Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Г.Г. Литова, Д.Ю. Ханукаева

Интегрирование функций одной переменной

Методическое пособие для самостоятельной работы студентов

Москва 2007

УДК 517.9
Л33

Литова Г.Г., Ханукаева Д.Ю.
Л33 Интегрирование функций одной переменной. Методическое пособие для самостоятельной работы студентов. − М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2007. − 175с.

Пособие предназначено для студентов, изучающих методы нахождения неопределенных и определенных интегралов в курсе высшей математики. В нем детально изложены различные приемы вычисления интегралов, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения. Наряду с типовыми примерами, решаются также и не совсем стандартные задачи, не являющиеся обязательными для базового уровня владения техникой интегрирования. Для желающих более глубоко ознакомиться с материалом дан дополнительный параграф о несобственных интегралах.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих курс интегрального исчисления. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

Ведущий научный сотрудник кафедры высшей геометрии и топологии
МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор А.В. Зарелуа

Доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
А.В. Скориков

Учебное издание

Редактор: В.В. Калинин
Компьютерная верстка: Д.Ю. Ханукаева
Дизайн обложки: Д.И. Юдинкова

Оглавление

Предисловие

Уважаемый читатель! Современное состояние науки и техники постоянно требует инновационных решений, т.е. постановки новых инженерных, технологических или научных задач и поиск путей их наиболее рационального решения. Поэтому важна способность каждого специалиста к самообразованию, к освоению нового, не заложенного в рамки стандартных учебных программ. Это умение – одно из наиболее ценных качеств современного специалиста наряду с его профессиональной подготовкой.

Поэтому Вы обязательно должны научиться работать самостоятельно, если хотите стать широко образованным, думающим специалистом, умеющим работать с литературой, способным увидеть инженерную задачу, грамотно ее поставить и найти способ решения. (Мы надеемся, что Вы разделяете с нами эту точку зрения! ☺)

И высшая математика в этом контексте важна не только как аппарат для решения задач в самых разных областях естествознания, но также является общепризнанным инструментом для развития логического мышления и вырабатывает навыки поиска решения не только чисто научных, но и практических задач. Она развивает способность видеть проблему и внутри, и извне, анализировать ее в разных аспектах и находить наиболее оптимальные пути решения.

К сожалению, в течение последних лет количество часов, отводимых на изучение высшей математики, сокращается, и студентам все большую долю работы по освоению учебного материала приходится выполнять самостоятельно. Но уровень подготовки многих студентов не позволяет им успешно делать это. В помощь к процессу самостоятельного освоения отдельных разделов курса высшей математики и создается эта серия учебно-методических пособий.

Данное пособие посвящено основным методам интегрирования и применению их для нахождения неопределенных и определенных интегралов от различных классов функций. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, затем разбирается довольно большое количество примеров, после которых предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведены ответы к этим задачам. Кроме того, авторы сочли разумным привести примерные варианты рейтинговых работ по материалу, изложенному в пособии.

В связи с указанным недостаточным уровнем подготовки некоторых студентов решение многих примеров в данном пособии изложено очень подробно. Авторы надеются, что это поможет разобраться в материале, который недостаточно был усвоен на лекциях или практических занятиях. Для желающих более глубоко вникнуть в суть процесса интегрирования приведены примеры несколько повышенной сложности, обозначенные звездочкой. Они не являются обязательными на начальном этапе освоения материала.

Данное пособие может использоваться как в течение семестра, так и при подготовке к экзамену. Если Вы проявите добросовестность и терпение при его изучении, то будете вправе надеяться на успешную сдачу экзамена по этой теме.

Предлагаемое пособие может быть полезно не только студентам, начинающим знакомство с интегральным исчислением, но также и магистрантам, аспирантам и инженерам, желающим восстановить свои знания в этой области.

Разумеется, изложенный в пособии материал не исчерпывает всего разнообразия классов интегрируемых функций, приемов интегрирования и областей приложения интегралов. Представлены только самые основные методы и наиболее распространенные типовые задачи. Теория интегрального исчисления глубоко изложена в учебниках [1-5], а большое количество примеров для решения имеется в [6-7].

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Т.2. – М.: Айрис-пресс, 2004. 253с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. – СПб.: Лань, 2006. 736с.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике; учебное пособие. – М.: Наука, 1973. 640с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика; учебник для ВУЗов. Т.2. – М.: Дрофа, 2004. 509с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления; учебное пособие для ВУЗов. Т.2. – М.: Физматлит, 2006. 864с.
6. Демидович Б.П. (ред.). Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: АСТ, 2001. 495с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2004. 432с.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:
http://kvm.gubkin.ru/index.html

ГЛАВА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Неопределенный интеграл, его свойства, таблица интегралов

Определение. Функция $F(x)$ называется ***первообрáзной на интервале (a, b) для функции f (x)***, если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Функции $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также являются первообразными для функции $f(x)$, так как $(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга на константу.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенных интегралов

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

3. Постоянный множитель выносится за знак интеграла:

$$\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx, \quad c \neq 0.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых:

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \right) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$$

ПРИМЕР 1.1.1. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$:

а) $F(x)=\dfrac{x^{15}}{15}, \qquad f(x)=x^{14}$;

б) $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{1}{x}, \qquad f(x)=2^x-\dfrac{1}{x^2}$;

в) $F(x)=x+\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}2x, \qquad f(x)=1-\dfrac{1}{\sin^2 2x}$;

г) $F(x)=e^{\sin x}-a, \qquad f(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}$;

д) $F(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}, \qquad f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$;

е) $F(x)=2\sqrt{\varphi(x)}, \qquad f(x)=\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$.

В этом примере $a = const$, и в дальнейшем a, b, m, n, p, q – тоже являются константами.

Решение. а) Так как $F'(x)=\left(\dfrac{x^{15}}{15}\right)'=\dfrac{1}{15}\cdot 15x^{14}=x^{14}=f(x)$, то функция $F(x)=x^{15}/15$ является первообразной для функции $f(x)=x^{14}$; аналогично:

б) $F'(x)=\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\ln 2}\cdot 2^x\ln 2-\dfrac{1}{x^2}=2^x-\dfrac{1}{x^2}=f(x)$;

в) $F'(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}2x\right)'=1+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)\cdot 2=1-\dfrac{1}{\sin^2 2x}=f(x)$;

г) $F'(x)=\left(e^{\sin x}-a\right)'=e^{\sin x}\cdot\cos x-0=\cos x\cdot e^{\sin x}=f(x)$;

д) $F'(x)=\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}\right)'=$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - x^2 - x^2 + a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{2\left(a^2 - x^2\right)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2} = f(x);$$

е) по правилу дифференцирования сложной функции

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}} \cdot \varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = f(x). \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.1.2. Дана функция $f(x)$. Пользуясь определением первообразной, подобрать для нее две первообразные функции:

а) $f(x) = 3x^{100}$; б) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2(1 + x^2)}$.

Решение. а) Согласно определению первообразной, надо подобрать такую функцию $F(x)$, чтобы ее производная равнялась данной функции $f(x)$: $F'(x) = 3x^{100}$. Такой функцией будет, например, $F(x) = \dfrac{3}{101} \cdot x^{101}$, так как $F'(x) = \dfrac{3}{101} \cdot 101 \cdot x^{100} = 3x^{100} = f(x)$. Другой первообразной для этой же функции $f(x)$ будет, например, $F_1(x) = \dfrac{3}{101} \cdot x^{101} + 1$, так как $F_1'(x) = 3 \cdot x^{100} + 0 = 3x^{100} = f(x)$.

б) Первообразными для данной функци будут, например, функции $F(x) = e^x - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ и $F_1(x) = e^x - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + 8$, так как $F'(x) = F_1'(x) = e^x - \dfrac{1}{2(x^2 + 1)}$. ■

ПРИМЕР 1.1.3. Будут ли заданные функции $F_i(x)$, i=1, 2, 3 первообразными для функции $f(x) = xe^{-x}$?

$$F_1(x) = -x(e^{-x} + 1);$$

$$F_2(x) = -e^{-x}(x+1);$$

$$F_3(x) = -e^{-x}(x+1) + 50.$$

Решение. Найдем производную функции $F_1(x)$:

$$F_1'(x) = \left(-x(e^{-x}+1)\right)' = -1(e^{-x}+1) - xe^{-x}(-1) = -e^{-x} - 1 + xe^{-x}.$$

Так как $F_1'(x) = -e^{-x} - 1 + xe^{-x} \neq xe^{-x} = f(x)$, функция $F_1(x)$ не является первообразной для $f(x)$.

Далее

$$F_2'(x) = \left(-e^{-x}(x+1)\right)' = e^{-x}(x+1) - e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x} = f(x),$$

следовательно, $F_2(x)$ есть первообразная для $f(x)$.

Наконец, функция $F_3(x)$ также является первообразной для $f(x)$, так как отличается от первообразной $F_2(x)$ на константу ($F_3(x) = F_2(x) + 50$). ■

Задачи для самостоятельного решения

№1. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$:

а) $F(x) = \mathrm{tg}\, x, \qquad f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

б) $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|, \qquad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$

в) $F(x) = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|, \qquad f(x) = \dfrac{1}{\cos x};$

г) $F(x) = -\cos\varphi(x), \qquad f(x) = \varphi'(x) \cdot \sin\varphi(x).$

№2. Пользуясь таблицей производных и определением первообразной, подобрать какую-нибудь первообразную для функции $f(x)$:

а) $f(x) = 5x$; б) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$, в частности,

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0).$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad (a \neq 0).$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad (a \neq 0)$.

15. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \ (a > 0)$.

16. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Замечание. Интегралы №9 и №15 будут выведены ниже.

Инвариантность формы записи интеграла

Форма записи любого из приведенных в таблице интегралов не меняется при замене x на любую дифференцируемую функцию от x, т.е. если

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(u(x))\,du(x) = F(u(x)) + C, \qquad (1)$$

где $u(x)$ – дифференцируемая функция.

Например, зная, что $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, имеем $\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C$.

Аналогично, используя $\int e^x dx = e^x + C$, получим, что $\int e^{7-x} d(7-x) = e^{7-x} + C$; или из $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ получим, что $\int \cos(5^x + x)\,d(5^x + x) = \sin(5^x + x) + C$.

Задачи для самостоятельного решения

№3. Используя инвариантность формы интеграла, найти следующие интегралы:

а) $\int \sqrt{x-2}\ d\sqrt{x-2}$; б) $\int 5^{\mathrm{tg}x}\ d(\mathrm{tg}\,x)$; в) $\int \cos(6-x)\,d(6-x)$;

г) $\int e^{x^2-3}d(x^2-3)$; д) $\int \frac{d(\mathrm{ctg}x)}{\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2 x}}$; е) $\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2(\sin x)}$;

ж) $\int \frac{d(2+3x)}{(2+3x)^{100}}$; з) $\int \frac{d(x^2)}{x^4+3}$; и) $\int \frac{d(5^x)}{3-25^x}$;

к) $\int \sqrt[7]{\arcsin x}\, d\arcsin x$.

1.2. Основные методы интегрирования

I. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование осуществляется с помощью таблицы неопределенных интегралов и свойств неопределенного интеграла после преобразований подынтегрального выражения, если они требуются. Разберем этот метод на примерах.

ПРИМЕР 1.2.1. Найти

а) $I=\int(4x^{34}-\sqrt{2}x+3\sqrt[3]{x})dx$; б)* $I=\int x|x|dx$.

Решение. а) Используя свойства 3 и 4 неопределенных интегралов (Раздел 1.1), получим $I=4\int x^{34}dx-\sqrt{2}\int xdx+3\int\sqrt[3]{x}dx$. Применим к каждому слагаемому формулу 1 из таблицы интегралов (Раздел 1.1):

$$I=4\frac{x^{34+1}}{34+1}+C_1-\sqrt{2}\frac{x^{1+1}}{1+1}+C_2+3\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C_3=$$

$$=\frac{4}{35}x^{35}-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+C,$$

где введено обозначение $C=C_1+C_2+C_3$.

Замечание 1. В дальнейшем будем сразу суммировать все произвольные постоянные и записывать общую константу C.

б) Очевидно, результат интегрирования зависит от знака x, поэтому подынтегральную функцию можно переписать в виде: $x|x| = x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$, где функция знака x («сигнум») определяется как $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Поскольку $\operatorname{sgn} x$ по сути является константой, ее можно вынести за знак интеграла. Таким образом, получаем:

$$I = \int x^2 \cdot \operatorname{sgn} x \, dx = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{x^3}{3} + C. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.2. Найти $I = \int (\sin x + 1)\, dx$.

Решение. Разбивая данный интеграл на сумму двух интегралов и применяя к первому из них формулу 5 таблицы интегралов, а ко второму – свойство 2 (Раздел 1.1), получим: $I = \int \sin x \, dx + \int dx = -\cos x + x + C$. ■

ПРИМЕР 1.2.3. Найти $I = \int \frac{p}{4 + x^2}\, dx, \quad (p = const)$.

Решение. Выносим константу p за знак интеграла и применяем формулу 11 таблицы интегралов: $I = p \int \frac{dx}{4 + x^2} = p \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = \frac{p}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$. ■

В некоторых случаях подынтегральное выражение может быть приведено к табличному виду с помощью ряда алгебраических преобразований, формул тригонометрии и т.п. Проиллюстрируем некоторые из этих приемов на примерах.

ПРИМЕР 1.2.4. Найти интегралы (m, n, p, q – константы):

а) $\int \frac{m+nx+x^2e^x}{x^2}\,dx$; б) $\int \frac{\left(3-2\sqrt{x}\right)^2}{5\sqrt[4]{x}}\,dx$;

в) $\int \frac{2\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{a\sqrt{x^4-9}}\,dx$; г) $\int \frac{x^2}{2x^2-1}\,dx$; д) $\int \frac{2x^4-1+x^2}{3-x^2}\,dx$;

е)* $\int\left(p\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\frac{q+1}{\sqrt{px}}\right)dx$; ж)* $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. а) Разделим почленно каждое слагаемое числителя на x^2, после чего разобьем данный интеграл на сумму трех интегралов, вынесем константы за знаки интегралов и применим табличные формулы:

$$\int \frac{m+nx+x^2e^x}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{m}{x^2}+\frac{n}{x}+e^x\right)dx =$$

$$= m\int x^{-2}dx + n\int\frac{dx}{x}+\int e^x dx = m\frac{x^{-1}}{-1}+n\ln|x|+e^x+C =$$

$$= -\frac{m}{x}+n\ln|x|+e^x+C.$$

б) Вынесем константу 1/5 за знак интеграла, возведем числитель в квадрат, разделим почленно на $\sqrt[4]{x}$, а далее разобьем на алгебраическую сумму трех интегралов:

$$\int \frac{\left(3-2\sqrt{x}\right)^2}{5\sqrt[4]{x}}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{9-12\sqrt{x}+4x}{\sqrt[4]{x}}\,dx =$$

$$= \frac{9}{5}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}-\frac{12}{5}\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}}+\frac{4}{5}\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x}} = \frac{9}{5}\int x^{-\frac{1}{4}}dx-\frac{12}{5}\int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}dx+$$

$$+\frac{4}{5}\int x^{1-\frac{1}{4}}dx = \frac{9}{5}\cdot\frac{x^{(-1/4)+1}}{(-1/4)+1}-\frac{12}{5}\cdot\frac{x^{(1/4)+1}}{(1/4)+1}+$$

$$+\frac{4}{5}\cdot\frac{x^{(3/4)+1}}{(3/4)+1}+C = \frac{12}{5}x^{\frac{3}{4}}-\frac{48}{25}x^{\frac{5}{4}}+\frac{16}{35}x^{\frac{7}{4}}+C.$$

в) Преобразуем выражение в знаменателе подынтегральной дроби: $\sqrt{x^4-9}=\sqrt{x^2-3}\cdot\sqrt{x^2+3}$, тогда

$$\int\frac{2\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{a\sqrt{x^4-9}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{a}\int\left(\frac{2\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-3}\cdot\sqrt{x^2+3}}-\frac{3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-3}\cdot\sqrt{x^2+3}}\right)dx=\frac{2}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}-$$

$$-\frac{3}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2}{a}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|-\frac{3}{a}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C.$$

г) Вынесем из знаменателя число 2 за знак интеграла, затем в числителе вычтем и прибавим число 1/2, после чего разобьем дробь на сумму двух дробей. Имеем:

$$\int\frac{x^2}{2x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x^2-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2-\frac{1}{2}}{x^2-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-1/2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\left(1/\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot 1/\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-1/\sqrt{2}}{x+1/\sqrt{2}}\right|+C=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

д) Подынтегральное выражение представляет собой неправильную рациональную дробь. (*Напоминание*: рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя). Выделим целую часть этой дроби, разделив углом числитель на знаменатель. <u>*Важно*</u>: числитель и знаменатель должны быть записаны по убывающим степеням x.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+x^2-1 & -x^2+3 \\ \cline{2-2} -\underline{2x^4-6x^2} & -2x^2-7 \\ 7x^2-1 & \\ -\underline{7x^2-21} & \\ 20 & \end{array}$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\int \frac{2x^4 - 1 + x^2}{3 - x^2}\,dx = \int\left(-2x^2 - 7 + \frac{20}{-x^2 + 3}\right)dx =$$

$$= -2\int x^2 dx - 7\int dx - 20\int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = -\frac{2}{3}x^3 - 7x -$$

$$-\frac{20}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C = -\frac{2}{3}x^3 - 7x - \frac{10}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

е) Применяя тригонометрические формулы $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ и $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, получим:

$$\int\left(p\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - \frac{q+1}{\sqrt{px}}\right)dx = \int\left(\frac{p}{2}(1+\cos x) + \frac{1-\cos x}{2} - \frac{q+1}{\sqrt{px}}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)dx + \int\left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\right)\cos x dx - \frac{q+1}{\sqrt{p}}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{p+1}{2}\int dx + \frac{p-1}{2}\int \cos x\, dx - \frac{q+1}{\sqrt{p}}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{p+1}{2}x + \frac{p-1}{2}\sin x -$$

$$-\frac{q+1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{p+1}{2}x + \frac{p-1}{2}\sin x - \frac{2(q+1)}{\sqrt{p}}\sqrt{x} + C.$$

ж) Так как

$$\frac{1}{\sin^2 x\ \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x},$$

то

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C\,. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№4. Используя методы, аналогичные изложенным выше, найти следующие интегралы:

а) $\int (ax^3 + 5x^4 + \sin x)dx$; б) $\int \frac{(3x+1)^3}{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^3} + 9x^2 + x^3 3^x}{x^3} dx$;

г) $\int \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1} dx$; д) $\int \mathrm{ctg}^2 x \, dx$; е) $\int \frac{(2 + \cos x)^2}{\cos^2 x} dx$;

ж) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$; з) $\int 3^x \left(4 + \frac{3^{-x}}{x^{10}} \right) dx$; и) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$;

к) $\int \frac{2x\, e^x - \sqrt{x}}{x} dx$.

II. Интегрирование с помощью замены переменной (метод подстановки)

Этот метод состоит в том, что переменную интегрирования заменяют на некоторую непрерывно дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$; тогда: $dx = d\,\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$; $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Иногда целесообразно использовать подстановку в виде $t = g(x)$, где $g'(x)$ – непрерывная функция; тогда $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$, т.е. формулу замены переменной можно применять и справа налево.

После интегрирования надо вернуться к старой переменной с помощью обратной замены.

ПРИМЕР 1.2.5. Найти $I = \int \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{1-x}} dx$.

Решение. Сделаем замену $\sqrt{1-x} = t$, тогда $1 - x = t^2$, $x = 1 - t^2$, $dx = -2t\,dt$ и

$$I=\int\frac{(1-t^2)^2-2(1-t^2)}{t}\,(-2t)\,dt=2\int\left(-(1-t^2)^2+2(1-t^2)\right)dt=$$

$$=2\int(1-t^4)dt=2\left(t-\frac{t^5}{5}\right)+C=2\left(\sqrt{1-x}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x)^5}\right)+C=$$

$$=2\sqrt{1-x}-\frac{2\sqrt{(1-x)^5}}{5}+C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.6. Найти $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Заметим, что если сделать замену $x=2\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\sqrt{\cos^2 t}=2|\cos t|=2\cos t$. Модуль был снят со знаком плюс, т.к. в выбранном интервале $t=\arcsin\frac{x}{2}$, $\cos t\geq 0$. Далее находим $dx=2\cos t\,dt$ и $I=\int\frac{2\cos t\,dt}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t+C$.

Делая обратную подстановку, получим

$$I=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t+C=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C=-\frac{1}{4}\frac{\cos\left(\arcsin(x/2)\right)}{\sin\left(\arcsin(x/2)\right)}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin(x/2)\right)}}{x/2}+C=-\frac{1}{2x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№5. Вычислить интегралы:

а) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx$;

б) $\int\frac{\left(\operatorname{tg}^2 x+\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\right)^2}{\cos^2 x}\,dx$.

III. Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала

Этот прием интегрирования очень удобен. Суть его та же, что и в методе замены переменной (п. ***II***), но ввиду чрезвычайной важности умения подводить различные функции под знак дифференциала при интегрировании многих классов функций этот прием выделен нами в отдельный пункт.

Базируется он на свойстве инвариантности формы записи интеграла и является одним из наиболее распространенных приемов; позволяет во многих случаях легко привести интеграл к табличному виду.

Идея приема состоит в том, что некоторым преобразованиям подвергается дифференциал. Напомним формулу для вычисления дифференциала функции $\varphi(x)$:

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\, dx. \qquad (2)$$

Если в подынтегральном выражении имеется множитель, являющийся производной какой-либо функции (или ее частью с точностью до коэффициентов, на которые можно домножить и разделить все выражение), то умноженный на dx, он представляет собой дифференциал этой функции. Функцию записывают после знака дифференциала d, т.е. формулу (2) применяют справа налево, и говорят, что функция внесена (или подведена) под знак дифференциала. *Шутка*: предлог «под» не означает, что функцию опускают ниже знака дифференциала.

Отметим, что

$$d(x + a) = dx, \quad d(a\, x) = a\, dx,$$

где a – любая константа; т.е. прибавление или вычитание константы под знаком дифференциала не меняет дифференциала, так как дифференциал константы равен нулю, постоянный множитель можно как вносить под знак дифференциала, так и выносить за его знак.

ПРИМЕР 1.2.7. Найти $\int (3x+5)^{37}\,dx$.

