом x, т.е. функция $\cos x$ ограниченная, а произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция, и предел ее равен нулю.

Таким образом, условие (6) непрерывности функции в произвольной точке выполнено. В силу произвольности выбранной точки функция непрерывна на всей области определения, т.е. на всей числовой оси. ■

ПРИМЕР 3. Показать, что функция $f(x) = x^2 \sin x$ является непрерывной при $-\infty < x < +\infty$.

Решение. В предыдущем примере показано, что функция $\sin x$ непрерывна при любых x. Если показать, что функция $\varphi(x) = x^2$ непрерывна при любом x, то по Свойству 2 непрерывных функций произведение непрерывных функций есть также непрерывная функция. Воспользуемся определением (5): пусть x_0 – произвольная точка числовой оси.

$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$, $\varphi(x_0) = x_0^2$, откуда следует, что выполнено условие (5): $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. В силу произвольности выбора точки x_0 функция $\varphi(x)$, а вместе с ней и исходная функция $f(x)$, непрерывна при любых x. ■

Замечание 1. В примерах 2, 3 была показана непрерывность функций $\sin x$ и x^2. Аналогично устанавливается непрерывность всех элементарных функций (определение понятия элементарной функции дано в §1) в тех точках, где они определены.

ТЕОРЕМА. Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

ПРИМЕР 4. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна на всей числовой оси.

Решение. В примерах 2 и 3 была показана непрерывность на всей оси функций $\sin x$ и x^2. Тогда по свойству 4 непрерывных функций сложная функция $\sin x^2$ также является непрерывной при любых x. ■

Вообще, при помощи свойства 4 могут быть построены обширные классы непрерывных функций как сложные функции от функций, непрерывность которых уже установлена.

Помимо этого свойство 4 очень полезно при вычислении пределов сложных функций. В силу непрерывности функции $f(z)$ имеем по определению $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$, а в силу непрерывности в точке x_0 функции $\varphi(x)$ имеем $\varphi(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x))$. Последнее равенство означает, что, вычисляя предел от непрерывной сложной функции, мы можем сначала вычислить предел ее внутренней функции, а затем найти значение внешней функции в полученной точке. Так и делалось на протяжении всего пособия.

ПРИМЕР 5. Дана функция $f(x)$. Найти ее точки разрыва, если они существуют. Указать характер точек разрыва. Определить скачок функции в точках, где имеются разрывы первого рода. Сделать эскиз графика функции.

а) $$f(x) = \begin{cases} 2-(x+1)^2 & \text{при} \quad x<0, \\ e^x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ (x+1)/2 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

б) $$f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{при} \quad x<-\pi/2, \\ \operatorname{tg} x & \text{при} \quad -\pi/2<x<\pi/2, \\ \ln(x-\pi/2) & \text{при} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

Решение. а) Область определения данной функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 0$, где она не определена. На интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ функция непрерывна (покажите это!). Разрывы могут быть лишь в точках $x = 0$ и $x = 1$, в которых функция меняет свое аналитическое выражение.

Находим односторонние пределы в этих точках. Слева от точки $x = 0$ функция имеет выражение $2-(x+1)^2$, справа она задана как e^x. Таким образом, имеем:

$$f(-0) = \lim_{x\to -0}\left(2-(x+1)^2\right) = 2-(-0+1)^2 = 2-1 = 1;$$

$$f(+0) = \lim_{x\to +0} e^x = e^{+0} = 1.$$

Т.к. пределы слева и справа конечны, то $x = 0$ – точка разрыва первого рода, а поскольку эти пределы к тому же равны, то это устранимая точка разрыва. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив, $f(0) = 1$, то получим непрерывную в точке $x = 0$ функцию.

Аналогично в точке $x = 1$:

слева $\quad f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0} e^x = e^{1-0} = e;$

справа $\quad f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} (x+1)/2 = (1+0+1)/2 = 1.$

Пределы слева и справа конечны, следовательно, $x = 1$ – точка разрыва первого рода, но она не является устранимой, т.к. $f(1-0) \neq f(1+0)$. Скачок $f(1+0) - f(1-0) = 1-e$. Так как функция в точке $x = 1$ определена, и ее предел слева при $x \to 1$ равен значению функции в этой точке: $f(1-0) = f(1) = e$, то функция непрерывна не только на интервале $(0;\ 1)$, но и на полуинтервале $(0;\ 1]$. Это можно видеть на эскизе графика функции, изображеном на рис. 12.

б) Область определения функции – вся числовая ось, кроме точек $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$. На интервалах $(-\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, +\infty)$ функция непрерывна (покажите!). Вычисляем односторонние пределы в точках, где функция меняет свое аналитическое выражение.

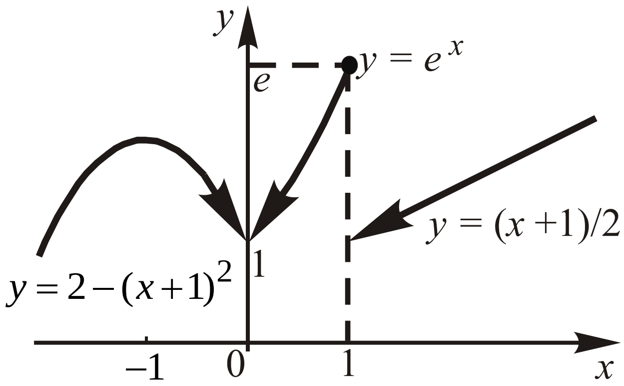

Рис. 12.

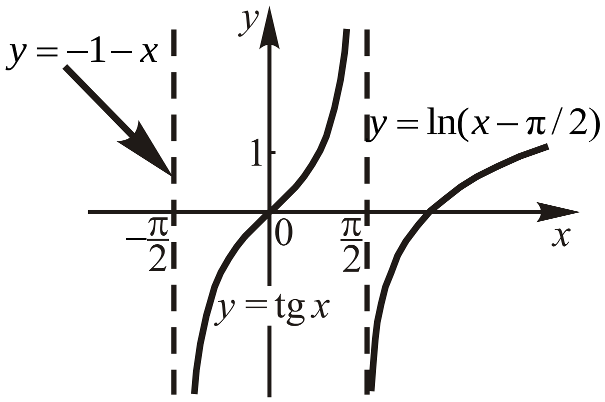

Рис. 13.

В точке $x = -\pi/2$:

слева $\quad f(-\pi/2-0) = \lim\limits_{x\to-\pi/2-0}(-1-x) = -1-(-\pi/2-0) = \pi/2-1;$

справа $\quad f(-\pi/2+0) = \lim\limits_{x\to-\pi/2+0}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}(-\pi/2+0) = -\infty.$

Один из пределов бесконечен, поэтому $x = -\pi/2$ – точка разрыва второго рода.

В точке $x = \pi/2$:

слева $\quad f(\pi/2-0) = \lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}(\pi/2-0) = +\infty;$

справа $\quad f(\pi/2+0) = \lim\limits_{x\to\pi/2+0}\ln(x-\pi/2) = \ln(\pi/2+0-\pi/2) = \ln(+0) = -\infty.$

Оба предела бесконечны, поэтому $x = \pi/2$ – точка разрыва второго рода. Эскиз графика функции изображен на рис. 13. ■

ПРИМЕР 6. В условиях примера 1 §5 найти точки разрыва функций и указать их характер.

Решение. а) Точка $x = 1$: $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to1+0} f(x) = 1$ и $f(1) = 1/2$.

Имеем $f(1-0) = f(1+0) \neq f(1)$, следовательно, $x = 1$ – точка разрыва первого рода, неустранимая.

В точке $x = 2$ также имеется неустранимый разрыв первого рода, т.к. $f(2-0) = 1$, $f(2+0) = -1$, пределы конечны и не равны; скачок $f(2+0) - f(2-0) = -1-1 = -2$.

б) Точка $x = 1$ – точка разрыва первого рода, неустранимая: $f(1-0) = -2$, $f(1+0) = 2$, пределы конечны и не равны; скачок $f(1+0) - f(1-0) = 2-(-2) = 4$.

в) Здесь $f(-0) = 0$, $f(+0) = \infty$, один из пределов бесконечен: $x = 0$ – точка разрыва второго рода. ■

ПРИМЕР 7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \cos(\pi / x)$.

Решение. Область определения: вся числовая ось, кроме точки $x = 0$. Имеем сложную функцию: функция $z(x) = \pi / x$ непрерывна при любых x, кроме точки $x = 0$ (покажите это, воспользовавшись любым из определений непрерывности функции). Функция $f(z) = \cos z$ непрерывна при любых значениях своего аргумента (покажите!). Сложная функция $f(z(x)) = \cos(\pi / x)$ непрерывна при любых x, кроме $x = 0$.

Исследуем поведение рассматриваемой функции вблизи точки $x = 0$. Для этого выберем две последовательности: $x_n^{(1)} = 1/(2n)$ и $x_n^{(2)} = 1/(2n+1)$ $n = 1, 2, \ldots$ Обе последовательности являются бесконечно малыми: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(2)} = 0$. Вычислим $\lim\limits_{x\to+0} \cos(\pi / x)$ при условии стремления переменной x к нулю по этим двум последовательностям:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{1/(2n)} = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{1/(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Т.к. эти два предела функции (оба справа от точки $x = 0$) не равны, то функция вообще не имеет предела справа. Таким же образом можно показать, что функция не имеет предела в этой точке и слева. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва, согласно определению, точкой разыва второго рода. ■

ПРИМЕР 8. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность.

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 1 & \text{при} \quad x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; в) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Решение. а) Область определения данной функции – вся числовая ось. В точке $x = 0$ изменяется аналитическое выражение функции. Имеем $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел) и $f(0) = 1$, следовательно, функция непрерывна в точке $x = 0$. На интервалах $(–\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ она непрерывна как частное от двух непрерывных функций. Таким образом, данная функция непрерывна на всей числовой оси.

б) Область определения: $x \neq 0$. Односторонние пределы в точке $x = 0$ $\lim\limits_{x\to -0}\sin\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to +0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существуют (пример 7), т.е. функция имеет разрыв второго рода. На интервалах $(–\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ она непрерывна как сложная функция (Свойство 4).

в) Область определения: $x \neq 2$. На интервалах $(–\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$ функция непрерывна как частное от двух непрерывных функций. Проверяем точку $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}(x^2+2x+4)=$$
$$=(2-0)^2+2(2-0)+4=4+4+4=12;$$

аналогично

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3-8}{x-2}=(2+0)^2+2(2+0)+4=4+4+4=12.$$

Т.к. в точке $x = 2$ пределы функции слева и справа конечны и равны, а в самой точке функция не определена, то $x = 2$ – точка разрыва первого рода, устранимая. Эту функцию можно доопределить так, что она станет непрерывной на всей числовой оси; для этого достаточно положить $f(2) = 12$. ■

Замечание 2. Иногда можно говорить о непрерывности функции $f(x)$ только слева (или только справа): $f(a-0)=f(a)$ ($f(a+0)=f(a)$). Например, функция $f(x)=\sqrt{3-x}$, определенная при $x\le 3$, в точке $x=3$ непрерывна только слева: $f(3-0)=\sqrt{3-(3-0)}=\sqrt{+0}=0$ и $f(3)=\sqrt{3-3}=0$, $f(3-0)=f(3)$, а справа от этой точки функция вообще не определена. Окончательно, $f(x)$ непрерывна на луче $(-\infty;3]$.