Решение. Поскольку преобразовать подынтегральную функцию в сумму весьма затруднительно без помощи компьютера, приведем дифференциал к виду $d(3x + 5)$, после чего интеграл станет табличным (свойство инвариантности – формула (1)). Для этого переменную x под дифференциалом умножаем и делим на 3, а компенсирующий множитель 1/3 выносим за знак дифференциала и интеграла, затем прибавляем к $3x$ под знаком дифференциала число 5. Получаем

$$\int (3x+5)^{37}\,dx = \int (3x+5)^{37}\,d\left(3x\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\int (3x+5)^{37}\,d(3x+5) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{38}}{38} + C = \frac{(3x+5)^{38}}{114} + C. \ ■$$

ПРИМЕР 1.2.8. Найти $\int \frac{1}{\sin^2(x/2-6)}\,dx$.

Решение. Чтобы сделать интеграл табличным, x под дифференциалом делим и умножаем на 2, выносим компенсирующий множитель 2 за знак дифференциала и интеграла, вычитаем под знаком дифференциала из $x/2$ число 6. В результате получаем:

$$\int \frac{1}{\sin^2(x/2-6)}\,dx = 2\int \frac{d(x/2)}{\sin^2(x/2-6)} =$$

$$= 2\int \frac{d(x/2-6)}{\sin^2(x/2-6)} = -2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-6\right) + C. \ ■$$

☺ Читатели, уже понявшие суть метода подведения под дифференциал, могут не читать следующий абзац.

Для рассматриваемого метода интегрирования очень важно уметь вносить функцию под знак дифференциала. При этом используется формула (2). Следует отметить, что функция $\varphi(x)$, стоящая под знаком дифференциала в формуле (2) слева, есть первообразная для функции $\varphi'(x)$, стоящей перед дифференциалом в правой части этой же формулы. Если обозначить $\varphi'(x)=\psi(x)$, то формула (2), записанная справа налево, будет выглядеть так:

$$\psi(x)dx=d\left(\int\psi(x)dx\right),$$

то есть для внесения функции под знак дифференциала достаточно найти какую-нибудь ее первообразную, которую и записать под знаком дифференциала d. Например, $\cos x\,dx=d\left(\int\cos x\,dx\right)=d(\sin x)$.

ПРИМЕР 1.2.9. Внести функции под знак дифференциала:

а) xdx; б) x^5dx; в) $(1+x)^{10}dx$; г) $\dfrac{dx}{x}$;

д) $\dfrac{dx}{1-x}$; е) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; ж) $e^x dx$; з) $2^x dx$; и) $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$;

к) $\dfrac{dx}{\cos^2(3x-1)}$; л) $\dfrac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; м) $\dfrac{dx}{3+x^2}$; н) $\dfrac{dx}{x\ln x}$.

Решение. а) $xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2)$, проверка по формуле (2): $\dfrac{1}{2}d(x^2)=\dfrac{1}{2}\cdot 2xdx=xdx$;

б) $x^5dx=\dfrac{1}{6}d(x^6)$, проверка по формуле (2): $\dfrac{1}{6}d(x^6)=\dfrac{1}{6}\cdot 6x^5dx=x^5dx$;

в) $(x+1)^5dx=d\left(\int(x+1)^5dx\right)=d\left(\int(x+1)^5d(x+1)\right)=$

$$=d\,\frac{(x+1)^6}{6}=\frac{1}{6}d(x+1)^6;$$

г) $\dfrac{dx}{x}=d\left(\int\dfrac{dx}{x}\right)=d(\ln|x|)$;

д) $\dfrac{dx}{1-x}=d\left(\int\dfrac{dx}{1-x}\right)=-d\left(\int\dfrac{d(1-x)}{1-x}\right)=-d(\ln|1-x|)$;

е) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = d\left(\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\right) = d\left(\int x^{-1/2}dx\right) = d\left(\dfrac{x^{1/2}}{1/2}\right) = 2d(\sqrt{x})$;

ж) $e^x dx = d(e^x)$;

з) $2^x dx = d\left(\int 2^x dx\right) = \dfrac{1}{\ln 2} d(2^x)$;

и) $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$;

к) $\dfrac{dx}{\cos^2(3x-1)} = d\left(\int \dfrac{dx}{\cos^2(3x-1)}\right) = \dfrac{1}{3} d\left(\int \dfrac{d(3x-1)}{\cos^2(3x-1)}\right) = \dfrac{1}{3} d(\operatorname{tg}(3x-1))$;

л) $\dfrac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = d\left(\int \dfrac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - x^2}}\right) = d\left(\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$;

м) $\dfrac{dx}{3+x^2} = d\left(\int \dfrac{dx}{(\sqrt{3})^2 + x^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} d\left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} d\left(\operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$;

н) $\dfrac{dx}{x\ln x} = d\left(\int \dfrac{dx}{x \ln x}\right) = d\left(\int \dfrac{d(\ln x)}{\ln x}\right) = d(\ln|\ln x|)$. ■

Задачи для самостоятельного решения

№6. Внести функции под знак дифференциала:

а) $x^{100}dx$; $(x + 1)^{100}dx$; $\dfrac{dx}{x^{100}}$; $\dfrac{dx}{\sqrt[100]{x}}$; $\dfrac{dx}{(100x-1)^{100}}$;

б) $\sin x\, dx$; $\cos 3x\, dx$; $\sin\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)dx$; $\cos(5 - x)\, dx$;

в) $e^{-x} dx$; $e^{3x + 4} dx$; $e^{1-\frac{x}{3}}dx$; $7^x dx$; $7^{-\frac{4x}{3}} dx$; $7^{\frac{2x-3}{5}} dx$;

г) $\dfrac{dx}{\sin^2 x}$; $\dfrac{dx}{\sin^2 \dfrac{8x}{3}}$; $\dfrac{dx}{\sin^2(5-2x)}$; д) $e^x e^{e^x} dx$.

ПРИМЕР 1.2.10. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x^3 dx}{3-5x^4}$; б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3-5x^4}}$; в) $\int \frac{x^3 dx}{3-5x^8}$.

Решение. а) Внесем x^3 под знак дифференциала $x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4)$, далее приведем выражение под дифференциалом к виду $3-5x^4$. Для этого домножим и разделим x^4 на число –5, компенсирующий множитель –1/5 вынесем за знак интеграла и к выражению $-5x^4$ прибавим число 3. Тогда получим

$$\int \frac{x^3 dx}{3-5x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{3-5x^4} = \frac{1}{4(-5)}\int \frac{d(-5x^4)}{3-5x^4} =$$

$$= -\frac{1}{20}\int \frac{d(3-5x^4)}{3-5x^4} = -\frac{1}{20}\ln\left|3-5x^4\right| + C.$$

Аналогично находятся следующие два интеграла:

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3-5x^4}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{3-5x^4}} = -\frac{1}{20}\int \frac{d(-5x^4+3)}{\sqrt{3-5x^4}} = -\frac{1}{10}\sqrt{3-5x^4} + C,$

так как $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{t} + C$.

в) $\int \frac{x^3 dx}{3-5x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{3-5x^8} = \left\| \text{приводим интеграл к виду } \int \frac{dt}{t^2-a^2} \right\| =$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{5}}\int \frac{d(\sqrt{5}x^4)}{(\sqrt{5}x^4)^2 - (\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}x^4 - \sqrt{3}}{\sqrt{5}x^4 + \sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{15}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}x^4 + \sqrt{3}}{\sqrt{5}x^4 - \sqrt{3}}\right| + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.11. Найти интегралы:

а) $\int \sin x\sqrt{\cos x}dx$; б) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{3+5\cos 2x}$; в) $\int \frac{\sin(x/2)\,dx}{\sqrt{3+5\cos^2(x/2)}}$; г) $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. а) Внося $\sin x$ под знак дифференциала $\sin x\,dx = -d(\cos x)$, получим:

$$\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx = -\int \sqrt{\cos x}\,d(\cos x) = \frac{\cos^{(1/2)+1} x}{(1/2)+1} + C = \frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C.$$

б) В данном интеграле

$$\sin 2x\,dx = d\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}d\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}d(\cos 2x),$$

и тогда

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{3+5\cos 2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{3+5\cos 2x} = -\frac{1}{2\cdot 5}\int \frac{d(5\cos 2x+3)}{3+5\cos 2x} =$$
$$= -\frac{1}{10}\ln|3+5\cos 2x| + C.$$

в) Таким же образом

$$\int \frac{\sin(x/2)\,dx}{\sqrt{3+5\cos^2(x/2)}} = -2\int \frac{d\left(\cos(x/2)\right)}{\sqrt{3+5\cos^2(x/2)}} =$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3+5\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C.$$

г) Как и было обещано, выводим табличный интеграл 9.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} =$$
$$= \frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Предлагаем формулу 10 из таблицы интегралов вывести самостоятельно, учитывая, что $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. ■

ПРИМЕР 1.2.12. Найти интегралы:

а) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{3e^{2x}-1}}$; б) $\int \frac{e^{-x}dx}{\cos^2 e^{-x}}$; в) $\int e^{\frac{x}{3}} e^{2e^{\frac{x}{3}}} dx$.

Решение. Во всех трех интегралах внесем экспоненту под знак дифференциала.

а) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{3e^{2x}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x})}{\sqrt[3]{3e^{2x}-1}} = \frac{1}{2\cdot 3}\int \left(3e^{2x}-1\right)^{-\frac{1}{3}} d\left(3e^{2x}-1\right) =$

$$= \left\| \text{интеграл вида } \int t^n dt \right\| = \frac{1}{6}\frac{\left(3e^{2x}-1\right)^{2/3}}{2/3} + C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(3e^{2x}-1\right)^2} + C.$$

б) $\int \frac{e^{-x}dx}{\cos^2 e^{-x}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\cos^2 e^{-x}} = -\operatorname{tg} e^{-x} + C$.

в) $\int e^{x/3} e^{2e^{x/3}} dx = 3\int e^{2e^{x/3}} d(e^{x/3}) = \frac{3}{2}\int e^{2e^{x/3}} d(2e^{x/3}) =$

$$= \left\| \text{интеграл вида } \int e^t dt \right\| = \frac{3}{2} e^{2e^{x/3}} + C. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.13. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int \frac{dx}{(1-x)(\ln^2(x-1)-2)}$; в) $\int \frac{\sqrt[13]{3-\ln 3x}}{x}dx$.

Решение. а) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$.

б) $\int \frac{dx}{(x-1)(\ln^2(x-1)-2)} = \int \frac{d(\ln(x-1))}{(\ln^2(x-1)-2)} = \left\| \text{интеграл вида } \int \frac{dt}{t^2-a^2} \right\| =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\ln(x-1)-\sqrt{2}}{\ln(x-1)+\sqrt{2}}\right| + C.$$

в) $\frac{dx}{x} = \frac{1}{3x}\cdot 3dx = d(\ln 3x)$, поэтому $\int \frac{\sqrt[13]{3-\ln 3x}}{x}dx = \int \sqrt[13]{3-\ln 3x}\, d(\ln 3x) =$

$$= -\int (3-\ln 3x)^{1/13} d(-\ln 3x + 3) = -\frac{13}{14}(3-\ln 3x)^{14/13} + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.14. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(2\arccos x+4)^{10}}{\sqrt{1-x^2}}dx; \qquad \text{б) } \int \frac{x^2+e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx.$$

Решение. а) $\displaystyle\int \frac{(2\arccos x+4)^{10}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int (2\arccos x+4)^{10}\, d(\arccos x) =$

$$= -\frac{1}{2}\int (2\arccos x+4)^{10}\, d(2\arccos x+4) = -\frac{(2\arccos x+4)^{11}}{22} + C.$$

б) $\displaystyle\int \frac{x^2+e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx + \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx +$

$$+\int e^{\operatorname{arctg} x}\, d(\operatorname{arctg} x) = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx +$$

$$+\int e^{\operatorname{arctg} x}\, d(\operatorname{arctg} x) = x - \operatorname{arctg} x + e^{\operatorname{arctg} x} + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.15. Найти интегралы:

$$\text{а) } I = \int \frac{20^{4-\operatorname{tg} 3x}-4}{\cos^2 3x}dx; \qquad \text{б) } \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x+1}{3}\left(3\operatorname{ctg}^2 \frac{x+1}{3} - 8\right)}dx.$$

Решение. а) Разобьем интеграл на сумму двух интегралов, разделив почленно числитель на знаменатель:

$$I = \int \frac{20^{4-\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x}dx - \int \frac{4dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int 20^{4-\operatorname{tg} 3x}\, d(\operatorname{tg} 3x) - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 3x} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int 20^{4-\operatorname{tg} 3x}\, d(4-\operatorname{tg} 3x) - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = -\frac{1}{3\ln 20}20^{4-\operatorname{tg} 3x} - \frac{4}{3}\operatorname{tg} 3x + C.$$

б) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x+1}{3}\left(3\operatorname{ctg}^2 \frac{x+1}{3} - 8\right)}dx = -3\int \frac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{x+1}{3}\right)}{3\operatorname{ctg}^2 \frac{x+1}{3} - 8} =$

$$= -3\cdot\frac{1}{3}\int \frac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{x+1}{3}\right)}{\operatorname{ctg}^2 \frac{x+1}{3} - (\sqrt{8/3})^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+1}{3} - \sqrt{8/3}}{\operatorname{ctg}\frac{x+1}{3} + \sqrt{8/3}}\right| + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.16. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{x - \operatorname{arcctg}(x/2)}{4+x^2} dx; \qquad \text{б) } \int \frac{2x^2 - \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}}{1+x^2} dx.$$

Решение. а) Представим интеграл в виде суммы двух интегралов, в каждом из них используем метод подведения функции под знак дифференциала.

$$\int \frac{x - \operatorname{arcctg}(x/2)}{4+x^2} dx = \int \frac{x\,dx}{4+x^2} - \int \frac{\operatorname{arcctg}(x/2)\,dx}{4+x^2} = \left\| x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2), \right.$$

$$\left. \frac{dx}{4+x^2} = d\int \frac{dx}{4+x^2} = -\frac{1}{2} d(\operatorname{arcctg}(x/2)) \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{4+x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\, d\left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{4}\operatorname{arcctg}^2\frac{x}{2} + C.$$

$$\text{б) } \int \frac{2x^2 - \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}}{1+x^2} dx = 2\int \frac{x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}}{1+x^2} dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx -$$

$$-\int \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}\, d(\operatorname{arctg} x) = 2\int dx - 2\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \operatorname{arctg}^{4/3} x\, d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= 2x - 2\operatorname{arctg} x - \frac{3}{7}\operatorname{arctg}^{7/3} x + C.$$

Обратите внимание на часто используемые приемы: почленное деление числителя на знаменатель, а также прибавление и вычитание одного и того же выражения. ■

ПРИМЕР 1.2.17. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx; \qquad \text{б) } \int \cos\left(\frac{4}{x+2} - 5\right)\frac{dx}{(x+2)^2}; \qquad \text{в) } \int e^{\frac{1-x^2}{x^2}} \frac{dx}{x^3}.$$

Решение. а) Учитывая, что $\dfrac{1}{x^2} dx = d\int \dfrac{dx}{x^2} = d\left(\dfrac{x^{-1}}{-1}\right) = -d\left(\dfrac{1}{x}\right)$, получим

$$\int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx = -\int \sin\frac{1}{x}\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$$

б) $\int \cos\left(\frac{4}{x+2}-5\right)\frac{dx}{(x+2)^2}=\left\|\frac{dx}{(x+2)^2}=-d\left(\frac{1}{x+2}\right)\text{(см. пример а)}\right\|=$

$$=-\frac{1}{4}\int\cos\left(\frac{4}{x+2}-5\right)d\left(\frac{4}{x+2}-5\right)=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{4}{x+2}-5\right)+C.$$

в) $\int e^{\frac{1-x^2}{x^2}}\frac{dx}{x^3}=\left\|\frac{dx}{x^3}=d\left(\int x^{-3}dx\right)=d\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\|=$

$$=-\frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{x^2}-1}d\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}-1}+C.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы в задачах №7-14:

№7. а) $\int x^4(3+2x^5)^{19}dx$; б) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{3x^4+1}}$; в) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4}}dx$.

№8. а) $\int\frac{\cos x\,dx}{1-3\sin x}$; б) $\int\frac{\sin(x/4)\,dx}{\sqrt{1-3\cos(x/4)}}$; в) $\int\frac{\sin 5x\,dx}{\sqrt{3-\cos^2 5x}}$.

№9. а) $\int x^2e^{3x^3}dx$; б) $\int\frac{2^{3/x}}{x^2}dx$; в) $\int\frac{e^{-1/x}-x^3-\sqrt[3]{x}-1}{x^2}dx$.

№10. а) $\int\frac{dx}{x\ln^{15}x}$; б) $\int\frac{dx}{x(2\ln 2x+5)}$; в) $\int\frac{x^{10}-\ln x}{x}dx$;

г) $\int\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)\ln\ln(x+3)}$.

№11. а) $\int\frac{dx}{\sin^2 x(3-2\operatorname{ctg}x)}$; б) $\int\frac{11+2\sqrt{1-3\operatorname{ctg}2x}}{\sin^2 2x}dx$.

№12. а) $\int\frac{5^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\sin(2-3\sqrt{x-1})\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x}\cos^2(\sqrt{3x}/2)}$.

№13. а) $\int \frac{\cos(\mathrm{arctg}x)}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\cos^2(3\mathrm{arcctg}x)}$; в) $\int \frac{2-\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

№14. а) $\int \frac{e^x dx}{3e^x-1}$; б) $\int \frac{e^{-x}dx}{3e^{-2x}-1}$; в) $\int e^{x/4}\cos\left(2-3e^{x/4}\right)dx$.

IV. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (3)$$

где u и v – непрерывно дифференцируемые функции от x.

Чаще всего она используется в тех случаях, когда подынтегральное выражение представляет собой произведение степенной функции (или многочлена) и одной из следующих функций: показательной, логарифмической, тригонометрической или обратной тригонометрической.

Приведем ряд примеров.

ПРИМЕР 1.2.18. Найти $\int x\sin(x/3)\,dx$.

Решение. Пусть $u=x$, тогда $dv=\sin(x/3)dx$. Из этих двух равенств находим элементы правой части формулы (3): дифференциал $du = x'dx = dx$; $v=\int\sin(x/3)dx = 3\int\sin(x/3)d(x/3) = -3\cos(x/3)$. Применяя формулу (3), получим:

$$\int \underset{u}{x}\underbrace{\sin(x/3)dx}_{dv} = \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\left(-3\cos(x/3)\right)}_{v} - \int\underbrace{(-3)\cos(x/3)}_{v}\underset{du}{dx} =$$
$$= -3x\cos(x/3) + 3\int\cos(x/3)dx = -3x\cos(x/3) +$$
$$+3\cdot 3\int\cos(x/3)d(x/3) = -3x\cos(x/3) + 9\sin(x/3) + C. \ \blacksquare$$

Другая форма применения формулы (3) состоит в том, что исходный интеграл сначала представляют в виде $\int u dv$. Для этого в подынтегральном выражении перед дифференциалом оставляют только функцию, принятую за u, а остальное вносят под знак дифференциала. Затем непосредственно применяют формулу (3). Если в предыдущем примере $u = x$ оставим перед дифференциалом, а функцию $\sin(x/3)$ внесем под знак дифференциала: $\sin(x/3)dx = -3d\left(\cos(x/3)\right)$, то получим

$$\int x\sin(x/3)dx = -3\int \underset{u}{x}\, d\underbrace{\left(\cos(x/3)\right)}_{v} = -3\left(\underset{u}{x}\underbrace{\cos(x/3)}_{v} - \int \underbrace{\cos(x/3)}_{v}\; d\underset{u}{x}\right) =$$
$$= -3x\cos(x/3) + 9\sin(x/3) + C.$$

Иногда формулу (3) применяют не один раз.

ПРИМЕР 1.2.19. Найти $I = \int (2x^2 - 3)5^{1-x}\, dx$.

Решение. Будем находить этот интеграл вторым способом. Функцию $5^{\,1-x}$ вносим под знак дифференциала:

$$5^{1-x}dx = d\left(\int 5^{1-x}dx\right) = -d\left(\int 5^{1-x}d(1-x)\right) = -\frac{1}{\ln 5}d\left(5^{1-x}\right).$$

Тогда, принимая $u = 2x^2 - 3$, получим

$$I = -\frac{1}{\ln 5}\int (\underbrace{2x^2-3}_{u})d\left(\underset{v}{5^{1-x}}\right) = -\frac{1}{\ln 5}\left((\underbrace{2x^2-3}_{u})\underset{v}{5^{1-x}} - \int \underset{v}{5^{1-x}}\, d(\underbrace{2x^2-3}_{u})\right) =$$
$$= -\frac{1}{\ln 5}(2x^2-3)5^{1-x} + \frac{1}{\ln 5}\int 5^{1-x}\cdot 4\underset{u}{x}\,dx.$$

Еще раз применяем формулу (3), принимая $u = x$ и вынося константу 4 за знак интеграла:

$$I = -\frac{1}{\ln 5}(2x^2-3)5^{1-x} - \frac{4}{\ln^2 5}\int \underset{u}{x}d\,\underset{v}{5^{1-x}} =$$
$$= -\frac{1}{\ln 5}(2x^2-3)5^{1-x} - \frac{4}{\ln^2 5}\left(x\cdot 5^{1-x} - \int 5^{1-x}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{\ln 5}(2x^2-3)5^{1-x} - \frac{4}{\ln^2 5}x\cdot 5^{1-x} - \frac{4}{\ln^2 5}\int 5^{1-x}d(1-x) =$$
$$= -\frac{1}{\ln 5}(2x^2-3)5^{1-x} - \frac{4}{\ln^2 5}x\cdot 5^{1-x} - \frac{4}{\ln^3 5}5^{1-x} + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.20. Найти $\int x \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx$.

Решение. Предложим такую форму записи:

$$\int x \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} \;\Rightarrow du = \dfrac{1}{1+(x/2)^2}\cdot\dfrac{1}{2}dx = \dfrac{2dx}{4+x^2} \\ dv = xdx \;\Rightarrow v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot 2\int\frac{x^2dx}{4+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \int\frac{x^2+4-4}{4+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \int\left(\frac{4+x^2}{4+x^2} - \frac{4}{4+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \int dx + 4\int\frac{dx}{4+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - x + 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - x + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.21. Найти $I = \int\frac{\ln^2 2x}{x^2}\,dx$.