Задачи для самостоятельного решения

№33. Используя определение непрерывности функции, показать, что

а) $f(x)=x^3-3x^2+8$ является непрерывной на всей числовой оси;

б) $f(x)=\sqrt{x+1}$ является непрерывной при $x>-1$ и непрерывной справа в точке $x=-1$.

№34. Найти точки разрыва функции $f(x)$, если они существуют, и указать их характер. В точках разрыва первого рода найти скачок функции.

а) $f(x)=\dfrac{|2x+3|}{2x+3}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{(5-x)^2}$; в) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$;

г) $f(x)=\begin{cases}1/x^2, & x<0,\\ \log_2 x, & 0<x<2,\\ 3-x, & 2<x\le 3\\ -1 & x>3;\end{cases}$ д) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & x>1;\end{cases}$

е) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2-2x}$; ж) $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{1/(1-x)}}$;

з) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$;

и) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Нарисовать графики функций а), б), г), д).

№35. Исследовать функции на непрерывность. Нарисовать график функции б).

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{\pi x}, & x<-\dfrac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg}x, & -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right), & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

доопределить функцию в точках разрыва первого рода так, чтобы она была непрерывна на всей оси;

в) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; можно ли доопределить функцию так, чтобы она была непрерывна на всей оси?

г) $f(x)=\begin{cases} -1, & x\leq 0,\\ \dfrac{2\arcsin(x-1)}{x-1}, & 0<x<2,\\ \pi, & x>2;\end{cases}$ можно ли доопределить функцию так, чтобы она была непрерывной: 1) на всей оси? 2) на промежутке $[1, +\infty)$?

§7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

С этим параграфом следует знакомиться после освоения техники дифференцирования функций одной переменной.

В §§ 3, 4 были изложены некоторые способы раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. В случаях, когда их применение невозможно или слишком трудоемко, может оказаться полезным **правило Лопиталя**:

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0, причем $g'(x) \neq 0$, и если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует. Точка x_0 может быть как конечной, так и несобственной точкой $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание 1. а) Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ различными алгебраическими преобразованиями.

б) Неопределенности вида 1^{∞}, ∞^{0} или 0^{0} приводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$ с помощью предварительного логарифмирования или преобразования, использующего основное логарифмическое тождество

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}.$$

Замечание 2. Если после применения правила Лопиталя снова получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и для $f'(x)$ и $g'(x)$ выполнены условия, сформулированные для функций $f(x)$ и $g(x)$, правило применяют повторно до тех пор, пока неопределенность не устранится или не обнаружится, что нужные пределы не существуют.

ПРИМЕР 1. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-2x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$, $(n>0)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}$, $(a>1)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{b^x}$, $(n>0, b>1)$; д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}+x}{\sqrt[3]{1+2x}+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-4\cos^2(\pi x/3)}$.

Решение. а) Область определения дроби: $x>-1$, $x\neq 0$. Проверим возможность применения правила Лопиталя. Имеем:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(e^x - e^{-2x}) = 1-1=0,$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x) = \ln 1 = 0,$$

таким образом, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Производные $f'(x) = e^x + 2e^{-2x}$ и $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ существуют в любой окрестности точки $x_0 = 0$, не содержащей точку $x = -1$, и $g'(x)\neq 0 \quad (x>-1)$.

Предел отношения производных существует:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2e^{-2x}}{1/(1+x)} = 3.$$

Таким образом, правило Лопиталя применимо и

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-2x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2e^{-2x}}{1/(1+x)} = 3.$$

Далее возможность применения правила Лопиталя будем проверять в самом ходе вычислений. В некоторых случаях читателю будет предложено проделать это самостоятельно.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^n)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{n\,x^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n\,x^n}=\dfrac{1}{\infty}=0$,

заметим, что производные числителя и знаменателя существуют при всех $x\neq 0$, а $g'(x)\neq 0$ т.к. $x>0$.

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a^x\ln a}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{b^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{(\sqrt[n]{b})^x}\right)^n=\left\|\text{обозначим } \sqrt[n]{b}=a,\quad a>1 \text{ при } b>1\right\|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{a^x}\right)^n=\|\text{см. в)}\|=0^n=0\quad (n>0).$$

Убедитесь в том, что правило Лопиталя в примерах в) и г) применено обоснованно.

Замечание 3. Результаты вычислений последних трех пределов позволяют сделать следующие важные выводы: при $x\to+\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем любая степенная функция x^n $(n>0)$, а любая степенная функция x^n $(n>0)$ растет медленнее, чем любая показательная функция a^x $(a>1)$, т.е. $\ln x << x^n << a^x,\ \ (n>0,\ a>1)$.

д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}+x}{\sqrt[3]{1+2x}+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(\sqrt[4]{x+2}+x)'}{(\sqrt[3]{1+2x}+1)'}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\frac{1}{4}(x+2)^{-3/4}+1}{\frac{1}{3}(1+2x)^{-2/3}\cdot 2}=$

$$=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1^{-3/4}+1}{\frac{2}{3}(-1)^{-2/3}}=\frac{5/4}{2/3}=\frac{15}{8}.$$

е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{1-4\cos^2(\pi x/3)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{-4\cdot 2\cos(\pi x/3)\cdot(-\sin(\pi x/3))\cdot\pi/3}=$

$$=\frac{1}{4\cdot\cos(\pi/3)\cdot\sin(\pi/3)\cdot\pi/3}=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}.\ ■$$

ПРИМЕР 2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-1/x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sin^2 x)\cdot\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$; г) $\lim\limits_{x\to +0} x^{3/(4+\ln x)}$; д) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Представив $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, приведем выражение в скобках к общему знаменателю и применим правило Лопиталя (обоснуйте!):

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Еще раз применим правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-\frac{0}{2}=0.$$

Заметим, что второй раз правило Лопиталя можно было не применять, а поступить следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=-\frac{0}{1+1}=0.$$

б) Неопределенность вида $0\cdot\infty$. Используя формулу $\operatorname{ctg}\alpha=1/\operatorname{tg}\alpha$ и применяя правило Лопиталя (обоснуйте!), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}\ln^2(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\dfrac{1}{\cos^2\ln^2(1+x)}\cdot 2\ln(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}}=\frac{\frac{1}{1+0}\cdot 2\cdot 0\cdot 1}{\frac{1}{1}\cdot 2\cdot 0\cdot\frac{1}{1}}=\frac{0}{0}.$$

Неопределенность не исчезла: в числителе и в знаменателе присутствуют бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\sin x$ и $\ln(1+x)$ соответственно; остальные множители принимают конечные значения при $x\to 0$. Значит, вычисляемый предел сводится к следующему: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$. Его можно вычислить либо при помощи правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1/(1+x)}=\frac{1}{1}=1,$$

либо, используя замену бесконечно малых функций на эквивалентные:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

в) Неопределенность вида $0\cdot\infty$. Используя равенство $ab=\dfrac{b}{1/a}$, получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, после чего можно применить правило Лопиталя (обоснуйте!):

$$\lim_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{1/\ln x}=\left[\frac{\infty}{1/0}=\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1/(x-1)}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\searrow 1}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{x-1}=\left\|\frac{0}{0},\text{ правило Лопиталя}\right\|=-\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=-\frac{2\cdot 0\cdot 1}{1}=0.$$

г) Неопределенность вида 0^0. Используя тождество, приведенное в Замечании 1б), имеем:

$$\lim_{x\to +0}x^{3/(4+\ln x)}=\lim_{x\to +0}e^{\frac{3}{4+\ln x}\ln x}=\lim_{x\to +0}e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3\ln x}{4+\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3/x}{1/x}=3$, то $e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{3\ln x}{4+\ln x}}=e^3$.

Другой способ вычисления этого предела.

Обозначим $y=x^{3/(4+\ln x)}$, используя правило $\ln x^p=p\ln x$, можно записать $\ln y=\dfrac{3}{4+\ln x}\ln x$. Предел $\lim\limits_{x\to +0}\ln y=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3\ln x}{4+\ln x}=3$ (см. выше).

Итак, имеем $\ln y \to 3$ при $x \to +0$, следовательно, $y \to e^3$ при $x \to +0$, т.е. $\lim\limits_{x\to+0} x^{3/(4+\ln x)} = e^3$.

д) Неопределенность вида ∞^0 (при $x \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ $\operatorname{tg} x \to +\infty$, $\operatorname{ctg} x \to +0$). Так же, как в случае г), имеем:

$$\lim_{x\to(\pi/2)-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \left[(+\infty)^{+0}\right] = \lim_{x\to(\pi/2)-0} e^{\operatorname{ctg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim\limits_{x\to(\pi/2)-0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}}.$$

В показателе степени применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to(\pi/2)-0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to(\pi/2)-0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to(\pi/2)-0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

тогда $e^{\lim\limits_{x\to(\pi/2)-0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}} = e^0 = 1$.

Отметим, что получив предел $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-0} \dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$, можно было воспользоваться Замечанием 3, если обозначить $y = \operatorname{tg} x$: $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-0} \dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0.$ ■

В заключение приведем пример, в котором необоснованное применение правила Лопиталя приводит к неверному результату.

ПРИМЕР 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ (при $x \to 0$ $x^2 \sin(1/x) \to 0$ как произведение бесконечно малой и ограниченной функции). Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) \cdot (-1/x^2)}{\cos x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x)}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos(1/x)}{\cos x}=0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},$$

но $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не существует. Однако

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

Правило Лопиталя в данном случае нельзя было применять, т.к. не выполняется условие существования предела отношения производных. ■

Задачи для самостоятельного решения

№36. Применяя правило Лопиталя, найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}+x+1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin 5x}{2^x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$; ж) $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\operatorname{tg}x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$.

§8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

С этим параграфом следует знакомиться после освоения техники дифференцирования функций одной переменной.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и если существует конечная производная n-го порядка $f^{(n)}(a)$, то имеет место локальная формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \tag{7}$$

Напоминание: запись $o((x-a)^n)$ означает, что функция $\varphi(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$ имеет более высокий порядок малости, чем функция $\psi(x) = (x-a)^n$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Формула (7) показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки a многочленом Тейлора степени n, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x \to a$ бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Если $a = 0$, то формула (7) примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \tag{8}$$

Будем использовать следующие готовые разложения:

① $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

② $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$;

③ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

④ $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} + o(x^{n})$;

⑤ $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$;

В частности, при $m = -1$

⑤а $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

⑤б $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$.

Заметим, что правые части в двух последних равенствах есть суммы всех членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий с $b_1 = 1$ и $q = -x$ в случае ⑤а, $q = x$ в случае ⑤б, а левые части равенств – результаты суммирования.