Решение. Этот пример такого же типа, как и предыдущий. Применим другую форму записи, учитывая, что $dx/x^2 = -d\left(1/x\right)$:

$$I = -\int\underbrace{\ln^2 2x}_{u}\, \underset{v}{d\left(1/x\right)} = -\frac{1}{x}\ln^2 2x + \int\frac{1}{x}d(\ln^2 2x).$$

Поскольку $d(\ln^2 2x) = 2\ln 2x\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2dx = 2\frac{\ln 2x}{x}dx$, имеем

$$I = -\frac{1}{x}\ln^2 2x + 2\int\frac{\ln 2x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln^2 2x - 2\int\underset{u}{\ln 2x}\, \underset{v}{d\left(1/x\right)} =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 2x - 2\left(\frac{1}{x}\ln 2x - \int\frac{1}{x}d(\ln 2x)\right).$$

Учитывая, что $d(\ln 2x) = \frac{1}{2x}\cdot 2dx = \frac{dx}{x}$, получим

$$I = -\frac{1}{x}\ln^2 2x - \frac{2}{x}\ln 2x + 2\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln^2 2x - \frac{2}{x}\ln 2x - \frac{2}{x} + C. \blacksquare$$

В примерах 1.2.18, 1.2.19 за u были приняты многочлены, т.к. при нахождении их дифференциалов понижается степень, и интеграл в правой части формулы (3) становится проще, чем исходный. В примерах же 1.2.20, 1.2.21 за u были приняты логарифмическая и обратная тригонометрическая функции. Такой выбор обусловлен тем, что если, предположим, в примере 1.2.20 за u принять степенную функцию то $dv = \operatorname{arctg}(x/2)dx$, $v = \int \operatorname{arctg}(x/2)dx$, а такого интеграла в таблице нет (хотя, в принципе, он может быть найден тем же методом интегрирования по частям). В примере 1.2.21 рассуждения аналогичные.

Иногда при интегрировании по частям (может быть, повторном) приходим к исходному интегралу с некоторым коэффициентом. В результате имеем алгебраическое уравнение относительно исходного интеграла. Продемонстрируем этот прием в трех следующих примерах.

ПРИМЕР 1.2.22.* Выведем формулу 15 таблицы интегралов $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Решение. $I = \int \underbrace{\sqrt{a^2 - x^2}}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} =$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x)dx = \dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \underbrace{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx}_{I} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$$

Таким образом, получаем уравнение $I = f(x) - I,$ где обозначили $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$. Решаем это уравнение: $2I = f(x),\ I = f(x)/2.$ Найденное выражение является одной из первообразных исходной подынтегральной функции. Поэтому неопределенный интеграл от нее равен

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \blacksquare$$

Аналогично можно вывести формулу 16 таблицы интегралов. Рекомендуется проделать это самостоятельно.

ПРИМЕР 1.2.23. Найти $I = \int 2^{-x}\cos(x/2)\,dx$.

Решение. Применим дважды формулу интегрирования по частям:

$$I = \int \underbrace{2^{-x}}_{u}\,\underbrace{\cos(x/2)dx}_{dv} = 2\int \underbrace{2^{-x}}_{u}\,d\underbrace{\left(\sin(x/2)\right)}_{v} =$$

$$= 2\left(2^{-x}\sin(x/2) - \int \sin(x/2)d(2^{-x})\right).$$

Поскольку $d(2^{-x}) = -2^{-x}\ln 2\,dx$, получаем

$$I = 2\cdot 2^{-x}\sin(x/2) + 2\ln 2\int \underbrace{2^{-x}}_{u}\,\underbrace{\sin(x/2)dx}_{dv} = 2\cdot 2^{-x}\sin(x/2) -$$

$$-4\ln 2\int \underbrace{2^{-x}}_{u}\,\underbrace{d\left(\cos(x/2)\right)}_{dv} = 2^{1-x}\sin(x/2) -$$

$$-4\ln 2\left(2^{-x}\cos(x/2) - \int \cos(x/2)d(2^{-x})\right).$$

Снова подставляя найденное выше выражение для $d(2^{-x})$, имеем

$$I = \underbrace{2^{1-x}\sin(x/2) - 4\ln 2\cdot 2^{-x}\cos(x/2)}_{f(x)} - 4\ln^2 2\underbrace{\int 2^{-x}\cos(x/2)\,dx}_{I}.$$

Получили уравнение $I = f(x) - 4\ln^2 2\cdot I$, откуда $I + 4\ln^2 2\cdot I = f(x)$ и, следовательно, $I = \frac{f(x)}{1 + 4\ln^2 2}$. Найденное выражение является одной из первообразных исходной подынтегральной функции. Поэтому неопределенный интеграл от нее равен

$$\int 2^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2^{1-x}\sin\frac{x}{2} - 4\ln 2\cdot 2^{-x}\cos\frac{x}{2}}{1+4\ln^2 2} + C\,.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.24.* Найти $I = \int \cos\ln x\,dx$.

Решение. $I = \int \underbrace{\cos\ln x}_{u}\,\underbrace{d\,x}_{v} = x\cos\ln x - \int x d(\cos\ln x)$,

учитывая, что $d(\cos\ln x) = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$, имеем

$$I = x\cos\ln x + \int \underbrace{\sin\ln x}_{u}\,\underbrace{d\,x}_{v} = x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int x d(\sin\ln x);$$

т.к. $d(\sin\ln x) = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$, то

$$I = \underbrace{x\cos\ln x + x\sin\ln x}_{f(x)} - \underbrace{\int \cos\ln x\,dx}_{I}\,.$$

Получено уравнение $I = f(x) - I$, откуда $I = f(x)/2$; далее, учитывая рассуждения, приведенные в решении примеров 1.2.22 и 1.2.23, получаем

$$I = \frac{x\cos\ln x + x\sin\ln x}{2} + C\,.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах №15-20 найти интегралы методом интегрирования по частям:

№15. а) $\int x\,e^{\frac{3x}{2}}\,dx$; б) $\int (x^2 - x)\,3^{-x}\,dx$.

№16. а) $\int x\cos\frac{x}{4}dx$; б) $\int (1 - x - x^2)\sin 5x\,dx$;

в) $\int x\cos^2 x\,dx$ (*указание*: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$).

№17. а) $\int x \arcsin x\, dx$; б) $\int \arccos 2x\, dx$; в) $\int x \operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}\, dx$.

№18. а) $\int x \ln x\, dx$; б) $\int \ln^2 x\, dx$; в) $\int \dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{x}}\, dx$;

г) $\int x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) dx$ (*указание*: $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \ln\dfrac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x$).

№19. а) $\int \sin \ln x\, dx$; б) $\int e^{3x} \cos\dfrac{x}{3}\, dx$.

№20. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$.

Замечание 2. В пп. ***I-III*** были изложены основные методы интегрирования. Переходим к рассмотрению некоторых классов интегрируемых функций. При этом для удобства запоминания всего излагаемого материала в целом продолжим начатую нумерацию пунктов.

V. Интегралы, содержащие квадратный трехчлен

В этом разделе рассмотрим два типа интегралов.

а) Первый тип – интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$$

(*a, b, c* – константы).

Чтобы получить практически табличный интеграл, достаточно выделить полный квадрат в квадратном трехчлене. Напоминаем эту операцию:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\underline{\underline{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) = a\left(\underline{\underline{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right).$$

В результате получается один из интегралов вида 11-16 таблицы интегралов.

б) Ко второму типу относятся интегралы вида:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx; \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx; \quad \int (mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

где m и n – константы.

Имеется два способа вычисления.

Первый способ. Так же, как для интегралов первого типа, выделяем полный квадрат из выражения $ax^2 + bx + c$. Затем делаем замену $t = x + \frac{b}{2a}$, откуда $x = t - \frac{b}{2a}$, $dx = dt$. Получаем интегралы вида:

$$\int \frac{mt+\tilde{n}}{a(t^2 \pm k^2)}dt; \qquad \int \frac{mt+\tilde{n}}{\sqrt{a(t^2 \pm k^2)}}dt; \qquad \int \left(mt+\tilde{n}\right)\sqrt{a(t^2 \pm k^2)}dt,$$

где k и $\tilde{n}$ – некоторые новые константы. Каждый из полученных интегралов разбивается на сумму двух интегралов. Первый находится путем внесения переменной t под знак дифференциала; второй является табличным.

Второй способ. Элементарными алгебраическими преобразованиями каждый из интегралов второго типа можно представить в виде суммы интеграла типа а) и одного из приведенных ниже:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{d\left(f(x)\right)}{f(x)} = \ln\left|f(x)\right| + C, \tag{4}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \left(f(x)\right)^{-1/2} d\left(f(x)\right) = 2\sqrt{f(x)} + C, \tag{5}$$

$$\int f'(x)\sqrt{f(x)}dx = \int \left(f(x)\right)^{1/2} d\left(f(x)\right) = \frac{2}{3}\left(f(x)\right)^{3/2} + C. \tag{6}$$

ПРИМЕР 1.2.25. Найти $I = \int \frac{dx}{3x^2 - 5x + 1}$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$3x^2-5x+1=3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right)=3\left(\underline{\underline{x^2-2\cdot\frac{5}{2\cdot 3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2}}-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=3\left(\underline{\underline{(x-5/6)^2}}-13/36\right).$$

Тогда

$$I=\int\frac{dx}{3\left((x-5/6)^2-13/36\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-5/6)}{(x-5/6)^2-\left(\sqrt{13}/6\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{13}/6}\ln\left|\frac{x-5/6-\sqrt{13}/6}{x-5/6+\sqrt{13}/6}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6x-5-\sqrt{13}}{6x-5+\sqrt{13}}\right|+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.26. Найти $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

Решение. Имеем:

$$1-x-x^2=-\left(x^2+x-1\right)=-\left(\underline{\underline{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)=$$

$$=-\left(\underline{\underline{(x+1/2)^2}}-5/4\right)=5/4-(x+1/2)^2.$$

Откуда $I=\int\frac{d(x+1/2)}{\sqrt{5/4-(x+1/2)^2}}=\arcsin\frac{(x+1/2)}{\sqrt{5}/2}+C=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.\ \blacksquare$

ПРИМЕР 1.2.27. Найти $I=\int\sqrt{5x-2x^2}\,dx$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$5x-2x^2=-2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)=-2\left(\underline{\underline{x^2-2\cdot\frac{5}{2\cdot 2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2}}-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)=$$

$$=-2\left(\underline{\underline{(x-5/4)^2}}-25/16\right).$$

Тогда заданный интеграл приводится к табличному интегралу вида $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$:

$$I=\sqrt{2}\int\sqrt{25/16-\left(x-5/4\right)^{2}}\;d\left(x-5/4\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{x-5/4}{2}\sqrt{25/16-\left(x-5/4\right)^{2}}+\sqrt{2}\,\frac{25/16}{2}\arcsin\frac{x-5/4}{5/4}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}(4x-5)\sqrt{\frac{5}{2}x-x^{2}}+\frac{25\sqrt{2}}{32}\arcsin\frac{4x-5}{5}+C\,.\;\blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.28. Найти $I=\int\frac{3x-5}{2x-x^{2}}\,dx.$

Решение. Данный интеграл относится к типу б). Продемонстрируем применение обоих способов интегрирования, приведенных выше.

Первый способ. В знаменателе выделим полный квадрат:

$$2x-x^{2}=-\left(x^{2}-2x\right)=-\left(x^{2}-2x+1-1\right)=-\left((x-1)^{2}-1\right).$$

Сделаем замену $x-1=t$, тогда $x=t+1$ и $dx=dt$. Интеграл примет вид

$$I=\int\frac{3(t+1)-5}{-(t^{2}-1)}\,dt=-\int\frac{3t+3-5}{(t^{2}-1)}\,dt=-\int\frac{3t}{(t^{2}-1)}\,dt+\int\frac{2}{(t^{2}-1)}\,dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{d(t^{2}-1)}{t^{2}-1}+2\int\frac{dt}{t^{2}-1}=-\frac{3}{2}\ln\left|t^{2}-1\right|+\frac{2}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Сделаем обратную замену ($t=x-1$):

$$I=-\frac{3}{2}\ln\left|(x-1)^{2}-1\right|+\ln\left|\frac{x-1-1}{x-1+1}\right|+C=-\frac{3}{2}\ln\left|x^{2}-2x\right|+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.$$

Второй способ. Можно воспользоваться интегралом (4); для этого в числителе подынтегральной дроби должна стоять производная знаменателя:

$$f'(x)=(2x-x^{2})'=2-2x.$$

Исходный интеграл можно переписать следующим образом:

$$\int\frac{3x-5}{2x-x^{2}}\,dx=\int\frac{A\cdot f'(x)+B}{2x-x^{2}}\,dx=\int\frac{A(2-2x)+B}{2x-x^{2}}\,dx,$$

где коэффициенты A и B определяются из тождества $3x-5=A(2-2x)+B$, по свойству которого коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны быть равны. Раскрывая скобки в правой части полученного тождества и приводя подобные слагаемые, имеем: $3x-5=-2Ax+2A+B$, откуда

$$3=-2A \quad\Rightarrow\quad A=-3/2,$$

$$-5=2A+B \quad\Rightarrow\quad B=-5-(-3)=-2.$$

Подставляя найденные значения в интеграл, получим

$$I=\int\frac{(-3/2)\cdot(2-2x)-2}{2x-x^2}\,dx.$$

Далее разобьем интеграл на два; первый из них имеет вид (4), а второй относится к типу а), (выделяем полный квадрат, как в первом способе):

$$I=-\frac{3}{2}\int\frac{\overbrace{(2-2x)}^{f'(x)}}{\underbrace{2x-x^2}_{f(x)}}\,dx-2\int\frac{dx}{2x-x^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|2x-x^2\right|+2\int\frac{dx}{(x-1)^2-1}=-\frac{3}{2}\ln\left|2x-x^2\right|+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.29. Найти $I=\int(3x-5)\sqrt{x^2-4x-7}\,dx.$

Решение. Это интеграл типа б). В выражении $3x-5$ выделим производную подкоренного трехчлена $(x^2-4x-7)'=2x-4$ так же, как в примере 1.2.28. Получим $3x-5=(2x-4)\cdot 3/2+1$ (проверьте!), тогда

$$I=\int\left((2x-4)\cdot\frac{3}{2}+1\right)\sqrt{x^2-4x-7}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\underbrace{(2x-4)}_{f'(x)}\underbrace{\sqrt{x^2-4x-7}}_{\sqrt{f(x)}}\,dx+\int\sqrt{x^2-4x-7}\,dx.$$

Первый интеграл есть интеграл типа (6), во втором

$$x^2-4x-7=x^2-4x+4-4-7=(x-2)^2-11, \text{ тогда}$$

$$I=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2-4x-7)^{3/2}+\int\sqrt{(x-2)^2-11}\,dx=(x^2-4x-7)^{3/2}+$$
$$+\frac{x-2}{2}\sqrt{(x-2)^2-11}-\frac{11}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-11}\right|+C.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах №21-27 найти интегралы:

№21. а) $\int\frac{dx}{5x^2+x+4}$; б) $\int\frac{e^x dx}{5e^{2x}+e^x+4}$ (*указание*: e^x внести под знак дифференциала и ввести обозначение $e^x=t$).

№22. а) $\int\frac{dx}{7x-x^2}$; б) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{7\cos 2x-\cos^2 2x}$ (*указание*: функцию $\sin 2x$ внести под знак дифференциала, после чего ввести обозначение $\cos 2x=t$).

№23. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{3x+\sqrt{x}+1}}$ (*указание*: функцию $\frac{1}{\sqrt{x}}$ внести под знак дифференциала).

№24. а) $\int\sqrt{3x^2+4x}\,dx$; б) $\int e^{-x}\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}\,dx$.

№25. а) $\int\frac{7x-1}{2x^2-x+10}\,dx$; б) $\int\frac{\mathrm{tg}x-2}{\cos^2 x(2\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x+10)}\,dx$ (*указание*: использовать подведение функции под знак дифференциала).

№26. а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$; б) $\int\frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x-8}}\,dx$ (*указание*: использовать равенство $e^{2x}-e^x=e^x(e^x-1)$ и подведение функции под знак дифференциала).

№27. а) $\int(1-x)\sqrt{x^2-6x}\,dx$; б) $\int 2^x(2^x-1)\sqrt{2^x-4^x}\,dx$ (*указание*: функцию 2^x внести под знак дифференциала).

VI. Интегрирование рациональных дробей

К этому классу относятся интегралы вида $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно.

Для нахождения интегралов этого типа достаточно подынтегральную дробь разложить на сумму «простых» дробей вида $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$, где трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, k и r – натуральные числа, A, M, N – неопределенные коэффициенты. Способы нахождения интегралов от этих «простых» дробей уже изложены выше. При $r > 1$ принцип нахождения интегралов будет рассмотрен в примере 1.2.35.

Заметим, что на простые можно раскладывать только правильные рациональные дроби ($m < n$). В случае неправильной дроби ($m \geq n$) следует предварительно выделить из нее целую часть. К этому мы вернемся ниже.

Предлагаем следующий

Алгоритм разложения правильной рациональной дроби на сумму простых дробей.

1) Разложить многочлен $Q_n(x)$ на множители. Для этого приходится решать уравнение $Q_n(x) = 0$ и находить все его корни, действительные и комплексные, вместе с их кратностью:

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{h_1}(x^2+p_2x+q_2)^{h_2}\ldots,$$

где $x_1, x_2, \ldots$ – действительные корни с кратностью $k_1, k_2, \ldots$ соответственно, трехчлены $x^2+p_1x+q_1$, $x^2+p_2x+q_2, \ldots$ имеют комплексные корни (дискриминант $D < 0$) с кратностью $h_1, h_2, \ldots$ соответственно.

2) Представить подынтегральную дробь в виде суммы «простых» дробей. В результате получим тождество:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \underbrace{\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}}_{\text{для множителя } (x-x_1)^{k_1}} +$$

$$+\underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}}_{\text{для множителя } (x-x_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+\underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{M_{h_1}x+N_{h_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{h_1}}}_{\text{для множителя } (x^2+p_1x+q_1)^{h_1}} +$$

$$+\underbrace{\frac{K_1x+L_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{K_{h_2}x+L_{h_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{h_2}}}_{\text{для множителя } (x^2+p_2x+q_2)^{h_2}} + \ldots,$$

где A_1, $A_2, \ldots,$ A_{k_1}, B_1, $B_2, \ldots,$ $B_{k_2}, \ldots,$ M_1, N_1, M_2, $N_2, \ldots,$ M_{h_1}, $N_{h_1}, \ldots,$ K_1, L_1, K_2, $L_2, \ldots,$ K_{h_2}, $L_{h_2}, \ldots$ – константы, подлежащие определению.

3) Правую часть полученного тождества приводят к общему знаменателю и приравнивают числитель результирующей дроби (обозначим его $H_l(x)$ – многочлен степени l относительно x) и первоначальной дроби. Получится равенство (которое на самом деле является тождеством)

$$H_l(x) = P_m(x). \tag{7}$$

4) В тождество (7) входят константы, указанные в пункте 2). Для их нахождения применяют либо метод неопределенных коэффициентов, либо метод частных значений, либо их комбинацию. В методе неопределенных коэффициентов используется свойство тождеств, согласно которому коэффициенты при одинаковых степенях x в его левой и правой частях равны.

Применяя это свойство к тождеству (7), получают систему уравнений относительно неизвестных констант, которую и решают.

Метод частных значений и комбинация обоих методов будут продемонстрированы на примерах.

ПРИМЕР 1.2.30. Найти $I = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$.

Решение. Подынтегральная дробь является правильной ($m = 2$, $n = 3$, $m < n$).

1) Знаменатель дроби легко раскладывается на множители:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

2-3) Представляем подынтегральную дробь в виде суммы простых и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}.$$

Записываем тождество (7). Для этого приравниваем числители исходной и последней дробей, раскрывая скобки:

$$2x^2 - 3x + 3 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx.$$

4) Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства (метод неопределенных коэффициентов).

При x^2: $\quad 2 = A + B,$

при x^1: $\quad -3 = -2A - B + C,$

при x^0: $\quad 3 = A.$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Подставим $A = 3$ в первое и второе уравнение и находим из первого уравнения B, из второго – C:

$$B = 2 - A = 2 - 3 = -1; \qquad C = -3 + 2A + B = -3 + 6 - 1 = 2.$$

Таким образом:

$$I=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(x-1)}{x-1}+$$

$$+2\int(x-1)^{-2}d(x-1)=3\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C. \ ■$$

ПРИМЕР 1.2.31. Найти $I=\int\frac{x+1}{x^3-8}\,dx.$

Решение. 1) Для разложения знаменателя дроби на множители используем формулу:

$(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, после чего

2-3) раскладываем дробь на простые, приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x+1}{x^3-8}=\frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+4}=$$

$$=\frac{A(x^2+2x+4)+(Mx+N)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

и приравниваем числители:

$$x+1=A(x^2+2x+4)+(Mx+N)(x-2).$$

4) Составим систему уравнений для неизвестных коэффициентов методом частных значений:

при $x=2$ (корень знаменателя): $3=12A \Rightarrow A=1/4$,

при $x=0$ (частное значение): $1=4A-2N \Rightarrow 1=1-2N \Rightarrow N=0$,

при $x=1$ (частное значение): $2=7A-M-N \Rightarrow 2=7/4-M \Rightarrow M=-1/4$.

Наконец, находим:

$$I=\int\left(\frac{1/4}{x-2}-\frac{x/4}{x^2+2x+4}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+2x+4};$$

второй интеграл содержит квадратный трехчлен и относится к типу б), в его числителе выделяем производную от знаменателя и, уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{(2x+2)\frac{1}{2}-1}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\frac{1}{8}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4}+\frac{1}{4}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3}=$$

$=\|$ в знаменателе последнего инт-ла выделен полный квадрат $\|=$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.32. Найти $I=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение. 1) Знаменатель подынтегральной дроби имеет комплексные корни:

$$x^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=-1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-1}=\pm i;$$
$$x^2+4=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=-4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i.$$

2) Разложение на простые дроби имеет вид:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

3) Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

и приравниваем числители:

$$1=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

4) Составим систему уравнений для неизвестных коэффициентов методом частных значений.

При $x=i$ (один из корней двучлена x^2+1):

$$1=(Ai+B)(-1+4)+(Ci+D)\cdot 0, \qquad 1=3Ai+3B.$$

Имеем равенство комплексных чисел: 1 и $3Ai+3B$; их мнимые и действительные части должны быть равны, т.е.