ПРИМЕР 1. Разложить функции по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами четвертого порядка малости относительно x:

а) e^{3x+1}; б) $\frac{1}{3-5x}$; в) $\ln(1-5x)$; г) $\cos^2 x$; д) $\sin^2 x - x^2 e^{-x}$.

Решение. а) Выполним преобразования:

$$e^{3x+1} = e^{3x}\cdot e = e^t \cdot e \text{ (обозначили } 3x = t).$$

Далее используем готовое разложение ①:

$$e^t \cdot e = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\right)\cdot e.$$

Возвращаясь к старой переменной $t = 3x$, имеем

$$e^{3x+1} = e(1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{9x^3}{2}+\frac{27x^4}{8}+o(x^4)).$$

Заметим, что новую переменную можно не вводить, учитывая, что «роль» переменной x в готовом разложении в данном случае «играет» величина $3x$.

б) Применим готовое разложение ⑤б:

$$\frac{1}{3-5x} = \frac{1}{3(1-5x/3)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{5x}{3}+\left(\frac{5x}{3}\right)^2+\left(\frac{5x}{3}\right)^3+\left(\frac{5x}{3}\right)^4+o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{5x}{9}+\frac{25x^2}{27}+\frac{125x^3}{81}+\frac{625x^4}{243}+o(x^4).$$

в) Применим готовое разложение ④:

$$\ln(1-5x) = \ln(1+(-5x)) = (-5x)-\frac{(-5x)^2}{2}+\frac{(-5x)^3}{3}-\frac{(-5x)^4}{4}+o(x^4) =$$

$$= -5x-\frac{25}{2}x^2-\frac{125}{3}x^3-\frac{625}{4}x^4+o(x^4).$$

г) Понижая степень, используем далее готовое разложение ③:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^5)\right) =$$

$$= 1-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^5).$$

д) Используя формулу $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и готовые разложения ③ и ①, имеем:

$$\sin^2 x - x^2 e^{-x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x - x^2 e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^5)\right)-x^2\left(1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+o(x^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)-x^2+x^3-\frac{1}{2}x^4-\underbrace{x^2\cdot o(x^2)}_{o(x^4)} =$$

$$= x^3-\frac{5}{6}x^4+o(x^4).$$

$o(x^5)$ можно отбросить как бесконечно малую более высокого порядка при $x \to 0$, чем $o(x^4)$. ■

ПРИМЕР 2. Разложить функции по целым положительным степеням $x-a$, ограничиваясь членами указанного порядка малости.

а) $\ln x,\ a=2,\ n=3$; б) $\dfrac{1}{3x+2},\ a=-1,\ n=4$; в) $\dfrac{x}{3x+2},\ a=-1,\ n=2$.

Решение. Заметим, что задача разложения функции по степеням $x-a$ означает разложение ее по формуле Тейлора в окрестности точки $x=a$. Предлагаем самостоятельно проверить законность применения формулы Тейлора.

а) Введем новую переменную $x-2=t$, тогда $x=t+2$ и $\ln x = \ln(t+2)$. Используем готовое разложение ④, проделав предварительно некоторые простейшие преобразования:

$$\ln(t+2) = \ln 2\left(1+\frac{t}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{t}{2}\right)^3\right) = \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o(t^3).$$

Возвращаемся к старой переменной $t = x-2$:

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).$$

Эту же задачу можно решить и без введения новой переменной. А именно:

$$\ln x = \ln(x-2+2) = \ln 2\left(1+\frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right) =$$

$$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{((x-2)/2)^2}{2} + \frac{((x-2)/2)^3}{3} + o(((x-2)/2)^3) =$$

$$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).$$

б) $\dfrac{1}{3x+2}=\dfrac{1}{3(x+1-1)+2}=\dfrac{1}{3(x+1)-1}=-\dfrac{1}{1-3(x+1)}=-\dfrac{1}{1+(-3(x+1))}.$

Далее пользуемся готовым разложением ⑤а, в котором роль переменной x играет выражение $-3(x+1)$.

$$-\frac{1}{1+(-3(x+1))}=-\Big(1-(-3(x+1))+(-3(x+1))^2-(-3(x+1))^3+$$
$$+(-3(x+1))^4+o\Big((-3(x+1))^4\Big)\Big)=$$
$$=-1-3(x+1)-9(x+1)^2-27(x+1)^3-81(x+1)^4+o((x+1)^4).$$

в) Данная дробь – неправильная, сначала выделим в ней целую часть:

$$\frac{x}{3x+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{3x+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x+2-2}{3x+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{3x+2}{3x+2}-\frac{2}{3x+2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3x+2}.$$

Теперь воспользуемся результатом решения примера б), ограничиваясь слагаемыми второй степени:

$$\frac{x}{3x+2}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\Big(-1-3(x+1)-9(x+1)^2+o((x+1)^2)\Big)=$$
$$=1+2(x+1)+6(x+1)^2+o((x+1)^2).\blacksquare$$

Локальная формула Тейлора вместе с ранее указанными способами значительно расширяет возможности вычисления пределов функций.

ПРИМЕР 3. Вычислить пределы, используя локальную формулу Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(x-x^2\ln(1+1/x)\Big)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\big(1/x-\operatorname{ctg}x\big)\cdot 1/x$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt[3]{9+x}}{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}\sin(x-1)-x+x^2}{1-x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}$.

Решение. а) Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Пользуясь готовыми разложениями ① и ③, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+o(x^2)-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

б) Здесь имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. В числителе используем готовые разложения ⑤ и ③, в знаменателе используем эквивалентность: $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x\to 0$.