$3A=0,\quad 3B=1,$ таким образом, $A=0,\quad B=1/3.$

При $x = 2i$ (один из корней двучлена $x^2 + 4$):

$$1 = 0 + (2Ci + D)(-4 + 1), \qquad 1 = -6Ci - 3D.$$

Снова приравниваем мнимые и действительные части чисел 1 и $-6Ci - 3D$:

$$-6C = 0, \quad 3D = -1 \quad \Rightarrow \quad C = 0, \quad D = -1/3.$$

Тогда

$$I = \int \left(\frac{1/3}{(x^2+1)} - \frac{1/3}{(x^2+4)} \right) dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \ \blacksquare$$

Прежде чем интегрировать неправильную рациональную дробь ($m \geq n$), из нее надо выделить целую часть, как это делалось в примере 1.2.4д). Деление углом надо продолжать до тех пор, пока степень остатка не станет меньше степени делителя:

$$\begin{array}{l|l} P_m(x) & Q_n(x) \\ \cline{2-2} \underline{\quad \ldots \quad} & a(x) \\ R_l(x) & \end{array}$$

И тогда $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = a(x) + \dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$, где дробь $\dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$ является правильной, т.е. $l < n$, и к ней применяется алгоритм, изложенный выше.

ПРИМЕР 1.2.33. Найти $I = \displaystyle\int \frac{9 + x - 17x^2 + 17x^3 - 7x^4 + x^5}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\, dx.$

Решение. Здесь $m = 5$, $n = 3$, т.е. $m > n$, поэтому вначале выделим целую часть подынтегральной дроби, для чего делим числитель на знаменатель, располагая оба выражения по убывающим степеням x:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 17x^2 + x + 9 & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ \cline{3-3} & \underline{x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2} & x^2 - x \\ - & -x^4 + 6x^3 - 11x^2 + x + 9 & \\ & \underline{-x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 6x} & \\ & -5x + 9 & \end{array}$$

Тогда $I = \int \left(x^2 - x + \dfrac{9-5x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \right) dx$, где первые два слагаемые дают табличные интегралы, а третье слагаемое есть правильная рациональная дробь, которую следует разложить на простые.

1) Находим три корня знаменателя, т.е. решаем уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Один из корней $x_1 = 1$ найден подбором. Для нахождения двух других используем теорему Безу, согласно которой данный многочлен должен делиться без остатка на разность $x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ -\underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad\quad & x^2 - 5x + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ -\underline{-5x^2 + 5x} \qquad\; & \\ 6x - 6 & \\ -\underline{6x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда многочлен можно представить в виде произведения:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

Находим остальные два корня:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3.$$

Следовательно, многочлен в знаменателе может быть представлен в виде произведения трех множителей:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

2-3) Раскладываем дробь на простые и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{9-5x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$$
$$= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Приравниваем числители исходной и последней дробей:

$$9 - 5x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

4) Метод частных значений (подстановка корней x_1, x_2, x_3):

при $x = 1$: $\quad 4 = A(-1)(-2) + 0 + 0 \;\Rightarrow\; A = 2,$

при $x = 2$: $\quad -1 = 0 + B \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \;\Rightarrow\; B = 1,$

при $x = 3$: $\quad -6 = 0 + 0 + C\cdot 2\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C = -3.$

Наконец, находим интеграл:

$$I = \int\left(x^2 - x + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-3}\right)dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.34. Найти $I = \int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^4 x - 1)}\, dx.$

Решение. Подынтегральная дробь не является рациональной, но если внести x из знаменателя под знак дифференциала $\left(\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right)$ и ввести новую переменную $t = \ln x$, то мы получим:

$$I = \int \frac{\ln^4 x}{\ln^4 x - 1}\, d\ln x = \int \frac{t^4}{t^4 - 1}\, dt.$$

Выделяем целую часть, не производя деления углом:

$$\frac{t^4}{t^4-1} = \frac{t^4 - 1 + 1}{t^4 - 1} = \frac{t^4-1}{t^4-1} + \frac{1}{t^4-1} = 1 + \frac{1}{t^4-1}.$$

Далее проделываем стандартные операции:

$$\frac{1}{t^4-1} = \frac{1}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Mt+N}{t^2+1};$$

$$1 = A(t^2+1)(t+1) + B(t^2+1)(t-1) + (Mt+N)(t-1)(t+1).$$

Для нахождения коэффициентов используем оба метода:

при $t = 1$ (корень): $\quad 1 = 4A + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1/4,$

при $t = -1$(корень): $\quad 1 = 0 - 4B + 0 \quad \Rightarrow \quad B = -1/4,$

при $t = 0$ (частное значение): $\quad 1 = A - B + -N \quad \Rightarrow \quad N = A - B - 1 \quad \Rightarrow$

$N = -1/2,$

коэффициенты при t^3: $\quad 0 = A + B + M \quad \Rightarrow \quad M = -A - B = 0.$

Итак,

$$I=\int\left(1+\frac{1/4}{t-1}-\frac{1/4}{t+1}-\frac{1/2}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=t+\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Возвращаемся к исходной переменной, подставляя $t = \ln x$:

$$I=\ln x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\ln x+C$$

(В последнем выражении была использована формула $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$). ■

ПРИМЕР 1.2.35.* Найти $I=\int\frac{x^4-x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Решение. Подынтегральная дробь не является правильной ($m = n = 4$). Поэтому надо выделить целую часть. В данном случае сделаем это так:

$$\frac{x^4-x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-2x^2-1-x^3}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}-\frac{2x^2+1+x^3}{(x^2+1)^2}=1-\frac{2x^2+1+x^3}{(x^2+1)^2}.$$

Далее действуем по алгоритму. Дробь $\frac{2x^2+1+x^3}{(x^2+1)^2}$ является правильной и имеет двукратную пару комплексных корней $x = \pm i$. Разложение имеет вид:

$$\frac{x^3+2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2};$$

тождество: $x^3+2x^2+1=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D$.

Для нахождения коэффициентов A, B, C, D используем оба метода.

Метод частных значений дает:

при $x = i$ (корень): $i^3+2i^2+1 = (Ai + B)(i^2 + 1) + Ci + D \quad\Rightarrow$

$-i - 2 + 1 = 0 + Ci + D \quad\Rightarrow\quad -i - 1 = Ci + D \quad\Rightarrow\quad C = -1,\ D = -1;$

при $x = 0$ (частное значение): $\quad 1 = B + D \quad \Rightarrow \quad B = 1 - D \quad \Rightarrow \quad B = 2.$

По методу неопределенных коэффициентов приравниваем множители при x^3:

$$1 = A.$$

Итак,

$$I = \int\left(1 - \frac{x+2}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\right)dx = \int dx - \int\frac{x\,dx}{x^2+1} - 2\int\frac{dx}{x^2+1} +$$

$$+\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = x - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} - 2\operatorname{arctg} x +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + I_1 = x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + I_1.$$

Где обозначили $I_1 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Этот интеграл требует отдельного подхода:

$$I_1 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int\frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \int\left(\frac{1+x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x^2+1} - \int x\frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$$

Ко второму интегралу применим метод интегрирования по частям:

$$u = x, \text{ тогда } du = dx,\ dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \text{ и } v = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Имеем:

$$I_1 = \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\right) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C_1.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$I = x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{здесь } C_1 \\ \text{включено в } C \end{array} \right\| = x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№28. Разложить следующие рациональные дроби на простые (неизвестные коэффициенты не вычислять):

а) $\dfrac{x^3-5}{(x^2-x)(x^2+2x+10)}$;

б) $\dfrac{1}{(x^3-3x^2)(x^3+6x^2+9x)(x^3-27)}$ (*указание*: при разложении на множители записать одинаковые множители в виде степени);

в) $\dfrac{x^5+x-20}{(x^4-16)(x^4-5x^2+4)(x^4+4x^2+4)(x-2)^3}$.

№29. Найти следующие интегралы от рациональных дробей:

а) $\displaystyle\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; б) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-2)^2(x-1)}$; в) $\displaystyle\int\frac{x}{x^3+1}dx$;

г) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$; д) $\displaystyle\int\frac{(x^2-2)^2}{(x^3+x)x}dx$; е) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2+4)^2}$;

ж) $\displaystyle\int\frac{x^5+x+1}{x^4-1}dx$; з) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{(\sin^2 x+\sin x+1)(\sin x-2)}$ (*указание*: внести $\cos x$ под знак дифференциала и ввести новую переменную);

и) $\displaystyle\int\frac{(x^2+3)x}{(x^4+1)(2x^2-3)}dx$ (*указание*: внести x под знак дифференциала и ввести новую переменную);

к) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}$; л) $\displaystyle\int\frac{2\ln^2 x+1}{x(\ln^2 x-1)(1-\ln x)}dx$.

VII. *Интегралы от тригонометрических функций*

Это очень обширный класс интегралов, требующий хорошего знания практически всех основных тригонометрических формул (следует их повторить, это поможет понять логику предлагаемых ниже способов интегрирования). Всего будет рассмотрено пять видов интегралов от тригонометрических функций.

1. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx\,dx,\quad \int \cos ax \cos bx\,dx,\quad \int \sin ax \sin bx\,dx.$$

Метод интегрирования – применение одной из следующих формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)), \tag{8}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)), \tag{9}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \tag{10}$$

В результате получаем практически табличные интегралы.

ПРИМЕР 1.2.36. Найти $I = \int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Решение. Применим формулу (8), тогда получим

$$I = \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\sin\frac{5x}{6}\,dx + \frac{1}{2}\int\sin\left(-\frac{x}{6}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\int\sin\frac{5x}{6}\,d\left(\frac{5x}{6}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 6\int\sin\frac{x}{6}\,d\left(\frac{x}{6}\right) = -\frac{3}{5}\cos\frac{5x}{6}+3\cos\frac{x}{6}+C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.37. Найти $I = \int \sin x \sin 3x \cos 6x\,dx$.

Решение. Применим формулу (10) к первым двум множителям:

$$I=\frac{1}{2}\int\big(\cos(x-3x)-\cos(x+3x)\ \big)\cos 6x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\underbrace{\cos(-2x)}_{\cos 2x}\cos 6x dx-\frac{1}{2}\int\cos 4x\cos 6x\,dx;$$

в каждом из интегралов используем формулу (9) и получим:

$$I=\frac{1}{4}\int(\underbrace{\cos(-4x)}_{\cos 4x}+\cos 8x)\,dx-\frac{1}{4}\int(\underbrace{\cos(-2x)}_{\cos 2x}+\cos 10x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{32}\sin 8x-\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{40}\sin 10x+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.38. Найти $I=\int\sin 2x\cos^2(2x/3)\,dx$.

Решение. Сначала применим формулу $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, затем разобьем интеграл на сумму двух интегралов и далее по стандарту:

$$I=\int\sin 2x\frac{1+\cos(4x/3)}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin 2x\cos(4x/3)\,dx;$$

во втором интеграле используем формулу (8), тогда

$$I=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}\int(\underbrace{\sin\big(2x+4x/3\big)}_{\sin(10x/3)}+\underbrace{\sin\big(2x-4x/3\big)}_{\sin(2x/3)})dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{3}{40}\cos\frac{10x}{3}-\frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3}+C.\ \blacksquare$$

2. Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, где *n, m* – целые неотрицательные числа.

Здесь может быть два варианта.

2.1. Хотя бы одно из чисел *n, m* нечетное. Пусть это будет $n=2k+1$. Представляем $\cos^n x=\cos^{2k+1}x=\cos^{2k}x\cdot\cos x$, а функцию $\cos x$ подводим под знак дифференциала ($\cos x\,dx=d(\sin x)$), оставшуюся же четную степень косинуса выражаем через синус с помощью основного тригонометрического тождества: $\cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k = (1-\sin^2 x)^k$. Вводя новую переменную $t = \sin x$, получаем интегралы от степенных функций.

2.2. Если среди показателей *n, m* нет нечетного, то следует понизить степень, используя формулы $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, и тогда после обычных алгебраических преобразований в общем случае снова получаем интегралы типа **2.1**, **2.2** или практически табличные.

ПРИМЕР 1.2.39. Найти $I = \int \sin^5 \dfrac{x}{3} \cos^{10} \dfrac{x}{3}\, dx$.

Решение. Здесь $n = 10$, $m = 5$, т.е. есть нечетная степень (случай **2.1**). Поэтому $\sin(x/3)$ вносим под знак дифференциала: $\sin(x/3)\, dx = -3d\left(\cos(x/3)\right)$, а оставшуюся функцию $\sin^4(x/3)$ выражаем через ту, которая получилась под дифференциалом, т.е. через $\cos(x/3)$:

$$\sin^4 \frac{x}{3} = \left(\sin^2 \frac{x}{3}\right)^2 = \left(1-\cos^2 \frac{x}{3}\right)^2.$$

Тогда

$$I = \int \sin^4 \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} \cos^{10} \frac{x}{3}\, dx = -3\int \left(1-\cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 \cos^{10} \frac{x}{3}\, d\cos \frac{x}{3} =$$

$$= \left\| t = \cos \frac{x}{3} \right\| = -3\int (1-t^2)^2 t^{10} dt = -3\int (1-2t^2+t^4) t^{10} dt =$$

$$= -3\int (t^{10} - 2t^{12} + t^{14})\, dt = -3\left(\frac{t^{11}}{11} - 2\frac{t^{13}}{13} + \frac{t^{15}}{15}\right) + C;$$

возвращаемся к исходной переменной $t = \cos(x/3)$ и получаем:

$$I = -\frac{3}{11}\cos^{11} \frac{x}{3} + \frac{6}{13}\cos^{13} \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\cos^{15} \frac{x}{3} + C. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.40. Найти $I=\int \sin^2 2x\cos^4 2x\,dx$.

Решение. Имеем $n=4$, $m=2$, т.е. нет нечетной степени (случай **2.2**). Понижаем степень: $\cos^4 2x=(\cos^2 2x)^2=\left(\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)^2$, $\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$, следовательно,

$$I=\int\frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\underbrace{(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)}_{1-\cos^2 4x=\sin^2 4x}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 4x\,(1+\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 4x\,dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 4x\cos 4x\,dx.$$

Первый из интегралов относится к типу **2.2** – нет нечетной степени, в нем понизим степень, второй интеграл типа **2.1** – есть нечетная степень, внесем $\cos 4x$ под знак дифференциала:

$$I=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 8x}{2}dx+\frac{1}{32}\int\sin^2 4x\,d\sin 4x=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{1}{96}\sin^3 4x+C. \ ■$$

ПРИМЕР 1.2.41. Найти $I=\int\dfrac{\sin^2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Сначала проведем следующие преобразования:

1) функцию $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ внесем под знак дифференциала $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2d\sqrt{x}$,

2) представим $\sin^2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}=\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)^2=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\sqrt{x}$.

Тогда интеграл примет стандартный вид: $I=\dfrac{2}{4}\int\sin^2 2\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$.

Он относится к типу **2.2** (нет нечетной степени). По алгоритму имеем:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 4\sqrt{x}}{2}\,d\sqrt{x}=\frac{1}{4}\int d\sqrt{x}-\frac{1}{4}\int\cos 4\sqrt{x}\,d\sqrt{x}=$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{x}-\frac{1}{16}\sin 4\sqrt{x}+C. \blacksquare$$

3. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$, где *n*, *m* – целые положительные числа.

Здесь также возможны два варианта.

3.1. Показатели *n*, *m* одинаковой четности. В этом случае сначала вносят функцию $\frac{1}{\sin^2 x}$ (или $\frac{1}{\cos^2 x}$) под знак дифференциала: $\frac{dx}{\sin^2 x}=-d(\operatorname{ctg} x)$ (или $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\operatorname{tg} x)$). После чего оставшуюся часть подынтегральной дроби можно рационально представить через функцию, оказавшуюся под знаком дифференциала, с помощью тригонометрических формул:

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x,\qquad \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1.$$

3.2. Показатели *n*, *m* разной четности. В этом случае можно использовать соотношение

$1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^k$, подбирая нужный показатель k.

ПРИМЕР 1.2.42. Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^4(x/2)\cos^4(x/2)}$.

Решение. Здесь $n=4$, $m=4$, оба показателя четные (случай **3.1**). Используя соотношения: $\frac{dx}{\cos^2(x/2)}=2d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, $\frac{1}{\cos^2(x/2)}=1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ и

$$\frac{1}{\sin^4(x/2)}=\frac{1}{\left(\sin^2(x/2)\right)^2}=\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2(x/2)}\right)^2=\frac{\left(\operatorname{tg}^2(x/2)+1\right)^2}{\operatorname{tg}^4(x/2)},$$

получим

$$I=2\int\frac{\left(\operatorname{tg}^2(x/2)+1\right)^2}{\operatorname{tg}^4(x/2)}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\left\| t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\|=$$

$$=2\int\frac{(t^2+1)^3}{t^4}dt=2\int\frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^4}dt=2\int(t^2+3+3t^{-2}+t^{-4})dt=$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}+3t-\frac{3}{t}-\frac{1}{3t^3}\right)+C;$$

возвращаемся к старой переменной:

$$I=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+6\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{6}{\operatorname{tg}(x/2)}-\frac{2}{3\operatorname{tg}^3(x/2)}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+6\operatorname{tg}\frac{x}{2}-6\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.43. Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^5 3x\cos 3x}$.

Решение. Здесь $n=1$, $m=5$, оба показателя нечетны (случай **3.1**), применяем тот же метод, что и в предыдущем примере, но под знак дифференциала подводим функцию $1/(\sin^2 3x)$.

$$I=\int\frac{dx}{\sin^2 3x\sin^3 3x\cos 3x}=-\frac{1}{3}\int(1+\operatorname{ctg}^2 3x)^{3/2}(1+\operatorname{tg}^2 3x)^{1/2}d(\operatorname{ctg}3x)=$$

$$=-\frac{1}{3}\int(1+\operatorname{ctg}^2 3x)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\operatorname{ctg}^2 3x+1}{\operatorname{ctg}^2 3x}\right)^{1/2}d(\operatorname{ctg}3x)=\| t=\operatorname{ctg}3x\|=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{(1+t^2)^{3/2+1/2}}{(t^2)^{1/2}}dt=-\frac{1}{3}\int\frac{(1+t^2)^2}{t}dt=-\frac{1}{3}\int\left(t^3+2t+\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}+t^2+\ln|t|\right)+C=-\frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{12}-\frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{3}-\frac{\ln|\operatorname{ctg}3x|}{3}+C.\blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.44. Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$.

Решение. Здесь $n=1$, $m=4$, показатели разной четности (случай **3.2.**). Используя равенство $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$, получим

$$I=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 dx}{\sin^4 x\cos x}=\int\frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^4 x\cos x}dx=$$

$$=\|\text{разбиваем на сумму трех интегралов}\|=\int\frac{\sin^4 x\,dx}{\sin^4 x\cos x}+$$

$$+2\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^4 x\cos x}dx+\int\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x\cos x}dx=\int\frac{dx}{\cos x}+2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+$$

$$+\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{dx}{\cos x}+2\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}+\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}d(\sin x)=$$

$$=\|\text{последний интеграл разбиваем на сумму двух интегралов}\|=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos x}+2\int\sin^{-2} x\,d(\sin x)+\int\sin^{-4} x\,d(\sin x)-\int\sin^{-2} x\,d(\sin x)=$$

$$=\|\text{приводим подобные слагаемые}\|=$$

$$=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C. \ \blacksquare$$

4. Интегралы вида $\int\mathrm{tg}^n x\,dx$ и $\int\mathrm{ctg}^n x\,dx$.

Здесь используются соотношения

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},$$

откуда

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1,\ \mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Метод нахождения подобных интегралов покажем на двух примерах: с четным и нечетным n.

ПРИМЕР 1.2.45. Найти $I=\int \operatorname{tg}^5 \frac{2x}{3}\,dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\operatorname{tg}^5\frac{2x}{3}=\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{2x}{3}=\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2(2x/3)}-1\right)=$$
$$=\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2(2x/3)}-\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3},$$

после чего данный интеграл можно записать в виде разности двух интегралов:

$$I=\int\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2(2x/3)}dx-\int\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}dx.$$

В первом интеграле внесем функцию $\frac{1}{\cos^2(2x/3)}$ под знак дифференциала, а ко второму применим тот же метод, что и к исходному, представляя $\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}=\operatorname{tg}\frac{2x}{3}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2(2x/3)}-1\right)$. Тогда

$$I=\frac{3}{2}\int\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}\,d\left(\operatorname{tg}\frac{2x}{3}\right)-\left(\int\operatorname{tg}\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2(2x/3)}dx-\int\operatorname{tg}\frac{2x}{3}dx\right).$$

В последнем интеграле запишем $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=\frac{\sin(2x/3)}{\cos(2x/3)}$, и функцию $\sin\frac{2x}{3}$ внесем под знак дифференциала:

$$I=\frac{3}{2}\int\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}\,d\left(\operatorname{tg}\frac{2x}{3}\right)-\frac{3}{2}\int\operatorname{tg}\frac{2x}{3}\,d\left(\operatorname{tg}\frac{2x}{3}\right)-\frac{3}{2}\int\frac{d\left(\cos(2x/3)\right)}{\cos(2x/3)}=$$
$$=\frac{3}{8}\operatorname{tg}^4\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\frac{2x}{3}-\frac{3}{2}\ln\left|\cos\frac{2x}{3}\right|+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.46. Найти $I=\int\operatorname{tg}^4 ax\,dx$.

Решение. Используем тот же прием, что и в предыдущем примере:

$$I=\int \mathrm{tg}^2 ax\left(\frac{1}{\cos^2 ax}-1\right)dx=\int \mathrm{tg}^2 ax\cdot\frac{1}{\cos^2 ax}\,dx-\int \mathrm{tg}^2 ax\,dx=$$

$$=\frac{1}{a}\int \mathrm{tg}^2 ax\,d(\mathrm{tg}ax)-\int\left(\frac{1}{\cos^2 ax}-1\right)dx=\frac{1}{3a}\mathrm{tg}^3 ax-\frac{1}{a}\mathrm{tg}\,ax+x+C. \ \blacksquare$$

5. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция переменных $\sin x$, $\cos x$.

В зависимости от вида подынтегральной функции можно предложить ряд подстановок, приводящих в общем случае к интегралам от рациональных дробей.

5.1. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\sin x$**,** т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, делают подстановку $\cos x = t$, тогда $x = \arccos t$, $dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\sin x=\sqrt{1-t^2}$.

5.2. Если подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, делают подстановку $\sin x = t$, тогда $x = \arcsin t$, $dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x=\sqrt{1-t^2}$.

5.3. В случае четности подынтегральной функции относительно $\sin x$ **и** $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, делают подстановку $\mathrm{tg}\, x = t$, тогда $x = \mathrm{arctg}\, t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$.

5.4. Если не реализуется ни один из перечисленных вариантов 5.1, **5.2**, **5.3**, делают так называемую «***универсальную тригонометрическую подстановку***»:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,\ \text{тогда}\ x = 2\mathrm{arctg}\, t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Любая из вышеперечисленных подстановок приводит в общем случае к интегралам от рациональных дробей.

ПРИМЕР 1.2.47. Найти $I=\int\frac{\sin x\,(2-\cos x)}{\cos^2 x-3\sin^2 x}dx$.

Решение. Так как

$$R(-\sin x,\cos x)=\frac{-\sin x\,(2-\cos x)}{\cos^2 x-3(-\sin x)^2}=-\frac{\sin x\,(2-\cos x)}{\cos^2 x-3\sin^2 x}=-R(\sin x,\cos x),$$

то делаем подстановку $\cos x=t$, откуда $x=\arccos t$, $dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\sin x=\sqrt{1-t^2}$.

$$I=-\int\frac{\sqrt{1-t^2}\,(2-t)}{t^2-3(1-t^2)}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\frac{(2-t)}{4t^2-3}\,dt;$$

представляем интеграл в виде разности двух интегралов и во втором вносим t под знак дифференциала, получаем:

$$I=-\int\frac{2}{4t^2-3}dt+\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2)}{4t^2-3}=-\int\frac{d(2t)}{(2t)^2-3}+\frac{1}{8}\int\frac{d(4t^2-3)}{4t^2-3}=$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2t-\sqrt{3}}{2t+\sqrt{3}}\right|+\frac{1}{8}\ln\left|4t^2-3\right|+C.$$

Возвращаемся к исходной переменной $t=\cos x$:

$$I=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{2\cos x+\sqrt{3}}\right|+\frac{1}{8}\ln\left|4\cos^2 x-3\right|+C.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.48. Найти $I=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+4}\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$;

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-\sin x(-\cos x)}{(-\sin x)^2 + 4} = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 4} = R(\sin x, \cos x),$$

поэтому делаем подстановку tg $x = t$, (x = arctg t, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$), и тогда

$$I = \int \frac{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + 4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t\,dt}{(5t^2+4)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{(5t^2+4)(1+t^2)}.$$

Подстановка $t^2 = z$ приводит к стандартному интегралу, содержащему квадратный трехчлен:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(5z+4)(1+z)} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{5z^2+9z+4}.$$

Выделяем полный квадрат: $5z^2 + 9z + 4 = 5\left(z^2 + \frac{9}{5}z + \frac{4}{5}\right) =$

$$= 5\left(z^2 + 2\cdot\frac{9}{10}z + \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{4}{5}\right) = 5\left(\left(z + \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}\right).$$

Интеграл принимает вид:

$$I = \frac{1}{2\cdot 5}\int \frac{dz}{(z+0{,}9)^2 - 0{,}01} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2\cdot 0{,}1}\ln\left|\frac{z+0{,}9-0{,}1}{z+0{,}9+0{,}1}\right| + C.$$

Делая обратные подстановки $z = t^2 = \mathrm{tg}^2 x$ и упрощая, получим

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}^2 x + 0{,}8}{\mathrm{tg}^2 x + 1}\right| + C. \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.49. Найти $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2 + \cos x - \sin x}$.

Решение. Так как случаи **5.1**, **5.2**, **5.3** здесь не реализуются (проверьте!), то следует применять «универсальную тригонометрическую подстановку»

$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Учитывая, что x = 2arctg t, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

получим

$$I=\int\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{2+2t^2+1-t^2-2t}=2\int\frac{dt}{t^2-2t+3}.$$

Это интеграл, содержащий квадратный трехчлен; выделяем полный квадрат, применяем табличную формулу и делаем обратную подстановку $t=\operatorname{tg}(x/2)$:

$$I=2\int\frac{dt}{(t-1)^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{2}}+C.\ ■$$

ПРИМЕР 1.2.50. Найти $I=\int\dfrac{1-\sin x}{2-\cos x}\,dx$.

Решение. Первый способ. Этот интеграл не относится к видам **5.1**, **5.2**, **5.3** и формально следует применять «универсальную тригонометрическую подстановку», как в примере 1.2.49. Проделаем это:

$$I=\int\frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{1+t^2-2t}{(1+t^2)(2+2t^2-1+t^2)}\,dt=2\int\frac{1+t^2-2t}{(1+t^2)(1+3t^2)}\,dt.$$

Это интеграл от рациональной дроби, который находится путем разложения подынтегральной дроби на простые. Однако в данном примере несложные преобразования позволяют получить результат быстрее, представив последний интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I=2\int\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+3t^2)}\,dt+2\int\frac{-2t}{(1+t^2)(1+3t^2)}\,dt.$$

Во втором интеграле внесем $2t$ под знак дифференциала и сделаем замену $t^2=z$, после чего получим два практически табличных интеграла:

$$I=2\int\frac{dt}{1+3t^2}-2\int\frac{dz}{(1+z)(1+3z)}=2\int\frac{dt}{1+3t^2}-2\int\frac{dz}{3z^2+4z+1}.$$

Выделяя полный квадрат в последнем интеграле

$$3z^2+4z+1=3\left(z^2+\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=3\left(z^2+2\cdot\frac{2}{3}z+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right)=3\left(\left(z+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)$$

и приводя оба интеграла к табличному виду, получим:

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}t)}{1+(\sqrt{3}t)^2}-\frac{2}{3}\int\frac{d(z+2/3)}{(z+2/3)^2-1/9}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,t-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 1/3}\ln\left|\frac{z+2/3-1/3}{z+2/3+1/3}\right|+C.$$

Наконец, возвращаясь к исходной переменной ($t=\operatorname{tg}(x/2)$, $z=t^2=\operatorname{tg}^2(x/2)$), имеем:

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}^2(x/2)+1}{3\operatorname{tg}^2(x/2)+3}\right|+C.$$

Второй способ. Можно заметить, что, разбив данный интеграл на два интеграла: $I=\int\frac{dx}{2-\cos x}-\int\frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$,

во втором достаточно внести $\sin x$ под знак дифференциала, а в первом применить универсальную тригонометрическую подстановку, чтобы оба интеграла стали табличными. Проделаем эти действия:

$$I=\int\frac{2dt}{\left(2-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}+\int\frac{d(\cos x)}{2-\cos x}=2\int\frac{dt}{2+2t^2-1+t^2}-$$

$$-\int\frac{d(2-\cos x)}{2-\cos x}=2\int\frac{dt}{1+3t^2}-\ln|2-\cos x|=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t)-$$

$$-\ln(2-\cos x)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\ln(2-\cos x)+C.$$

Несмотря на то, что данный ответ немного отличается по форме от полученного первым способом, он, конечно же, равносилен ему: первообразная функции может иметь различные алгебраические выражения. ■

Задачи для самостоятельного решения

№30. Применяя способы, изложенные в п.**1**, найти интегралы:

а) $\int \sin x \cos 3x\, dx$; б) $\int \sin\frac{4}{3}x\, \sin\frac{x}{4}\, dx$; в) $\int \cos 2x \cos\frac{x}{2} \cos 3x\, dx$.

№31. Применяя способы, изложенные в п. **2**, найти интегралы:

а) $\int \sin^4 x\, \cos^3 x\, dx$;

б) $\int \sin^5 3x\, \cos^{11} 3x\, dx$. (*Примечание*: выгоднее внести под знак дифференциала $\sin 3x$, а не $\cos 3x$. Почему?)

в) $\int \sin^4 \frac{2x}{3}\, dx$; г) $\int \cos^5 \frac{x}{4}\, dx$; д) $\int \sin^6 x\, \cos^4 x\, dx$;

е) $\int \sin(7-x) \cos^3(7-x)\, dx$; ж) $\int \cos^2(2x-5)\, dx$;

з) $\int \sin\frac{1}{x} \cos^{100}\frac{1}{x}\, \frac{dx}{x^2}$ (*указание*: внести $\frac{1}{x^2}$ под знак дифференциала);

и) $\int \frac{\cos^2(3\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; к) $\int \frac{\sin^2 \ln x}{x}\, dx$.

№32. Применяя способы, изложенные в п. **3**, найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sin^2 7x \cos^4 7x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^4 \frac{x}{3}}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^3 5x \cos^5 5x}$;

г) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$.

№33. Применяя способы, изложенные в п. **4**, найти интегралы:

а) $\int \mathrm{tg}^3(2x/5)\, dx$; б) $\int \mathrm{ctg}^4(x/a)\, dx$; в) $\int \mathrm{ctg}^7 x\, dx$.

№34. Применяя способы, изложенные в п. **5**, найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{7\sin^2 5x + \cos^2 5x}$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$;

в) $\int \frac{dx}{\sin 5x - \cos 5x}$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 1}$;

д) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^2 x - 3}\, dx$; е) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x - \sin x}$;

ж) $\int \frac{5 - \sin^2 x}{4 - \cos^2 x}\, dx$; з) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3} - 4\cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}}$;

и) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg} x + 3\mathrm{ctg} x}$; к) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg} x + 3\mathrm{ctg} x + 1}$.

VIII. Интегралы от некоторых иррациональных функций

Рассмотрим два типа таких интегралов.

1. Интегралы вида $\int R\left(\frac{ax+b}{cx+d}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right) dx$, где R – рациональная функция своих аргументов.

Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n, m, \ldots$, (k = н.о.к.($n, m, \ldots$)), приводит к интегралу от рациональной функции аргумента t.

ПРИМЕР 1.2.51. Найти $I = \int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}\right)\sqrt{x}}$.

Решение. Н.о.к.(3, 6, 2) = 6, следовательно, подстановка $x = t^6$, откуда $dx = 6\, t^5\, dt$, дает

$$I=\int\frac{6t^5dt}{\left(t^2+t\right)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t^2+t}=6\int\frac{tdt}{t+1}=6\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=6\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=6t-6\ln|t+1|+C.$$

Возвращаемся к исходной переменной $x=t^6\Rightarrow t=\sqrt[6]{x}$ и получаем:

$$I=6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.\ ■$$

ПРИМЕР 1.2.52. Найти $I=\int\frac{dx}{\left(2-\sqrt[6]{1-x}\right)\sqrt[4]{(1-x)^3}}$.

Решение. Здесь н.о.к.(6, 4) = 12, поэтому подстановка $1-x=t^{12}$ дает $x=1-t^{12}$, $dx=-12\,t^{11}\,dt$. Имеем:

$$I=-12\int\frac{t^{11}dt}{(2-t^2)t^9}=12\int\frac{t^2dt}{t^2-2}=12\int\frac{t^2-2+2}{t^2-2}dt=12\int\left(1+\frac{2}{t^2-2}\right)dt=$$

$$=12t+\frac{12\cdot 2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\left\|\begin{matrix}\text{обратная подстановка}\\ t=\sqrt[12]{1-x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=12\sqrt[12]{1-x}+6\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt[12]{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt[12]{1-x}+\sqrt{2}}\right|+C.\ ■$$

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx.$$

Подынтегральная функция содержит переменную x и корни вида $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$. Предлагаемые ниже тригонометрические подстановки обусловлены применением тождеств $1-\sin^2 t=\cos^2 t$, $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $1+\operatorname{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$ и позволяют освободить подынтегральную функцию от корней, т.е. привести ее к рациональному виду.

а) $\sqrt{x^2+a^2}$, подстановка $x = a\ \mathrm{tg}\ t$;

б) $\sqrt{x^2-a^2}$, подстановка $x = a / \cos t$;

в) $\sqrt{a^2-x^2}$, подстановка $x = a \sin t$.

ПРИМЕР 1.2.53. Найти $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}}$.

Решение. Подстановка $x = \sqrt{3}\sin t \Rightarrow dx = \sqrt{3}\cos t\, dt$ и $\sqrt{3-x^2} = \sqrt{3-3\sin^2 t} = \sqrt{3(1-\sin^2 t)} = \sqrt{3}\cos t$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{3}\cos t\, dt}{3\sin^2 t\cdot\sqrt{3}\cos t} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}\, t + C;$$

обратная подстановка $\sin t = x/\sqrt{3} \Rightarrow t = \arcsin(x/\sqrt{3})$:

$$I = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{x^2}-1}+C,$$

т.к. $\mathrm{ctg}\, t = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\arcsin(x/\sqrt{3})\right)}-1} = \sqrt{\frac{1}{(x/\sqrt{3})^2}-1} = \sqrt{\frac{3}{x^2}-1}$. ■

ПРИМЕР 1.2.54. Найти $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

Решение. Тригонометрическая подстановка $x = 2\mathrm{tg}\, t$, $dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt$ дает $\sqrt{(4+x^2)^3} = \sqrt{(4+4\mathrm{tg}^2 t)^3} = \left(\sqrt{4(1+\mathrm{tg}^2 t)}\right)^3 = \sqrt{4^3}\,\frac{1}{\cos^3 t} = \frac{8}{\cos^3 t}$. Тогда исходный интеграл принимает вид

$$I = \int\frac{4\mathrm{tg}^2 t}{8/\cos^3 t}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t} = \int \mathrm{tg}^2 t\cos t\, dt = \int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt =$$
$$= \int\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin t + C =$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\text{обратная подстановка:}\\ x=2\mathrm{tg}t,\quad t=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}\end{array}\right\|=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right)+C=$$

$$=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C,$$

т.к. $\sin t=\mathrm{tg}\,t\cdot\cos t=\dfrac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}}$, $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{x}{2}$ и, следовательно,

$$\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right)=\frac{x/2}{\sqrt{1+(x/2)^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 1.2.55. Найти $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-5}}$.

Решение. Тригонометрическая подстановка $x=\dfrac{\sqrt{5}}{\cos t}$ $\left(dx=\dfrac{\sqrt{5}\sin t}{\cos^2 t}\,dt\right)$ дает $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{\dfrac{5}{\cos^2 t}-5}=\sqrt{5\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}-1\right)}=\sqrt{5\cdot\mathrm{tg}^2 t}=\sqrt{5}\ \mathrm{tg}\,t$. Тогда

$$I=\int\frac{\cos^3 t}{(\sqrt{5})^3\sqrt{5}\mathrm{tg}\,t}\cdot\frac{\sqrt{5}\sin t\,dt}{\cos^2 t}=\frac{\sqrt{5}}{25}\int\frac{\cos t\cdot\sin t}{\mathrm{tg}\,t}\,dt=\frac{\sqrt{5}}{25}\int\cos^2 t\,dt.$$

Получившийся интеграл от тригонометрической функции относится к типу **2.2**; понижаем степень $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$ и получаем:

$$I=\frac{\sqrt{5}}{25\cdot 2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{\sqrt{5}}{50}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Выполняем обратную подстановку $x=\dfrac{\sqrt{5}}{\cos t}$, $\cos t=\dfrac{\sqrt{5}}{x}$, $t=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{x}$:

$$I=\frac{\sqrt{5}}{50}\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\frac{\sqrt{5}}{x}\right)\right)+C.$$

Т.к. $\sin\ 2t=2\sin t\cdot\cos t=2\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\cos t$, подставляя t, получим:

$$\sin 2t = 2\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{x}\right)}\cdot\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{x}\right) =$$

$$= 2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{x} = 2\frac{\sqrt{5x^2-25}}{x^2}.$$

Тогда

$$I = \frac{\sqrt{5}}{50}\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{5x^2-25}}{x^2}\right)+C = \frac{\sqrt{5}}{50}\arccos\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{1}{10}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}+C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№35. Найти интегралы:

а) $\int\frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[6]{x})^2}$; в) $\int\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}dx$; д) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}(1+\sqrt[3]{\ln x})}$ (*указание*: $\frac{dx}{x}=d\ln x$);

е) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; ж) $\int\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}dx$; з) $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+2}}dx$;

и) $\int\frac{e^{2x}+e^x}{\sqrt{(5-e^{2x})^3}}dx$ (*указание*: использовать равенство $e^x dx = de^x$);

к) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$; л) $\int\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3 dx$;

м) $\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}$ (*указание*: выделить полный квадрат в подкоренном выражении и сделать замену $x-1=t$).

Замечание 3. Изложенные методы интегрирования не всегда дают самое рациональное решение. Скажем, пример 1.2.53 может быть решен менее громоздко, если вынести x^2 из под корня, а затем внести под знак дифференциала функцию $1/x^3$:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2(3/x^2-1)}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{3\cdot x^{-2}-1}} =$$

$$= \frac{1}{-2}\int \frac{d(x^{-2})}{\sqrt{3\cdot x^{-2}-1}} = -\frac{1}{2\cdot 3}\int \frac{d(3\cdot x^{-2}-1)}{\sqrt{3\cdot x^{-2}-1}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3\cdot x^{-2}-1}+C.$$

Умение находить наиболее рациональные способы решения задач – это в некотором смысле мастерство, оно приходит только с опытом. Поэтому на первых порах достаточно знать основные типы интегралов, методы интегрирования и грамотно их применять, чтобы приходить к верному ответу.

Замечание 4. Рассмотренные методы интегрирования элементарных функций приводят к результатам, выражаемым также элементарными функциями. Однако не все такие интегралы выражаются элементарными функциями («неберущиеся»). Примеры таких интегралов:

$$\int e^{-x^2}dx; \ \int \frac{\sin x}{x}dx; \ \int \frac{\cos x}{x}dx; \ \int \sin(x^2)dx; \ \int \cos(x^2)dx; \ \int \frac{dx}{\ln x} \text{ и др.}$$

В них функции e^{-x^2}, $\sin x/x$ и т.д. являются неинтегрируемыми в конечном виде (но, тем не менее, для их интегрирования существуют методы, отличные от изложенных выше, например, разложение подынтегральных функций в степенные ряды и др.).

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Определенный интеграл, его свойства, формула Ньютона-Лейбница

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. ***Интегральной суммой*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i , \tag{1}$$

где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\dots,n)$;

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – точки произвольного деления отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$;

$\xi_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$ – точки, произвольно выбранные на каждом из элементарных отрезков.

Определение. ***Определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел при $n\to\infty$, $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ интегральной суммы (1), если он существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные, ни от выбора точек ξ_i на каждом из них. Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Определение. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a, b]$, если существует ее определенный интеграл на этом отрезке.

Отметим, что

1. Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является интегрируемой на нем.

2. Всякая кусочно-непрерывная и ограниченная на отрезке функция также интегрируема на этом отрезке.

В силу определения, определенный интеграл равен числу, в отличие от неопределенного интеграла, представляющего собой семейство функций.

Свойства определенного интеграла

Пусть функции $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt$.

2. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, где $c \in [a, b]$.

5. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right) dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$.

6. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx; \quad c = const$.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая ее первообразная ($F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$), то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Формула (2), называемая формулой Ньютона-Лейбница, имеет место и в случае, когда $f(x)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная на $[a, b]$ функция, если даже соотношение $F'(x) = f(x)$ выполняется только на интервалах непрерывности функции $f(x)$, а не в каждой точке отрезка $[a, b]$. При этом первообразная функция $F(x)$ должна быть непрерывна на $[a, b]$.

Замечание 1. Использование в качестве первообразной разрывной на интервале интегрирования функции может привести к неверному результату (см. примеры ниже).

Замена переменной в определенном интеграле

Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (3)$$

если выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;

2) функция $x = \varphi(t) \in [a, b]$ определена на отрезке $[t_1, t_2]$, и производная $\varphi'(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$.

Для новой переменной интегрирования t определяются новые пределы интегрирования t_1 и t_2 из уравнений $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$.

Полезные соотношения:

№1. Если функция $f(x)$ четна на отрезке $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

№2. Если функция $f(x)$ нечетна на отрезке $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

№3. Если функция $f(x)$ является периодической с периодом T, т.е. $f(x+T) = f(x)$, тогда

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,dx,\ n \text{ – целое.}$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = S,$$

где S – площадь между кривой $y = f(x)$ и осью Ox, ограниченная слева и справа вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно (рис.1).

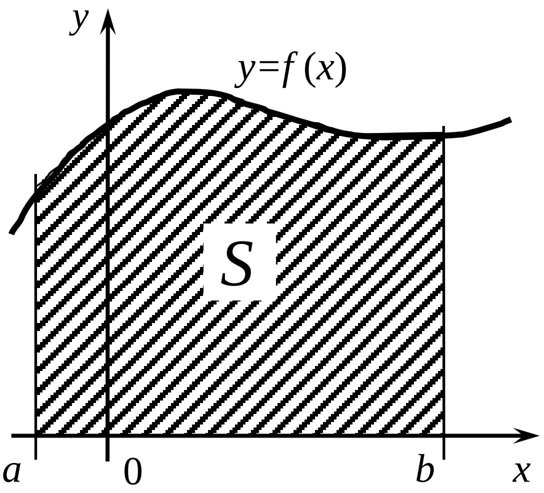


Рис. 1.

Важное замечание.

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$;

если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq 0$.

ПРИМЕР 2.1.1. Пользуясь определением, вычислить $\int\limits_0^1 x\,dx$.

Решение. Составим интегральную сумму для функции $y = x$ на отрезке $[0,\ 1]$. Разобьем отрезок $[0,\ 1]$ на n равных между собой элементарных отрезков (длина каждого из них равна $1/n$). Пусть каждая из точек ξ_i совпадает с правым концом соответствующего отрезка (это можно сделать, так как выбор точек ξ_i произволен). Тогда $f(\xi_i) = \xi_i = \dfrac{i}{n}$; $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$ и интегральная сумма примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2n}.$$

Здесь выражение $1 + 2 + 3 +\ldots+ n$ представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии S_n; первый член прогрессии $a_1 = 1$, разность $d = 1$ и тогда $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{1+n}{2} \cdot n$.

Следовательно, по определению $\int\limits_0^1 x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Можно показать, что при другом выборе точек ξ_i предел интегральной суммы будет тот же. (Проверьте, взяв, например, в качестве ξ_i середины элементарных отрезков). ■

ПРИМЕР 2.1.2. Вычислить $I = \int\limits_1^2 \dfrac{(x-1)^2}{x}\,dx$, используя формулу Ньютона-Лейбница.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[1,\ 2]$ (разрыв и неограниченное возрастание функции имеет место в точке $x = 0$, которая не принадлежит отрезку $[1, 2]$). Поэтому можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = \int_1^2 \frac{1-2x+x^2}{x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)dx = \left(\ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \ln 2 - 2\cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \ln 1 + 2\cdot 1 - \frac{1^2}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Замечание 2. В дальнейшем во избежание ошибок следует прежде, чем вычислять интеграл, проверить, не попадают ли точки разрыва второго рода подынтегральной функции на интервал интегрирования.

ПРИМЕР 2.1.3. Найти величину интеграла $I = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$, используя его геометрический смысл.