Выпишем отдельно

$$(1+x^2)^{1/2}\cos x=\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1/2(1/2-1)}{2}x^4+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)=$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)=1-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^4/3+o(x^4))}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{1}{3},$$

(здесь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0$ по определению понятия o-малое).

в) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty\cdot 0$, т.к. при $x\to\infty$ величина $1/x$ является бесконечно малой, можем применить готовое разложение ④, в котором она будет «играть роль» x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{2},$$

(здесь $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{o\left(1/x^2\right)}{1/x^2} = 0$ по определению понятия o-малое).

г) Неопределенность $(\infty-\infty)\cdot\infty$. Проделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Далее в числителе применяем готовые разложения ② и ③, в знаменателе используем эквивалентность $\sin x \sim x$ при $x\to 0$, после чего последний предел примет вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)-x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{6}-x+\dfrac{x^3}{2}+o(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

д) Локальная формула Тейлора в окрестности точки $x=-1$ дает:

$$\sqrt{5+x} = (4+(1+x))^{1/2} = \left(4\left(1+\frac{x+1}{4}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{4}+o\left(\frac{x+1}{4}\right)\right) = 2+\frac{x+1}{4}+o(x+1),$$

$$\sqrt[3]{9+x} = (8+(1+x))^{1/3} = \left(8\left(1+\frac{x+1}{8}\right)\right)^{1/3} =$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{8}+o\left(\frac{x+1}{8}\right)\right) = 2+\frac{x+1}{12}+o(x+1).$$

Было использовано готовое разложение ⑤, причем, в первом случае роль x играло выражение $(x+1)/4$, во втором – выражение $(x+1)/8$.

Подставляя полученные результаты в предел, имеем:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt[3]{9+x}}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{2+\frac{1}{4}(x+1)+o(x+1)-\left(2+\frac{1}{12}(x+1)+o(x+1)\right)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{6}(x+1)+o(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{6}(x+1)}{x+1} + 0 = \frac{1}{6}.$$

е) Первое слагаемое в числителе дроби раскладывается по степеням $x-1$ до членов первого порядка относительно $x-1$ при помощи готовых разложений ① и ②, в которых роль x играет выражение $x-1$:

$$e^{x-1}\sin(x-1) = \big(1+(x-1)+o(x-1)\big)\Big((x-1)+o((x-1)^2)\Big) =$$

$$= (x-1)+(x-1)^2+\underbrace{(x-1)\cdot o(x-1)}_{o((x-1)^2)}+o((x-1)^2)+$$

$$+\underbrace{(x-1)\cdot o((x-1)^2)}_{o((x-1)^3)}+\underbrace{o(x-1)\cdot o((x-1)^2)}_{o((x-1)^3)} =$$

$$= x-1+o(x-1).$$

Остальные слагаемые отброшены как бесконечно малые при $x\to 1$ более высокого порядка малости в сравнении с $x-1$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}\sin(x-1)-x+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1+o(x-1)+x(x-1)}{(1-x)\underbrace{(1+x)}_{\searrow 2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)+o(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + 0 =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}(x+1) = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1.$$

ж) Этот пример уже рассматривался под номером 10а) в §4. Теперь решим его при помощи формулы Тейлора. Сначала по формуле (8) получим несколько первых членов разложения функции $\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$.

$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0;$

$f'(x) = 1/\cos^2 x, \quad f'(0) = 1;$

$f''(x) = 2\sin x/\cos^3 x, \quad f''(0) = 0;$

$$f'''(x)=\frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x},\quad f'''(0)=2;$$

$$f^{IV}(x)=\frac{16\sin x+8\sin^2 x}{\cos^5 x},\quad f^{IV}(0)=0;$$

$$\operatorname{tg} x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+o(x^4)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Пользуясь полученным разложением и готовым разложением ②, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^5)-(x+\frac{x^3}{3}+o(x^5))}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}+o(x^5)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^5)}{x^3}=-\frac{1}{2}.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№37. Разложить функции по степеням x до членов указанного порядка включительно:

а) $e^{-x}-e^{3x},\quad (x^3)$; б) $\dfrac{1}{x-5},\quad (x^2)$; в) $\ln(7-x),\quad (x^2)$;

г) $e^{2x-x^2},\quad (x^4)$; д) $x\sqrt{1-x^2}-\cos x\ln(1+x)\quad (x^5)$.

№38. Разложить функцию в окрестностях данных точек до членов указанных порядков:

а) $e^{x+2},\quad a=0$ и $a=2,\quad n=3$;

б) $\cos 2x,\quad a=0$ и $a=-\pi/4,\quad n=2$;

в) $\ln(3+x),\quad a=0$ и $a=1,\quad n=3$;

г) $\dfrac{4}{3-x}$, $\quad a=0$ и $a=4$, $\quad n=2$;

д) $\dfrac{x}{2+x}$, $\quad a=0$ и $a=-1$, $\quad n=2$; *указание*: при разложении по степеням $x+1$ представить функцию следующим образом:

$$\frac{x}{x+2}=\frac{x+2-2}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}=1-\frac{2}{1+(x+1)}.$$

№39. Вычислить следующие пределы, используя соответствующие готовые разложения ①-⑤:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-x^2+2x^3}{\sqrt{x+1}-1}$; $\qquad$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin^3 x}$; $\qquad$ г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)-5\sin(x-1)}{-x^2+1-3(1-x)^5}$;

д) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln(1+\cos x)-\cos^2 x}{2x-\pi}$; $\qquad$ е) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin\sqrt{x+3}-x-3}{e^{-\sqrt{x+3}}-x-4}$.