Решение. Линия $y = \sqrt{9-x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 9$ $(y \ge 0)$, а так как здесь $0 \le x \le 3$, то, в соответствии с геометрическим смыслом определенного интеграла, данный интеграл I представляет собой площадь четверти круга радиуса $R = 3$ с центром в начале координат, лежащая в первом квадранте (рис.2),

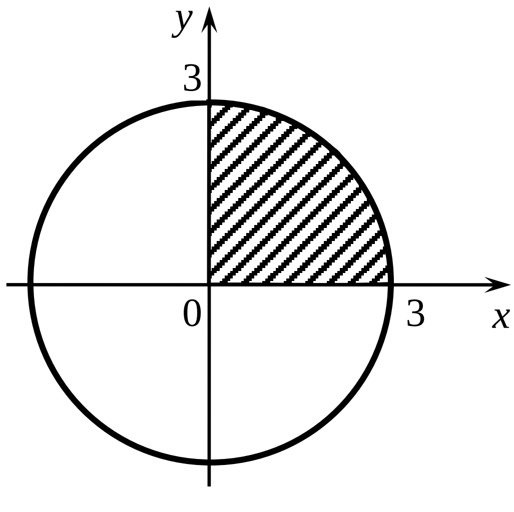


Рис. 2.

т.е. $I = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{9}{4}\pi$. $\blacksquare$

ПРИМЕР 2.1.4. Вычислить $I = \int_0^1 (x+1)^4\,dx$, используя формулу Ньютона-Лейбница.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Одна из ее первообразных на этом отрезке есть функция $F(x) = (x+1)^5/5$

(проверьте!), причем $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [0,1]$, поэтому применение формулы Ньютона-Лейбница оправдано:

$$I = \int_0^1 (x+1)^4\, dx = \left.\frac{(x+1)^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}\left((1+1)^5 - (0+1)^5\right) = \frac{1}{5}(32-1) = \frac{31}{5}. \blacksquare$$

Замечание 3. В соответствии с формулой Ньютона-Лейбница можно брать любую из первообразных. Ответ будет один и тот же. Например, здесь можно было взять в качестве первообразной функцию $\frac{(x+1)^5}{5}+1$ (убедитесь в том, что результатом будет то же число 31/5).

ПРИМЕР 2.1.5. Даны функции:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0, \\ e^{-x}, & 0 \le x \le 1; \end{cases}$ б)* $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1 \le x < 0, \\ 2-x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

Вычислить $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

Решение. а) Используем свойство 4 и формулу Ньютона-Лейбница на каждом из интервалов [–1, 0] и [0, 1]:

$$I = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_0^1 e^{-x}dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0} - \left.e^{-x}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{(0+1)^2}{2} - \frac{(-1+1)^2}{2} - (e^{-1} - e^0) = \frac{1}{2} - e^{-1} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}.$$

б) <u>Первый способ</u>. Данная функция не обладает свойством непрерывности, но является кусочно-непрерывной и ограниченной на интервале интегрирования, и, следовательно, интегрируема на нем. Для нее нетрудно найти первообразную, которая была бы непрерывна на всем промежутке [–1, 1]. Ею может являться, например, функция

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{2} & \text{при} \quad -1\le x\le 0,\\ 2x-x^2/2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Искомый интеграл может быть вычислен с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$I=F(1)-F(-1)=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}.$$

Второй способ. Можно воспользоваться свойством 4 и затем формулой Ньютона-Лейбница на каждом из интервалов непрерывности заданной подынтегральной функции. Тогда

$$I=\int_{-1}^{0}\cos\frac{\pi x}{2}dx+\int_{0}^{1}(2-x)dx=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_{-1}^{0}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=$$
$$=\frac{2}{\pi}(0-(-1))+2(1-0)-\frac{1-0}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{3}{2}.\ ■$$

ПРИМЕР 2.1.6. Найти ошибку при вычислении интеграла: $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Возьмем $F(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$, т.к. $F'(x)=f(x)$ при $x\neq\pm 1$, (проверьте!), то:

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-\operatorname{arctg}0\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

Решение. Ошибка заведомо имеет место, т.к. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$ при любых x (рис. 3). Поэтому интеграл I как площадь, ограниченная осью Ox и кривой, расположенной выше нее, не может быть отрицательным. Ошибка состоит в том, что функция $F(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$, изображенная на рис. 4, не является дифференцируемой в точке $x = 1$, входящей в интервал интегрирования, т.к. $F(x)$ имеет разрыв первого рода в этой точке:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2(1-0)}{1-(1-0)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{+0}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2(1+0)}{1-(1+0)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{-0}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{4}.$$

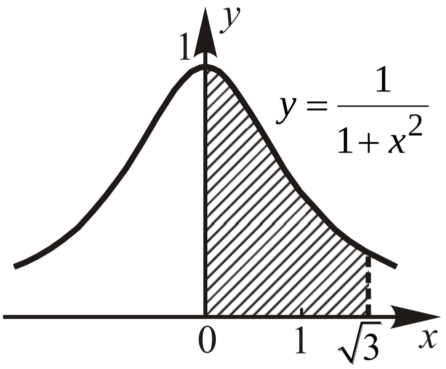


Рис. 3.

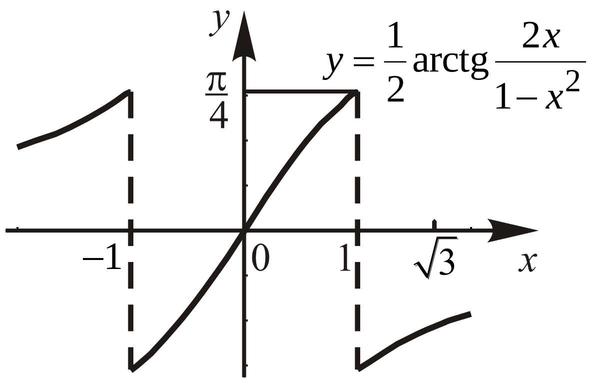


Рис. 4.

Поэтому применять формулу Ньютона-Лейбница нельзя.

Правильное решение:

Первый способ.

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{3},$$

здесь первообразная $\operatorname{arctg} x$ непрерывна на интервале интегрирования $[0,\sqrt{3}]$.

Второй способ. Если по каким-либо причинам возникает необходимость вычислять данный интеграл при помощи другой первообразной, ее следует подбирать так, чтобы она была непрерывной на всем интервале интегрирования. Такой первообразной может являться функция $F_1(x)$, построенная при помощи $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$:

$$F_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} & \text{при} \quad 0\le x<1,\\ \pi/4 & \text{при} \quad x=1,\\ \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad 1<x\le\sqrt{3}.\end{cases}$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$I=F_1(\sqrt{3})-F_1(0)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}\,. \ ■$$

ПРИМЕР 2.1.7. Вычислить $I=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$.

Решение. Т.к. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \pi/2\\ -\cos x, & \pi/2<x\le\pi\end{cases}$, то

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}-\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1-0-(0-1)=2.$$

NB! Если не обратить внимание на то, что $\cos x$ отрицателен на промежутке $(\pi/2,\pi\,]$, и положить $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}=\cos x$, то получим неверный результат:

$$I=\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=0-0=0.$$

Этого не может быть, т.к. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\ge 0$ при $0\le x\le\pi$ и, значит, $I>0$. ■

ПРИМЕР 2.1.8. Вычислить $I=\int\limits_{-11}^{11}\sin^{11}x\,(1+\cos 1{,}1x)\,dx$.

Решение. Т.к. функция $\sin^{11}x\,(1+\cos 1{,}1x)$ является нечетной (проверьте!) и интервал интегрирования симметричен относительно начала координат, то $I=0$ (см. Полезные соотношения, №2). ■

ПРИМЕР 2.1.9.* Вычислить $I = \int\limits_{-1}^{2} x|x|\,dx$.

Решение. Первый способ. На отрезке $[-1, 1]$ функция $x\,|x|$ является нечетной, поэтому $\int\limits_{-1}^{1} x|x|\,dx = 0$, кроме того, $x\,|x| = x^2$ для $x \in [1,2]$. Тогда, разбивая интервал интегрирования на два вышеуказанных интервала, получим:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} x|x|\,dx + \int\limits_{1}^{2} x^2 dx = 0 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Второй способ. Заметим, что можно было бы воспользоваться определением модуля и разбить интеграл следующим образом:

$$I = \int\limits_{-1}^{0} x(-x)\,dx + \int\limits_{0}^{2} x^2 dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{2} = 0 + \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} - 0 = \frac{7}{3}.$$

Третий способ. Можно использовать результат решения примера 1.1.1б):

$$I = \operatorname{sgn} x \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \operatorname{sgn} 2 \cdot \frac{8}{3} - \operatorname{sgn}(-1) \cdot \frac{-1}{3} = \frac{8}{3} - (-1)\cdot\frac{-1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.1.10. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Решение. Поскольку $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$ и функция $|\sin x|$ имеет период π, то, используя свойство 4 определенного интеграла и периодичность подынтегральной функции (Полезные соотношения, №3), будем иметь

$$I = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{100\pi} |\sin x|\,dx = \sqrt{2}\left(\int\limits_{0}^{\pi} |\sin x|\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx + \ldots + \int\limits_{99\pi}^{100\pi} |\sin x|\,dx\right) =$$

$$= 100\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 100\sqrt{2}\,(-\cos x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$-100\sqrt{2}(\cos\pi - \cos 0) = 200\sqrt{2}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.1.11. Вычислить $I = \int\limits_1^e \ln x dx$.

Решение. Применяя формулу интегрирования по частям (что правомерно, т.к. функции $u = \ln x$ и $v = x$ имеют производные $u' = \dfrac{1}{x}$ и $v' = 1$, непрерывные на отрезке $[1, e]$), получим

$$I = \int\limits_1^e \underset{u}{\ln x}\, \underset{dv}{dx} = x \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\, d\ln x = e\ln e - 1\cdot\ln 1 - \int\limits_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= e - 0 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.1.12. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx$ выполнить подстановку $x = 1/\cos t$?

Решение. Интервал интегрирования – отрезок $[0, 1]$, т.е. $0 \le x \le 1$, и тогда должно быть $0 \le 1/\cos t \le 1$, что неверно. Поэтому ответ отрицательный.

Правильной подстановкой является $x = \operatorname{tg} t$, т.к. $\operatorname{tg} t$ может принимать любые значения. ■

ПРИМЕР 2.1.13. Вычислить $I = \int\limits_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}dx$.

Решение. Заменим переменную интегрирования: $\sqrt{x} = t \ge 0$, тогда $x = t^2$ и $dx = 2t\,dt$. Замена переменной здесь обоснованна, поскольку: 1) функция $\sin\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0, \pi^2/4]$; 2) функция $x = t^2$ определена на отрезке $[0, \pi/2]$ и непрерывна на нем вместе со своей производной $x' = 2t$. Находим новые пределы интегрирования: при $x = 0$ $t = \sqrt{0} = 0$; при $x = \pi^2/4$ $t = \sqrt{\pi^2/4} = \pi/2$. Интеграл примет вид $I = 2\int\limits_0^{\pi/2} t\sin t\, dt$. Далее применим формулу интегрирования по частям:

$u = t, \quad du = dt;$

$dv = \sin t dt, \quad v = -\cos t;$

$$I = 2\left(-t\cos t \left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right. + \int_0^{\pi/2} \cos t dt\right) = 2(-t\cos t + \sin t) \left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right. =$$

$$= 2(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cos 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 2.$$

(Проверьте законность применения формулы интегрирования по частям!) ■

ПРИМЕР 2.1.14. Вычислить $I = \int\limits_0^{\sqrt{3/2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$.

Решение. Пусть $x = \sqrt{2}\sin t$, тогда $dx = \sqrt{2}\cos t dt$, выражение $\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3 = \left(\sqrt{2-2\sin^2 t}\right)^3 = \sqrt{2}^3 |\cos t|^3$. Находим новые пределы интегрирования:

при $x = 0$ $\quad 0 = \sqrt{2}\sin t \;\Rightarrow\; \sin t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0;$

при $x = \sqrt{3/2}$ $\quad \sqrt{3/2} = \sqrt{2}\sin t \;\Rightarrow\; \sin t = \sqrt{3}/2$ и $t = \pi/3$.

На отрезке $[0, \pi/3]$ функция $\cos t > 0$ и $|\cos t| = \cos t$. Следовательно,

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{2\sin^2 t \cdot \sqrt{2}\cos t\ dt}{\sqrt{2}^3 \cos^3 t} = \int_0^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 t\ dt = \int_0^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt =$$

$$= \left(\mathrm{tg}\ t - t\right)\Big|_0^{\pi/3} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}0 - \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

(Проверьте правомерность произведенной замены!) ■

ПРИМЕР 2.1.15. Вычислить $I = \int\limits_{-63}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x} + 2\sqrt[3]{1-x}}$.

Решение. Вводим новую переменную $1 - x = t^6$, находим $x = 1 - t^6$, $dx = -6t^5 dt$; новые пределы интегрирования для $t = \sqrt[6]{1-x}$: при $x = -63$ $t = \sqrt[6]{1-(-63)} = 2$, при $x = 0$ $\; t = \sqrt[6]{1-0} = 1$. Тогда интеграл примет вид:

$$I=\int_2^1\frac{-6t^5dt}{t^3+2t^2}=-6\int_2^1\frac{t^3}{t+2}dt=-6\int_2^1\frac{t^3+8-8}{t+2}dt=$$

$$=-6\int_2^1\left(\frac{t^3+8}{t+2}-\frac{8}{t+2}\right)dt=-6\int_2^1\left(\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t+2}-\frac{8}{t+2}\right)dt=$$

$$=-6\int_2^1\left(t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}\right)dt=-6\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t-8\ln(t+2)\right)\Bigg|_2^1=$$

$$=-6\left(\frac{1-8}{3}-(1-4)+4(1-2)-8(\ln 3-\ln 4)\right)=20+48\ln\frac{3}{4}.$$

Заметим, что подынтегральная функция непрерывна на отрезке [– 63, 0], функция $x=1-t^6$ определена на отрезке [1, 2], функция $x'=-6t^5$ непрерывна на этом отрезке. Значит, подстановка $x=1-t^6$ правомерна. ■

ПРИМЕР 2.1.16. Вычислить $I=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{2-\cos x}$.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ (обоснуйте!). Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Новые пределы интегрирования: при $x=\pi/3$ $t=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, при $x=\pi/2$ $t=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Имеем:

$$I=\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{dt}{2+2t^2-1+t^2}=2\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{dt}{3t^2+1}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{d(\sqrt{3}\,t)}{(\sqrt{3}t)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,t\right)\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.\ ■$$

Задачи для самостоятельного решения

№1. Исходя из определения, вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. Указание: разбить отрезок [0, 1] на n частей так, чтобы точки деления составляли геометрическую прогрессию $x_0 = 1$, $x_1 = q$, $x_2 = q^2, \ldots, x_n = q^n = 2$.

№2. Исходя из геометрического смысла, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^5 (4x-1)dx$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^3 x\, dx$; в) $\int\limits_{-5}^5 \sqrt{25-y^2}dy$.

№3. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; в) $\int\limits_0^2 |1-x|\, dx$;

г) $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$ д) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin^2 x \cos 4x\, dx$;

е) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{2} \sin^3 \frac{x}{2}\, dx$; ж) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$;

возможность применения формулы (2) обосновать.

№4. Найти ошибку, допущенную при вычислении интеграла:

$$\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int\limits_0^\pi \frac{1}{1+3\mathrm{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_0^\pi \frac{d(\sqrt{3}\mathrm{tg} x)}{1+3\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}(\sqrt{3}\mathrm{tg} x)\Big|_0^\pi = 0.$$

№5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{50\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx$.

№6. Вычислить интегралы, применяя формулу интегрирования по частям:

а) $\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x} dx$; г) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

Обосновать правомерность применения формулы.

№7. Рассмотрим интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}$. Применив подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, будем иметь $I=\int\limits_0^0\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-2\frac{1-t^2}{1+t^2}}=0$. Результат явно неверный, т.к. исходная подынтегральная функция положительна при любых x, и, следовательно, интеграл от нее не может быть равен нулю. В чем ошибка?

№8. Применяя подходящие подстановки, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^5\frac{dx}{x+\sqrt{3x+1}}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{1-\sin x}$; в) $\int\limits_0^2\frac{dx}{x+\sqrt{4-x^2}}$.

Обосновать правомерность выбираемых подстановок.

№9. Используя свойства четности и нечетности подынтегральной функции, вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_{-1{,}1\pi}^{1{,}1\pi}\sin^{15}\frac{x}{3}\cos^{20}\frac{x}{2}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}|x|\,dx$; в) $\int\limits_{-5}^{5}\frac{x\sin^2 x}{x^2+\operatorname{tg}^4 x}\,dx$.

№10. Доказать равенства:

а) $\int\limits_{-a}^{a}\cos x\ f(x^2)\,dx=2\int\limits_0^a\cos x\ f(x^2)\,dx$;

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\ dx=0$ (m, n – целые);

в) $\int\limits_{-1/2}^{1/2}e^{\cos x}dx=2\int\limits_0^{1/2}e^{\cos x}dx$.

2.2. Оценки определенного интеграла, теоремы о среднем

Одна из оценок определенного интеграла уже была сделана (Важное замечание в разделе «Геометрический смысл определенного интеграла»).

①.Если $f(x) \le g(x)$ при $a \le x \le b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx,$$

в частности,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

②. Если m – наименьшее, а M – наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

③. Теорема о среднем значении

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует ξ $(a < \xi < b)$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

④. Обобщенная теорема о среднем

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $g(x)$ сохраняет знак на этом отрезке, то существует ξ $(a < \xi < b)$ такое, что выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Определение. Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется ***средним значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

ПРИМЕР 2.2.1. Оценить интеграл $I = \int\limits_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$.

Решение. Заметим, что функция $f(x) = \sqrt{3+x^3}$ монотонно возрастает на отрезке $[1, 3]$. Ее наименьшее значение на этом отрезке $m = f(1) = \sqrt{3+1^3} = 2$, наибольшее значение $M = f(3) = \sqrt{3+3^3} = \sqrt{30}$; $b-a = 2$. Тогда получаем следующую оценку интеграла (оценка ②):

$$2 \cdot 2 \le \int\limits_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le \sqrt{30} \cdot 2, \quad \text{т.е.} \quad 4 \le \int\limits_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le 2\sqrt{30}. \ ■$$

ПРИМЕР 2.2.2. Установить, какой из двух интегралов больше:

$$I_1 = \int\limits_0^1 \sqrt[10]{x}\, dx \qquad \text{или} \qquad I_2 = \int\limits_0^1 x^{10}dx.$$

Решение. Замечая, что $\sqrt[10]{x} \ge x^{10}$ при $0 \le x \le 1$, и учитывая оценку ①, получаем $I_1 \ge I_2$. ■

ПРИМЕР 2.2.3. Оценить сверху интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

Решение. Функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$, функция $g(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ на этом отрезке, т.е. имеет постоянный знак. По обобщенной теореме о среднем (оценка ④) имеем:

$$I = \sin\xi \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin\xi \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \sin\xi(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{\pi}{4}\sin\xi;$$

$0 < \xi < 1$.

Т.к. на отрезке $[0, 1]$ функция $\sin x$ возрастает, то $\sin\xi < \sin 1$ и оценка интеграла сверху есть

$$I < \frac{\pi}{4}\sin 1 < 0{,}66.$$

Лучшая оценка получается так:

$$I = \frac{1}{1+\xi^2}\int_0^1 \sin x dx = \frac{1}{1+\xi^2}(-\cos x)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{1+\xi^2}(-\cos 1 + 1) < \frac{1-\cos 1}{1+0} = 1-\cos 1 < 0{,}46$$

(Функция $\frac{1}{1+x^2}$ также сохраняет знак на отрезке $[0, 1]$.) ■

ПРИМЕР 2.2.4. Оценить интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$, используя

а) теорему о среднем;

б) неравенство $\sqrt{1+x^4} < 1 + \frac{x^4}{2}$ (убедиться в том, что это неравенство верно, можно с помощью формулы Тейлора).

Решение. а) По теореме о среднем имеем $b - a = 1 - 0 = 1$; $f(\xi) = \sqrt{1+\xi^4}$; $0 < \xi < 1$. Тогда

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx = \sqrt{1+\xi^4}(1-0) = \sqrt{1+\xi^4}.$$

Т.к. $0 < \xi < 1$, то $1 < \sqrt{1+\xi^4} < \sqrt{2}$, следовательно, $1 < I < \sqrt{2}$.

б) Применяя данное неравенство и учитывая оценку ①, имеем

$$I \le \int_0^1 \left(1 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(x + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1.$$

Из а) следует, что $I > 1$, таким образом, имеем $1 < I < 1{,}1$, что дает более точную оценку в сравнении с предыдущей. ■

ПРИМЕР 2.2.5. Оценить интеграл $I = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение. Исследуем подынтегральную функцию на монотонность на отрезке $[\pi/4, \pi/3]$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x\,(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0,$$

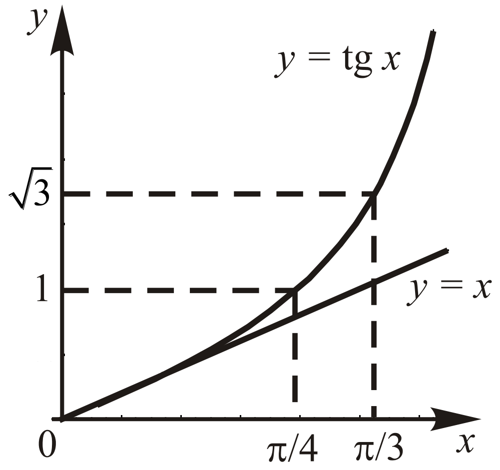


Рис. 5.

т.к. $\cos x > 0$, $x^2 > 0$, $x < \operatorname{tg} x$ при $\pi/4 \le x \le \pi/3$ (рис. 5), следовательно, функция $\sin x / x$ убывает на этом интервале. При этом ее наименьшее m и наибольшее M значения соответственно равны:

$$m = \frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, \qquad M = \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

С помощью оценки ② получаем:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \le I \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{т.е.} \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \le I \le \frac{\sqrt{2}}{6}. ■$$

ПРИМЕР 2.2.6. Оценить абсолютную величину интеграла $I = \int\limits_{10}^{19} \frac{\sin x}{1 + x^8} dx$.

Решение. При $x \ge 10$ (отрезок интегрирования $[10, 19]$) с учетом того, что $|\sin x| \le 1$ при любых x, имеем неравенство:

$$\left|\frac{\sin x}{1 + x^8}\right| \le \frac{1}{1 + x^8} < \frac{1}{x^8} < \frac{1}{10^8} = 10^{-8}.$$

Поэтому, пользуясь оценкой ①, получим

$$|I| = \left| \int_{10}^{19} \frac{\sin x}{1+x^8} dx \right| \le \int_{10}^{19} \left| \frac{\sin x}{1+x^8} \right| dx < \int_{10}^{19} 10^{-8} dx =$$

$$= 10^{-8} x \Big|_{10}^{19} = 9 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.2.7. Найти среднее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. По определению среднего значения функции на отрезке $[0, \pi]$ имеем:

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}. \ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№11. Оценить интегралы:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx; \qquad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}; \qquad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x} \, dx.$$

№12. Какой из интегралов больше: $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx$ или $I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$?

№13. Доказать неравенства: а) $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}$; б) $1 < \int\limits_0^1 e^{x^2} dx < e$.

№14. Оценить сверху интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{tg} x}{1+x^2} dx$.

№15. Определить средние значения функций в указанных промежутках:

а) $y = x^2$ на $[0, 1]$; б) $y = \sqrt{x}$ на $[0, 25]$; в) $y = \sin x \cdot \sin(x + \varphi)$ на $[0, 2\pi]$.

2.3. Несобственные интегралы

Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Изложенные выше методы нахождения таких интегралов обычно предусматривали выполнение двух требований:

1) пределы интегрирования a и b конечны;
2) подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Такие интегралы впредь будем называть ***собственными***. Если хотя бы одно из указанных условий не выполнено, интеграл называют ***несобственным***.

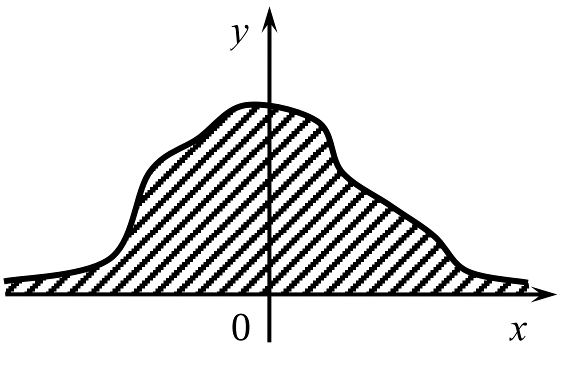
Различают несобственные интегралы двух типов:

а) пределы интегрирования (один или оба) бесконечны, при этом подынтегральная функция на интервале интегрирования нигде не обращается в бесконечность;

б) подынтегральная функция является разрывной в одной или нескольких точках интервала интегрирования, а пределы интегрирования конечны.

Заметим, что бывают несобственные интегралы, содержащие в себе обе указанные особенности.

С геометрической точки зрения несобственный интеграл (от неотрицательной функции), как и собственный интеграл, представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью Ox, (рис.6).



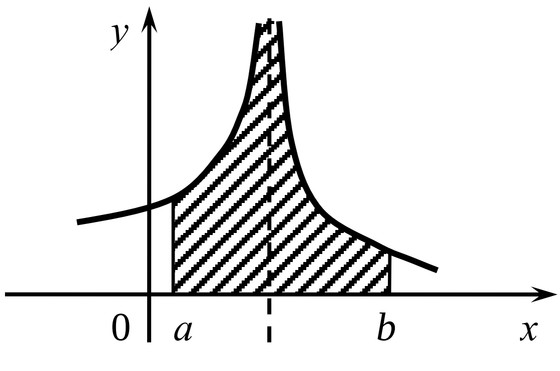


Рис. 6.

а) Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Определение. ***Несобственным интегралом*** от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ называется

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ определена при всех $x \ge a$ и интегрируема на любом отрезке $[a,\ b]$.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx, \qquad (4)$$

c – любая точка на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Отметим, что все интегралы, стоящие под знаком предела, являются собственными, и к ним применима формула Ньютона-Лейбница. Если приведенные пределы существуют и конечны, то интегралы называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися***.

Замечание 1. Если хотя бы один из интегралов, входящих в правую часть равенства (4), является расходящимся, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

Иногда найти первообразную затруднительно, тогда для выяснения вопроса о сходимости или расходимости несобственных интегралов используют некоторые признаки и соображения, приведенные ниже.

Утверждение 1. Практически очевидно, что интегралы $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a_2}^{+\infty} f(x)dx$ имеют одинаковое поведение, если на отрезке $[a_1, a_2]$ функция $f(x)$ не обращается в бесконечность. Отметим, что не требуется даже непрерывность функции на указанном промежутке: она может иметь конечные разрывы.

Обоснуйте Утверждение 1, используя геометрический смысл определенного интеграла.

Два признака сравнения

1º. Если $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ $(a \le x < +\infty)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и из расходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

2º. Если $f(x) \ge 0$, $\varphi(x) \ge 0$ – бесконечно малые при $x \to +\infty$ функции и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \ne 0$, (т.е. функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются функциями одного порядка малости при $x \to +\infty$), то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково (оба сходятся или оба расходятся).

Замечание 2. Для сравнения часто используют интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$ (см. ниже пример 2.3.1).

Пусть функция $f(x)$ имеет произвольный знак. Тогда справедлива

Теорема (об абсолютной сходимости)

Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***.

Если же интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***условно сходящимся***.

ПРИМЕР 2.3.1. Исследовать на сходимость интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Решение. Подынтегральная функция не обращается в бесконечность на любом отрезке $[1, b]$. Пусть $p > 1$, тогда по определению

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \text{при } b \to +\infty \ \text{ и } \ p-1>0, \\ \text{имеем } \ b^{p-1} \to +\infty \ \text{ и } \ \frac{1}{b^{p-1}} \to 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{p-1}.$$

Предел существует и конечен, следовательно, при $p > 1$ интеграл I сходится.

Замечание 3. Допустима и такая форма записи:

$$I = \int\limits_1^{+\infty} x^{-p}dx = \left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{1-p}.$$

Пусть теперь $p = 1$, тогда (на основании Замечания 3)

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty,$$

следовательно, при $p = 1$ интеграл I расходится. Отметим, что под не вполне корректной записью $\ln\infty$ подразумевался предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$.

Наконец, при $p < 1$

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty} = \left\| \begin{array}{l} \text{т.к. } 1-p>0, \text{ то } x^{1-p}\to+\infty \\ \text{при } x\to+\infty \end{array} \right\| = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty.$$

При $p < 1$ интеграл I расходится. ■

Замечание 4. Обратимся к геометрической интерпретации примера 2.3.1. На рис. 7 изображены графики подынтегральной функции для значений $p = 1$, $p < 1$ и $p > 1$ на интервале $[1; +\infty)$. При $p = 1$ графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ является обычная гипербола. При любом $p < 1$ график расположен выше нее, а при $p > 1$ – ниже. Во всех трех случаях фигура между графиком и осью Ox справа не ограничена.

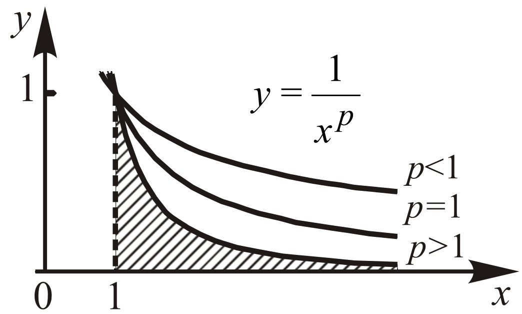


Рис. 7.

Как было показано в примере 2.3.1, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится и, следовательно, указанная площадь бесконечна. Понятно, что при $p < 1$ рассматриваемая площадь будет еще больше, что и согласуется с тем, что интеграл расходится. При $p > 1$ интеграл сходится, т.е. площадь становится конечной. Чем больше показатель степени p, тем быстрее функция стремится к нулю и тем меньше площадь фигуры под кривой.

ПРИМЕР 2.3.2. Вычислить $I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.

Решение. Подынтегральная функция не обращается в бесконечность на любом отрезке $[0, b]$. По определению:

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{2} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Данный интеграл сходится. ■

ПРИМЕР 2.3.3. Исследовать на сходимость $I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$.

Решение. Так как подынтегральная функция положительна на любом отрезке $[1, b]$ и нигде на нем не обращается в бесконечность, то интеграл I и интеграл $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ ведут себя одинаково (Утверждение 1).

Далее, при $x \ge 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{x^{5/3}}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$ сходится, т.к. $p = 5/3 > 1$ (пример 2.3.1). Следовательно, по признаку сравнения $\mathbf{1^o}$ интеграл I_1 тоже сходится, а вместе с ним, как было отмечено, сходится и исходный интеграл I.

ПРИМЕР 2.3.4. Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x/2} dx$; б) $I_2 = \int\limits_0^{+\infty} x\cos x\, dx$; в) $I_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1+\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}}\, dx$.

Решение. а) Подынтегральная функция положительна на любом отрезке $[a, b]$ и нигде на нем не обращается в бесконечность. Представим интеграл I_1 в виде суммы двух интегралов по формуле (4), полагая $c = 0$:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x/2}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x/2}dx.$$

Вычислим каждый из интегралов, стоящих в правой части этого равенства. Применим форму записи, приведенную в Замечании 3, и снова отметим, что записи $e^{+\infty}$ и $e^{-\infty}$ следует понимать как пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x/2}dx = -2e^{-x/2}\Big|_{-\infty}^{0} = -2\left(e^0 - e^{-(-\infty/2)}\right) = -2\left(1 - e^{+\infty}\right) = \infty,$$

следовательно, первый интеграл расходится.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x/2}dx = -2e^{-x/2}\Big|_{0}^{+\infty} = -2\left(e^{-\infty/2} - e^0\right) = -2\left(\frac{1}{e^{+\infty}} - 1\right) = 2,$$

т.к. $e^{+\infty} = +\infty$ и $\frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$, следовательно, второй интеграл сходится.

Интеграл I_1, представленный в виде суммы двух интегралов, расходится, т.к. один из интегралов-слагаемых расходится. Отметим, что второй из рассмотренных интегралов, согласно Замечанию 1, можно было и не исследовать после того как была установлена расходимость первого.

б) Применим к интегралу I_2 определение и формулу интегрирования по частям:

$$I_2 = \int\limits_{0}^{+\infty} \underset{u}{x} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \underset{u}{x}\, d\underset{v}{\sin x} = \lim_{b\to+\infty}\left(x\sin x\Big|_0^b - \int\limits_0^b \sin x\, dx \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(b\sin b - 0 + \cos x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(b\sin b + \cos b - 1\right).$$

Этот предел не существует, т.к. $\cos b$ при $b \to \infty$ не определен. Следовательно, интеграл I_2 расходится.

в) Так как найти первообразную для подынтегральной функции интеграла I_3 непросто, попробуем оценить порядок подынтегральной функции

$$f(x)=\frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Заметим, что при $x\to\infty$ функция $\arcsin\frac{1}{x}\to 0$, функция $1+\arcsin\frac{1}{x}\to 1$, функция $f(x)$ является бесконечно малой и ее можно заменить на эквивалентную:

$$\frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Обе эти функции положительны при $x\ge 2$ и не обращаются в бесконечность, следовательно, по признаку сравнения **2º** интегралы I_3 и $I_4=\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ имеют одинаковое поведение. Но интеграл I_4 сходится, т.к. имеет вид $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, где $p = 3/2 > 1$ (пример 2.3.1). Значит, сходится и интеграл I_3 .■

ПРИМЕР 2.3.5. Исследовать на сходимость интеграл $I=\int\limits_2^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$.

Решение. При $x\ge 2$ подынтегральная функция положительна $\left(0<\cos\frac{2}{x}<1\right)$, нигде не обращается в бесконечность и

$$1-\cos\frac{2}{x}=2\sin^2\frac{1}{x}\sim 2\cdot\frac{1}{x^2} \quad \text{при} \quad x\to\infty,$$

а так как $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то по признаку сравнения **2º** исследуемый интеграл I тоже сходится. ■

ПРИМЕР 2.3.6. Исследовать на сходимость $I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Подынтегральная функция меняет знак в зависимости от значения функции $\sin 2x$. Непосредственное вычисление интеграла затруднительно. Исследуем сходимость интеграла $I_1 = \int\limits_{1}^{+\infty} \left| \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}} \right| dx$.

При $x \ge 1$

$$\left| \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}} \right| = \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}} \le \frac{5}{x^3+\sqrt[3]{x}} < \frac{5}{x^3}$$

(была использована правая часть неравенства $-3 \le 1-4\sin 2x \le 5$).

Интеграл $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится ($p = 3 > 1$), тогда по признаку сравнения **2°** сходится и интеграл I_1, откуда следует сходимость интеграла I, причем, абсолютная (Теорема об абсолютной сходимости). ■

ПРИМЕР 2.3.7.* Доказать, что интеграл Дирихле $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция может иметь различные знаки в зависимости от знака функции $\sin x$. Представим интеграл в виде суммы:

$$I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx + \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, подынтегральную функцию можно доопределить при $x = 0$ значением 1. Тогда эта функция станет непрерывной, а первый из двух указанных интегралов – собственным. Ко второму интегралу, несобственному, применим определение и формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\int\limits_{\pi/2}^{b} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u} \underbrace{d(\cos x)}_{v} \right) =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{x}\cdot \cos x \Big|_{\pi/2}^{b} - \int\limits_{\pi/2}^{b} \cos x \, d\frac{1}{x} \right) = -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b}\cdot \cos b - 0 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{-\cos x}{x^2} dx = I_1.$$

Здесь использовано равенство $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{b}\cdot \cos b = 0$ (предел произведения бесконечно малой величины $\frac{1}{b}$ на ограниченную величину cos b).

Получившийся интеграл I_1 сходится и притом абсолютно, т.к.

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2},$$

а интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится ($p = 2 > 1$). Аналогично можно показать, что сходится и интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$.

Таким образом, получаем, что интеграл I сходится. Остается показать, что интеграл $I_2 = \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ расходится.

В самом деле: $\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$ и

$$I_3 = \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

где первый интеграл расходится ($p = 1$), а второй сходится (аналогичный ему был рассмотрен выше в этом примере). Следовательно, интеграл I_3 расходится, и интеграл I_2 тоже расходится по признаку сравнения **1º**.

Итак, получили, что интеграл I сходится, а интеграл I_2 расходится, значит, интеграл I сходится условно, что и требовалось. ■

Задачи для самостоятельного решения

№16. Вычислить или установить расходимость следующих несобственных интегралов:

а) $\int\limits_0^{\infty} 2^{1-x}\,dx$; б) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$; д) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\sqrt{x}+x^2+1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

№17. Показать, что интегралы $\int\limits_a^{+\infty} e^{-px}dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{b} e^{px}dx$ сходятся при любом $p > 0$ и расходятся при любом $p \le 0$.

№18. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$; б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x}$;

в) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/x)}{1+x\sqrt[4]{x}}\,dx$; г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}dx$;

д) $\int\limits_1^{\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ (*указание*: предварительно доказать и использовать неравенство $\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$);

е) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$ (*указание*: $\frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}$ при $x > \sqrt{e-1}$, объяснить, почему!)

№19. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} x \sin 2x \, dx$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (*указание*: использовать неравенство $e^{-x^2} \le e^{-x}$ при $x \ge 1$.)

б) Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть теперь в несобственном интеграле $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ пределы интегрирования конечны, а подынтегральная функция $f(x)$ не ограничена в некоторых точках интервала интегрирования. Этими точками могут быть как концы интервала, так и его внутренние точки.

Несобственный интеграл был определен как интеграл от разрывной функции, которая может быть как ограниченной так и неограниченной на интервале интегрирования. Но, если функция $f(x)$ ограничена в области $[a, b]$, то интеграл от нее всегда существует и конечен, т.е. сходится. Поэтому мы не останавливаемся на таких случаях и в дальнейшем будем предполагать, что функция не ограничена, что и отражено в заголовке этого подраздела.

Если функция $f(x)$ определена при $a \le x < b$, интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b-a$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, то по определению

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

аналогично, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

наконец, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty,\ c\in[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{c+\eta}^b f(x)dx, \qquad (5)$$

где ε и η не зависят друг от друга.

Если указанные пределы существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

Замечание 5. Если в правой части равенства (5) хотя бы один из интегралов-слагаемых является расходящимся, то и $\int\limits_a^b f(x)dx$ считается расходящимся.

Замечание 6. В некоторых случаях для исследования сходимости несобственного интеграла можно обойтись без вычисления указанных выше пределов, а именно:

если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, кроме конечного числа точек, и если существует <u>непрерывная</u> на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$, такая, что $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a,b]$, кроме конечного числа их, то действует формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Для исследования сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций можно использовать признаки сравнения и утверждения, аналогичные изложенным для несобственных интегралов с бесконечными пределами. Приведем их.

Утверждение 2. Несобственные интегралы $\int\limits_{a_1}^{b} f(x)dx$ и $\int\limits_{a_2}^{b} f(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся, если на отрезке $[a_1, a_2]$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема.

Два признака сравнения

1°. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, которые будем называть особыми, и пусть $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тогда $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le \int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$ и из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$; из расходимости $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$.

2°. Пусть бесконечно большие при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и интегрируемы на промежутке $(a, b]$. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ (т.е. функции одного порядка при $x \to a$), то несобственные интегралы $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково.

Замечание 7. Для сравнения часто используют несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} \dfrac{dx}{(x-a)^p}$, который сходится при $p < 1$ и расходится при $p \ge 1$ (см. пример 2.3.9 ниже).

Для функции $f(x)$, которая может иметь любой знак, может быть сформулирована следующая

Теорема (об абсолютной сходимости)

Если сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Он называется в этом случае ***абсолютно сходящимся***. Если же интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется ***условно сходящимся***.

ПРИМЕР 2.3.8. Пользуясь определением, вычислить несобственный интеграл $I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не ограничена в окрестности двух точек $x = 0$ и там, где $\ln x = 0$, т.е. $x = 1$, из которых первая нас не интересует, так как не принадлежит отрезку $[1, e]$. По определению

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$$

На отрезке $[1+\varepsilon, e]$ подынтегральная функция непрерывна, и, следовательно, является интегрируемой. Поэтому

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e} (\ln x)^{-1/3} d(\ln x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{2}(\ln x)^{2/3}\Big|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{2}\left((\ln e)^{2/3} - (\ln(1+\varepsilon))^{2/3}\right) = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2},$$

т.е. интеграл сходится. ■

Замечание 8. Так как подынтегральная функция в примере 2.3.8 непрерывна на отрезке $[1, e]$, кроме одной точки $x = 1$, а ее первообразная $F(x)=\frac{3}{2}(\ln x)^{2/3}$ непрерывна в любой точке отрезка $[1, e]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех x из отрезка $[1, e]$, то к данному несобственному интегралу можно применить непосредственно формулу Ньютона-Лейбница (Замечание 6):

$$I=\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\frac{3}{2}(\ln x)^{2/3}\Big|_1^e=\frac{3}{2}\left((\ln e)^{2/3}-(\ln 1)^{2/3}\right)=\frac{3}{2}(1-0)=\frac{3}{2}.$$

ПРИМЕР 2.3.9. Исследовать на сходимость интеграл $I=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(x-a)^p}$ не ограничена в окрестности точки $x = a$.

1) Пусть $p > 1$, тогда по определению

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b (x-a)^{-p}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b=$$

$$=\frac{1}{p-1}\left(-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(x-a)^{p-1}}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b\right)=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}-\frac{1}{(b-a)^{p-1}}\right)=$$

$$=\left\|\text{ т.к. } p-1>0,\text{ то } \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\to\infty \text{ при } \varepsilon\to+0\right\|=\infty.$$

Таким образом, интеграл I расходится при $p > 1$.

2) Пусть теперь $p = 1$, тогда

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|x-a|\Big\|_{a+\varepsilon}^b=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|b-a|-\ln|\varepsilon|\right)=\ln|b-a|+\infty=\infty,$$

следовательно, интеграл I расходится при $p = 1$.

3) Наконец, при $p < 1$ на основе выкладок, проделанных в 1), и условия $1 - p > 0$, имеем

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \left. \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \right|_{a+\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-p}\left((b-a)^{1-p} - \varepsilon^{1-p}\right) = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p},$$

т.к. при $1 - p > 0$, $\varepsilon \to 0$ величина $\varepsilon^{1-p} \to 0$. Таким образом, несобственный интеграл I сходится при $p < 1$. ■

Замечание 9. Результаты примера 2.3.9 сохранятся и для интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^p}$, в котором подынтегральная функция не ограничена на другом конце интервала интегрирования.

ПРИМЕР 2.3.10. Исходя из определения, вычислить следующие несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$; б) $I_2 = \int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$;

в) $I_3 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 - x^3}$; г) $I_4 = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left|1 - x^2\right|}}$.

Решение. а) Подынтегральная функция $\frac{1}{\cos x}$ не ограничена в точке $x = \pi / 2$, принадлежащей интервалу интегрирования. По определению

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ln 1\right) = \ln \infty = \infty,$$

следовательно, интеграл I_1 расходится.

б) Подынтегральная функция не ограничена в окрестностях точек, для которых $4x - x^2 - 3 = 0$, т.е. в окрестностях точек $x = 1$ и $x = 3$. Они обе принадлежат интервалу интегрирования. Представим заданный интеграл в виде суммы двух интегралов-слагаемых:

$$I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

Вместо точки $x = 2$ можно было взять любую другую внутреннюю точку отрезка [1, 3].

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое. По определению:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} (\underbrace{\arcsin 0}_{0} - \arcsin(1 + \varepsilon - 2)) = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(1 - \varepsilon) = \frac{\pi}{2};$$

аналогично

$$\int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(x-2)\Big|_2^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} (\arcsin(3 - \varepsilon - 2) - \underbrace{\arcsin 0}_{0}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(1 - \varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Оба интеграла-слагаемых сходятся. Поэтому несобственный интеграл I_2 сходится и равен $I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

в) Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 1$, принадлежащей отрезку [0, 1]. Разложим подынтегральную дробь на простые (см. интегрирование рациональных дробей в пункте 1.2):

$$\frac{1}{1 - x^3} = \frac{1}{(1-x)(1 + x + x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx + C}{1 + x + x^2} =$$

$$= \frac{A(1 + x + x^2) + (Bx + C)(1 - x)}{1 - x^3},$$

$$1 = A(1+x+x^2) + (Bx+C)(1-x)$$

при $x = 1$: $1 = 3A \quad \Rightarrow \quad A = 1/3,$

при x^2: $0 = A - B \quad \Rightarrow \quad B = 1/3,$

при x^0: $1 = A + C \quad \Rightarrow \quad C = 1 - 1/3 = 2/3.$

Следовательно, $\dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1/3}{1-x} + \dfrac{x/3+2/3}{1+x+x^2}$ и тогда

$$I_3 = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx.$$

Первый из интегралов является несобственным (подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 1$), второй же – собственный.