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ РЕЙТИНГОВЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛЫ»

Ниже приводятся примерные варианты тестов и контрольных работ, предлагаемых студентам разных специальностей РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина. Все варианты были любезно предоставлены лекторами потоков соответствующих факультетов. Баллы, которыми оценивается каждая рейтинговая работа, могут быть различными на разных потоках (они определяются лекторами потоков) и варьируются в пределах от 10 до 20 при максимальном семестровом рейтинге 60 баллов.

Факультет геологии и геофизики нефти и газа

Вариант №1

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-5x^2-\sqrt{x^3+2}}{3x^2+5x+7}$
2. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+3}-1}{2-\sqrt{5+x}}$
3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-\cos 5x}{3x^2\cdot\sin(x+\pi/6)}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-4}\right)^{2x-7}$
5. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{e^x-e^3}{\ln x-\ln 3}$
6. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{5x^2+4x-1}{2x^2+x-1}$

Вариант №2

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{5}{1-x^3}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

Факультет разработки нефтяных и газовых месторождений

Вариант №1

1. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+8x-3}{6x^2-5x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x-3x^2}{8-6x^2+5x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{\sqrt[3]{x-6}+2}$
4. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{x^2-\pi^2}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{\frac{x}{3}-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\text{tg}\,2x}$

Вариант №2

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^3+3x^2}{0{,}1x^4-100x^3+1}$
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\text{tg}\,x}$

Факультет проектирования, сооружения и эксплуатации систем трубопроводного транспорта

Вариант №1

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-7^{n+1}}{4^n+7^n}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sin(1-x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln x-\ln 5}{x^2-25}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

Вариант №2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

Факультет инженерной механики

Вариант №1

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{3x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+2}}{3x+4x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+8x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{2x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 3x)\operatorname{tg} 4x}{x\cdot\arcsin^2 5x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-5x}{3-5x}\right)^{2/x^2}$

Вариант №2

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+\sqrt[3]{3x^4+2}+13x^3-11}{x+\sqrt[3]{-3x^{12}+3x}+11x^2+12\sqrt{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^4-2}-1}{11x^4-11}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-\sqrt{x^5}}{x^5-2\sqrt{x^5}+1}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}\sin\dfrac{\pi+1}{2\sqrt{3n^3}}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^2-3}{-x^2+5}\right)^{x^2+4}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1-\sin^{10}2x)}{-2x^{10}}$

Факультет химической технологии и экологии

Вариант №1

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1+\operatorname{tg} 3x)}$

Вариант №2

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{(3x+2)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x)}{\sin 3x}$

7. Определить порядок малости при $x \to 1$ бесконечно малой функции $\alpha(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$ относительно бесконечно малой функции $\beta(x) = x - 1$.

Факультет автоматики и вычислительной техники

Вариант №1

1. Сформулировать определение предела последовательности и указать номер N, начиная с которого все члены последовательности $x_n = \dfrac{n^3}{2n^3 + n + 1}$ отличаются от предела этой последовательности менее, чем на 0,001.

2. Вычислить пределы:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1-2x)};\quad б)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^x;\quad в)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\operatorname{tg} x}.$$

3. Сформулировать определение непрерывной в точке функции и выяснить, в каких точках непрерывна функция:

$$y = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^5 - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$$

4. Выделить главную часть функции $y = \sqrt{1+x^2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ при $x \to 0$.

Вариант №2

1. Определить порядок малости при $x \to 0$ бесконечно малой $\alpha(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{1-x}$ относительно бесконечно малой функции $\beta(x) = x$.

2. Определить порядок роста при $x \to \infty$ бесконечно большой $A(x) = \dfrac{x^5 + 150x + 10}{3x^2 + 4x - 1}$ относительно бесконечно большой функции $B(x) = x$.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x+1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4\operatorname{tg}^2 x)}{\sin^2 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-3}\right)^{x^2}$

Факультет экономики и управления

Вариант №1

1. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$

2. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

5. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$

Вариант №2

1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^6-x-5}{x^6+3x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+5x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3-x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 6x)\,e^{2x}}{\ln(1-8x)\,\cos 3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arccos(x/5)\cdot\ln x}{e^x\,\operatorname{arctg}(1-x)}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. а) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{3}{10}$, $x_3=\frac{4}{21}$, $x_4=\frac{5}{36},\ldots$, $x_{100}=\frac{101}{20100}$, $x_m=\frac{m+1}{2m^2+m}$,

$x_{m+2}=\frac{m+3}{2m^2+9m+10}$; б) $x_1=\frac{7}{3}$, $x_2=\frac{11}{9}$, $x_3=\frac{15}{27}$, $x_4=\frac{19}{81},\ldots,x_{100}=\frac{403}{3^{100}}$,

$x_m=\frac{4m+3}{3^m}$, $x_{m+2}=\frac{4m+11}{3^{m+2}}$; в) $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{8}$, $x_3=0$, $x_4=\frac{1}{64},\ldots$,

$x_{100}=\frac{1}{10^6}$, $x_m=\frac{\sin[\pi(m+1)/2]}{m^3}$, $x_{m+2}=-\frac{\sin[\pi(m+1)/2]}{(m+2)^3}$.

2. а) n = 74; б) все, кроме первых четырех. **4.** а) $x_n=\frac{1}{2n-1}$. **6.** а) ∞; б) 6/5; в) 72/32; г) 2.

8. а) – 5; б) – ∞; в) 0. **10.** а) 0; б) ∞; в) – 2; г) – 4/5.

11. а) + ∞; б) $\sqrt[3]{3}/5$; в) 0; г) 0; д) 3.

12. а) 0; б) 169; в) 0; г) $-2/\sqrt{5}$; д) $2/\sqrt{5}$; е) не существует.

13. а) 1/3; б) 0; в) 0; г) – 15/11; д) $\frac{\alpha-1}{4\alpha^3}$; е) + ∞.

14. а) 1/4; б) –3; в) 1; г) $1/(2\sqrt{x}(1-x))$; д) 4; е) 1/2.

15. а) – ln 4; б) $[1-3^{2/9}]$; в) – 2; г) +∞.

16. а) 7; б) ∞; в) 8; г) 1; д) 0; е) sin a / a; ж) $2/\pi$; з) 1/6; и) $3\sqrt{3}/2$.

17. а) 2; б) 3/2; в) 1/8. **18.** а) –6; б) 3/4; в) e; г) 0.

19. а) e^6; б) 27; в) +∞; г) 0; д) 1; е) $e^{-24/7}$; ж) 2; з) e^{-3}; и) 1; к) 0; л) 1/4; м) 0 и + ∞.

20. а) 1; б) e^{-1}; в) $e^{-1/2}$; г) 1/a; д) e^{-12}.

21. а) +∞; б) +∞; в) 1; г) – 1/8; д) 1/2.

22. а) $+\infty$; б) 1 и $+\infty$; в) – 2/3; г) – 1/2 и $+\infty$.

23. а) 1/8; б) 0; в) 0; г) 6/π; д) 1/2; е) 1/2.   **24.** а) 0; б) – 7; в) – 6; г) – 1.

26. а) второй порядок малости относительно $\varphi_1(x)$, $f(x)=O(\varphi_2(x))$; б) относительно $\varphi_1(x)$ порядок малости 1/3, $f(x)=O(\varphi_2(x))$; в) $f(x)=O(\varphi_1(x))$, $f(x)=O(\varphi_2(x))$; г) $f(x)\sim\varphi_1(x)$, относительно $\varphi_2(x)$ порядок малости 3/2.

27. а) да, нет; б) нет, да; в) нет, да.

28. а) порядок роста 2/5; б) одинаковый порядок роста; в) порядок роста 9/4.

29. а) $2x$; б) $9x^2/16$; в) $-x^2$; г) $(1-x)^3\ln 2$; д) $64x^4$; е) $\sqrt{x-2}/2$; ж) $x^2/2$; з) –4/9.

30. а) 1) $3x^5$, 2) $2x^7$;   б) 1) $3\sqrt[7]{4x}$, 2) $2\sqrt{x}$;   в) 1) $\sqrt[5]{3x}$, 2) $-x^5$;   г) $-x^3/2$; д) 1) $-12(x+2)$, 2) $5x^2$.

31. а) 1/6; б) 5/21; в) $+\infty$; г) $+\infty$; д) 0; е) $(\cos 2)/8$; ж) 0; з) $-2\ln^2 5$.

32. а) $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=0$; б) $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1/2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1/2+0} f(x)=-2$; в) $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1/3$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$; г) $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=-\infty$; д) $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=-1$.

34. а) $x=-3/2$ – точка разрыва первого рода, скачок функции равен 3; б) $x=5$ – точка разрыва второго рода; в) $x=0$, $x=-1$ – точки разрыва второго рода; г) $x=0$ – точка разрыва второго рода, $x=2$ – устранимая точка разрыва, $x=3$ – точка разрыва первого рода, скачок функции равен –1; д) $x=0$ – точка разрыва первого рода, скачок функции равен –1, $x=1$ – устранимая точка разрыва; е) $x=0$ – точка разрыва второго рода, $x=2$ – точка разрыва первого рода, скачок функции равен 1; ж) $x=1$ – точка разрыва первого рода, скачок функции равен 1; з) $x=-1$ – устранимая точка разрыва; и) точек разрыва нет.

35. а) Непрерывна всюду, кроме точек $x=\pi/2+\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (точки разрыва второго рода); б) непрерывна всюду, кроме точек $x=\pi/2+\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (точки разрыва второго рода) и $x=\pm\pi/4$ (устранимые точки разрыва, доопределяем $f(-\pi/4)=-1,\quad f(\pi/4)=1$). в) да: $f(2)=1$; г) 1) нет, 2) да, $f(1)=2,\quad f(2)=\pi$.

36. а) ∞; б) 0; в) ∞; г) 1; д) $1/a$; е) 0; ж) 1; з) 2/3; и) e; к) $\exp(-1/30)$.

37. а) $-4x-4x^2-14x^3/3+o(x^3)$; б) $-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}x-\dfrac{1}{125}x^2+o(x^2)$;

в) $\ln 7-\dfrac{x}{7}+\dfrac{x^2}{98}+o(x^3)$; г) $1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4+o(x^4)$;

д) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{5}x^5+o(x^5)$.

38. а) $e^2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)$,

$e^4\left(1+x-2+\dfrac{(x-2)^2}{2!}+\dfrac{(x-2)^3}{3!}+o((x-2)^3)\right)$; б) $1-2x^2+o(x^3)$,

$2(x+\pi/4)+o((x+\pi/4)^2)$; в) $\ln 3+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x^3}{81}+o(x^3)$,

$\ln 4+\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{(x-1)^2}{32}+\dfrac{(x-1)^3}{192}+o((x-1)^3)$; г) $\dfrac{4}{3}\left(1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{9}+o(x^2)\right)$,

$-4\left(1-(x-4)+(x-4)^2+o((x-4)^2)\right)$; д) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)$,

$-1+2(x+1)-2(x+1)^2+o((x+1)^2)$.

39. а) 2; б) 36/7; в) 1/3; г) 3; д) –1/2, е) –1.