Займемся несобственным интегралом. По определению:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \ln|1-x|\Big|_0^{1-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon - \ln 1) = \infty,$$

следовательно, данный интеграл расходится. Независимо от поведения второго интеграла, интеграл I_3 тоже будет расходиться (Замечание 5).

г) Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точек, для которых $1 - x^2 = 0$, т.е. в окрестности точек $x = 1$ и $x = -1$; из них нас интересует только точка $x = 1$, принадлежащая отрезку $[0, 2]$. Она является внутренней точкой отрезка, поэтому интеграл разобьем на два:

$$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Каждое слагаемое будем вычислять отдельно.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ т.к. } |1-x^2| = 1-x^2 \text{ при } 0 \le x < 1.$$

Функция $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ непрерывна во всех точках отрезка $[0, 1]$, кроме $x = 1$. Функция $F(x) = \arcsin x$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех точек отрезка $[0, 1]$, кроме $x = 1$. Поэтому к данному несобственному интегралу можно непосредственно применить формулу Ньютона-Лейбница (Замечание 6):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

При $1 < x \le 2$ $\left|1-x^2\right| = x^2 - 1.$ На отрезке интегрирования подынтегральная функция непрерывна, кроме точки $x = 1$, первообразная $F(x) = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ непрерывна на отрезке $[1, 2]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех точек отрезка $[1, 2]$, кроме $x = 1$. Поэтому

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big|_1^2 = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Имеем $I_4 = \dfrac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$, т.е. интеграл I_4 сходится. ■

ПРИМЕР 2.3.11. Исследовать сходимость интеграла $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 0$ (внутренняя точка отрезка $[-1, 1]$). Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^{4/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{4/3}}.$$

Оба интеграла расходятся, т.к. $p = 4/3 > 1$ (пример 2.3.9 и Замечание 9), следовательно, расходится и несобственный интеграл I. ■

Замечание 10. Если бы мы, не обратив внимания на неограниченность подынтегральной функции в окрестности точки $x = 0$, применили формулу Ньютона-Лейбница, то получили бы неверный результат:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{4/3}} = \left. \frac{x^{-1/3}}{-1/3} \right|_{-1}^{1} = -3(1-(-1)) = -6.$$

Действительно, одно из условий возможности применения формулы Ньютона-Лейбница, указанных в Замечании 6, не выполнено: первообразная $F(x) = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ не является непрерывной в точке $x = 0$ – внутренней точке отрезка интегрирования.

ПРИМЕР 2.3.12. Исследовать сходимость интеграла $I = \int_{1}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\, dx$.

Решение. Точка разрыва подынтегральной функции $x = 1$. Оценим подынтегральную функцию на отрезке $[1, \pi / 2]$:

$$0 < \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}} \le \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Т.к. несобственный интеграл $\int_{1}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ сходится ($p = 1/2 < 1$, пример 2.3.9) по признаку сравнения **1º** (Утверждение 5), то сходится и исходый интеграл. ■

ПРИМЕР 2.3.13. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$; б) $I_2 = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}\, dx$; в) $I_3 = \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}\, dx$.

Решение. а) Находим точки, в окрестности которых подынтегральная функция не ограничена:

$1 - \cos x = 0$; $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Причем, на отрезок $[0,1]$ попадает только одна точка $x = 0$. Поскольку отыскать первообразную здесь нелегко, оценим подынтегральную функцию при $x \to +0$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{e^x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x} \text{ (т.к. } \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \text{ при } x \to 0).$$

Несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}dx}{x}$ расходится ($p = 1$, пример 2.3.9).

Следовательно, интеграл I_1 тоже расходится по признаку сравнения **2°**.

б) Подынтегральная функция не ограничена в окрестностях точек, где

$16 - x^4 = 0$; $\quad x = \pm 2$ (точку $x = -2$ не рассматриваем, т.к. она не принадлежит отрезку интегрирования $[0, 2]$).

Учитывая, что

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2}\,\sqrt[3]{2+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} \to \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{2-x}} \text{ при } x \to 2-0,$$

а интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ сходится ($p = 1/3 < 1$, пример 2.3.9), получим, что интеграл I_2 тоже сходится по признаку сравнения **2°**.

в) Как обычно, находим точки, в окрестностях которых подынтегральная функция не ограничена:

$e^{\sin x} - 1 = 0$; $\quad \sin x = 0$, откуда $\quad x = \pi k$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отрезку $[0, 2]$ принадлежит только одна из найденных точек ($x = 0$). Используя эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to +0$, имеем:

$$\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right) \sim x^{3/5} \text{ и } e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x.$$

Тогда получаем следующую оценку подынтегральной функции при $x \to +0$:

$$\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{x^{3/5}}{x} = \frac{1}{x^{2/5}}.$$

И т.к. несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^{2/5}}$ сходится (p =2/5 < 1), то интеграл I_3 тоже сходится по признаку сравнения **2º**. ■

ПРИМЕР 2.3.14. Исследовать сходимость интеграла $I = \int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Точка разрыва подынтегральной функции $x = 0$, а функция $\sin(1/x)$ может иметь разные знаки. Оценим модуль подынтегральной функции на отрезке [0, 1]:

$$0 < \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Т.к. несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (p = 1/2 < 1), то по признаку сравнения **1º** сходится и интеграл $\int\limits_0^1 \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx$, а исходный интеграл по определению сходится абсолютно. ■

ПРИМЕР 2.3.15.* Установить сходимость интеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ и вычислить его.

Решение. Подынтегральная функция не ограничена в точке $x = 0$. По определению $I = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. Интеграл, стоящий под знаком предела, находим методом интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} \underbrace{\ln\sin x}_{u}\, \underbrace{d\,x}_{v} = \left\| \begin{array}{l} u = \ln\sin x;\;\; du = \dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x\, dx = \dfrac{dx}{\operatorname{tg} x} \\ dv = dx;\quad v = x \end{array} \right\| =$$

$$= x\ln\sin x\Big|_{\varepsilon}^{\pi/2} - \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}dx = \frac{\pi}{2}\ln\sin\frac{\pi}{2} - \varepsilon\ln\sin\varepsilon - \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{tg} x}dx.$$

Первое слагаемое: $\dfrac{\pi}{2}\ln\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\ln 1 = 0$. Таким образом, получаем $I = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(-\varepsilon\ln\sin\varepsilon - \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2}\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}dx \right)$. Вычислим предел от первого из оставшихся слагаемых при помощи правила Лопиталя:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\sin\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\sin\varepsilon}{1/\varepsilon} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin\varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\dfrac{1}{\sin\varepsilon}\cdot\cos\varepsilon}{-(1/\varepsilon^2)} = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^2}{\sin\varepsilon}\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\cos\varepsilon =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \text{при } \varepsilon\to 0 \\ \sin\varepsilon\sim\varepsilon \end{array} \right\| = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}\cdot 1 = -\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon = 0.$$

Остается $I = -\int\limits_{0}^{\pi/2}\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}dx$. Этот интеграл сходится, т.к. подынтегральная функция непрерывна во всех точках интервала интегрирования за исключением двух точек ($x = 0,\; x = \pi/2$) и всюду ограничена:

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 0}{1} = 0.$$

Итак, доказано, что интеграл I является сходящимся.

Для вычисления интеграла сначала сделаем подстановку $x = 2t$, тогда $dx = 2\,dt$. Пределы интегрирования: при $x = 0$ будет $t = 0$, при $x = \pi/2$ будет $t = \pi/4$. Исходный интеграл примет вид

$$I = 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt = 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln(2\sin t\cos t)dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)dt =$$

$$= 2t\ln 2\Big|_0^{\pi/4} + 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt .$$

В последнем интеграле снова делаем подстановку $t = \dfrac{\pi}{2} - z$, $dt = -dz$, при $t = 0$ $z = \pi/2$, при $t = \pi/4$ $z = \pi/4$. Следовательно,

$$2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt = -2\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)dz =$$

$$= -2\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \ln\sin z\,dz = 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin z\,dz .$$

Таким образом, заменяя в последнем интеграле переменную z на t, имеем:

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\underbrace{\left(\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin t\,dt\right)}_{\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = I} = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$$

Получили уравнение $I = \dfrac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$, откуда $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. ■

ПРИМЕР 2.3.16. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $I_1 = \int\limits_3^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 2x}$; б) $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 2x}$; в) $I_3 = \int\limits_{-1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 2x}$.

Решение. а) Первый способ. Находим точки, в окрестностях которых подынтегральная функция не ограничена:

$$x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 2.$$

Интервалу интегрирования $[3, +\infty)$ ни одна из них не принадлежит. Поэтому особенность несобственного интеграла I_1 заключается в неограниченности интервала интегрирования. Сходимость этого интеграла можно исследовать как по определению, так и с помощью признаков сравнения. По определению:

$$I_1 = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{dx}{x^2-2x+1-1} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{dx}{(x-1)^2-1} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1-1}{x-1+1}\right|\Bigg|_3^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3,$$

т.е. интеграл I_1 сходится.

Второй способ. Можно оценить порядок подынтегральной функции:

$$\frac{1}{x^2-2x} \sim \frac{1}{x^2} \text{ при } x \to +\infty$$

и заключить, что несобственный интеграл I_1 сходится по признаку сравнения **2º**, т.к. сходится интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (p = 2, пример 2.3.1).

б) Одна из точек неограниченного изменения подынтегральной функции (x = 2) принадлежит интервалу интегрирования. В этом случае интеграл имеет особенность и в интервале интегрирования, и в самой функции. Он относится к смешанному типу несобственных интегралов. Для исследования сходимости таких интегралов их представляют в виде суммы необходимого количества интегралов так, чтобы каждый интеграл-слагаемое содержал только одну особенность. В данном примере можно сделать так:

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x}.$$

Третье слагаемое совпадает с интегралом I_1, исследованным в а). Поскольку было показано, что он сходится, ответ будет зависеть от поведения первых двух слагаемых. Каждый из них расходится по признаку сравнения **2º**. Покажем это для первого из них. Т.к. $\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{1}{(x-2)x}\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-2}$ при $x\to 2$, и интеграл $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x-2}$ расходится ($p=1$, пример 2.3.9), то интеграл $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x^2-2x}$ тоже расходится.

Таким образом, интеграл I_2 расходится.

в) В данном случае обе точки, в окрестностях которых подынтегральная функция не ограничена, попадают в интервал интегрирования. Учитывая результаты исследования сходимости интеграла I_2 и алгоритм, изложенный в б), разбиваем интеграл на сумму трех интегралов:

$$I_3=\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-2x}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-2x}+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x}.$$

Последний интеграл расходится (доказано в пункте б), поэтому, в соответствии с Замечанием 1, не исследуя первые слагаемые, можно сделать вывод: интеграл I_3 расходится.

Однако, можно исследовать сходимость каждого интеграла-слагаемого, не опираясь на результаты пунктов а) и б). При этом рациональнее было бы начать с первого из интегралов-слагаемых (или со второго) и показать, что он расходится. Тогда дальнейшее исследование не потребовалось бы. ■

Задачи для самостоятельного решения

№20. Исходя из определения, вычислить или установить расходимость следующих несобственных интегралов:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^5}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^3+\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{3x^2+5}{\sqrt[4]{x^3}}dx$;

г) $\int\limits_0^{3a} \frac{xdx}{\left(x^2-a^2\right)^{2/3}}$; д) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}$; е) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\, dx$;

ж) $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx$ (*указание*: использовать преобразование $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}$).

№21. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^4}}$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x}-\sin x}$ (*указание*: использовать эквивалентные бесконечно малые функции);

д) $\int\limits_0^2 \frac{\ln(\sqrt[4]{x}+1)}{e^{\operatorname{tg} x}-1}\, dx$; е) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ (*указание*: сделать замену $x=1+t$ или $x=e^t$ или преобразование $\ln x=\ln(1+x-1)$);

ж) $\int\limits_{1/2}^{6/5} \frac{\sin x}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}dx$.

№22. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{x+6}{(x^2-3x-4)^2}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{1-x^2}}$.

№24. Выяснить, при каких n сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n}dx$. (*Указание*: использовать эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to 0$ и характер поведения функции $\operatorname{arctg} x$ при $x\to+\infty$).

2.4. Геометрические приложения определенного интеграла

I. Вычисление площадей плоских фигур

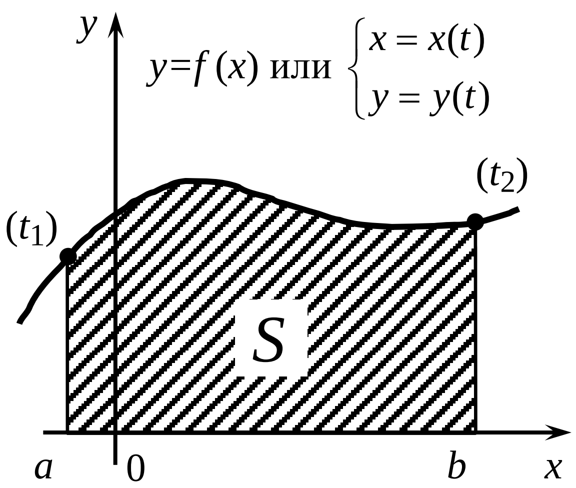


Рис. 8а.

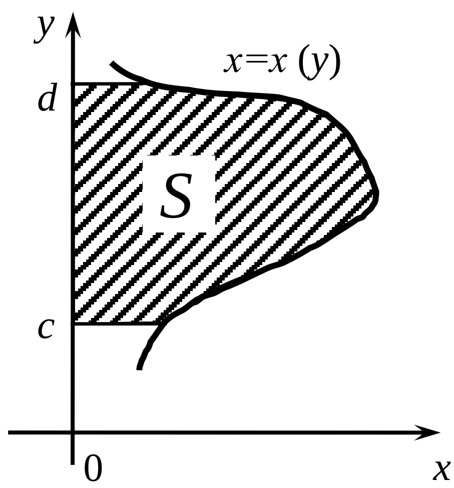


Рис. 8b.

1. Пусть $y = f(x)$ – уравнение непрерывной кривой, заданной в прямоугольных координатах, причем $f(x) \geq 0$. Тогда определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = S \qquad (6)$$

или, что то же самое,

$$\int_a^b y\,dx = S, \qquad (6)$$

где S – площадь фигуры, лежащей между кривой $y = f(x)$, осью Ox и ограниченной слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно (рис. 8а).

Иногда рациональнее поменять ролями переменные x и y, считая x функцией y. Тогда интеграл, выражающий площадь фигуры, лежащей между кривой $x = x(y)$, осью Oy и ограниченной снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ соответственно (рис. 8б), имеет вид:

$$S = \int_c^d x\,dy, \qquad (7)$$

Если плоская фигура (рис. 9) ограничена непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \le f_2(x))$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, то ее площадь выражается интегралом

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{8}$$

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ и $x'(t)$ непрерывны, $y(t) \ge 0$, $x'(t) \ge 0$, тогда площадь, изображенная на рис. 8а), выразится интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt; \tag{9}$$

пределы интегрирования t_1 и t_2 находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

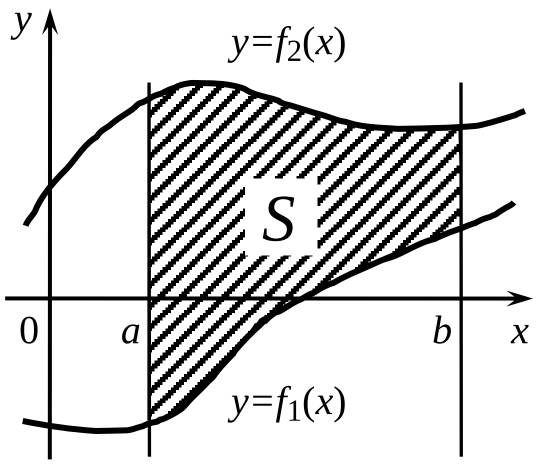


Рис. 9.

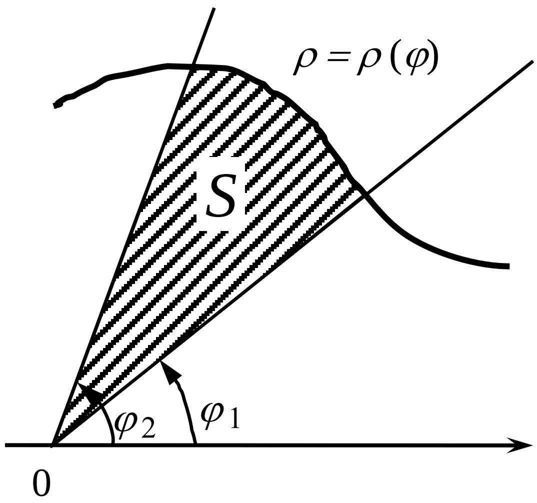


Рис. 10.

3. Если кривая задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь S (рис. 10), которую описывает радиус-вектор точки, движущейся по этой кривой от положения $\varphi = \varphi_1$ до положения $\varphi = \varphi_2$, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{10}$$

ПРИМЕР 2.4.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $\begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = 0, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \\ x \le 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \le x^2, \\ y = 2 - x, \\ y = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 - 2y + x = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = 2^x - 1, \\ (x-1)^2 = -y, \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = -2y^2, \\ x = 1 - 3y^2. \end{cases}$

Решение. а) Требуемая площадь изображена на рис. 11. Она лежит между кривой $y = e^{-x}$ и осью Ox, ограничена слева и справа прямыми $x = 1$ и $x = -1$ соответственно. По формуле (6) имеем:

$$S = \int_{-1}^{1} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = -e^{-1} + e\,.$$

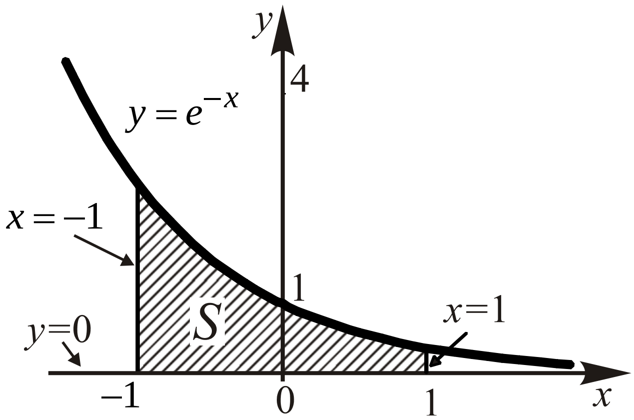


Рис. 11.

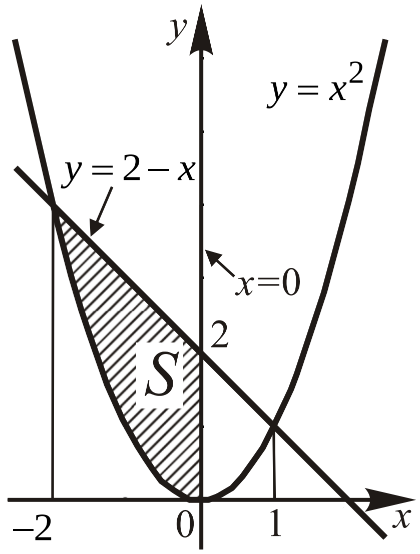


Рис. 12.

б) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, \quad x = 1.$$

Искомая площадь изображена на рис. 12. Т.к. при $-2 \le x \le 0$ будет $2 - x \ge x^2$, то можно применить формулу (8):

$$S = \int_{-2}^{0} (2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

в) Площадь изображена на рис. 13, она расположена частично под параболой $y = x^2$ и частично под прямой $y = 2 - x$, а снизу ограничена осью Ox ($y = 0$). Чтобы применить формулу (6), разобьем площадь на две части: одна из них (S_1) лежит между параболой $y = x^2$ и осью Ox при $0 \le x \le 1$, другая (S_2) – между прямой $y = 2 - x$ и осью Ox при $1 \le x \le 2$. Тогда

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3} - 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

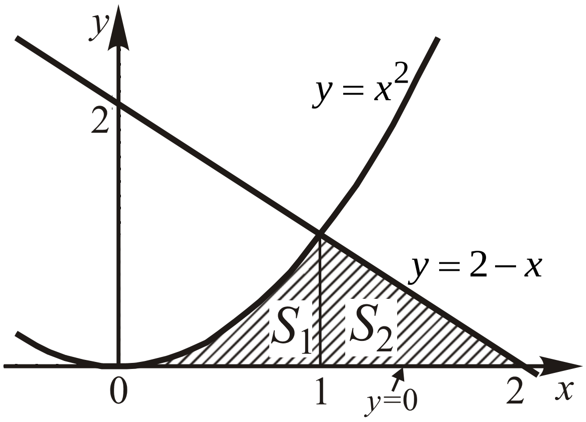


Рис. 13.

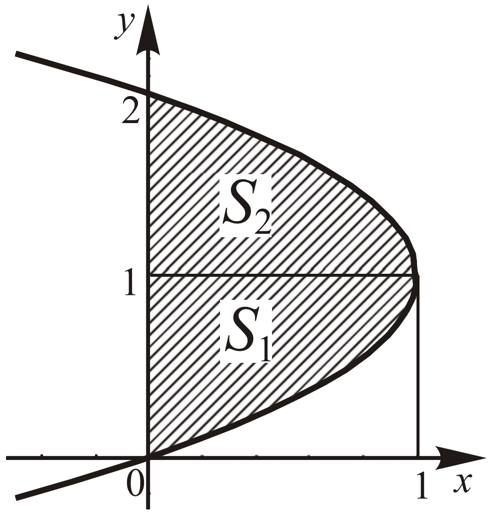


Рис. 14.

г) Преобразуем уравнение параболы, выделив полный квадрат для переменной y:

$$y^2 - 2y + 1 - 1 + x = 0$$

$$(y-1)^2=-(x-1) \text{ – парабола с вершиной в точке } (1,\ 1).$$

Точки пересечения с осью Oy (при $x = 0$): $(y-1)^2 = 1$, откуда $y = 2$ и $y = 0$. Фигура изображена на рис. 14. Она находится между параболой и осью Oy, для вычисления ее площади удобно применить формулу (7), полагая $x = x(y)$. Кроме того, в данном примере $S = S_1 + S_2 = 2S_1$, поскольку $S_1 = S_2$, и тогда, выражая x из уравнения параболы $x = 2y - y^2$, имеем:

$$S=2\int_0^1(2y-y^2)dy=2\left(y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2\left(1-0-\frac{1-0}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

д) Площадь фигуры представлена на рис. 15. Так как $2^x-1>-(x-1)^2$ при любых x, то по формуле (8)

$$S=\int_0^2\left((2^x-1)-(-(x-1)^2)\right)dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x+\frac{(x-1)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{4-2^0}{\ln 2}-(2-0)+\frac{1-(-1)^3}{3}=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

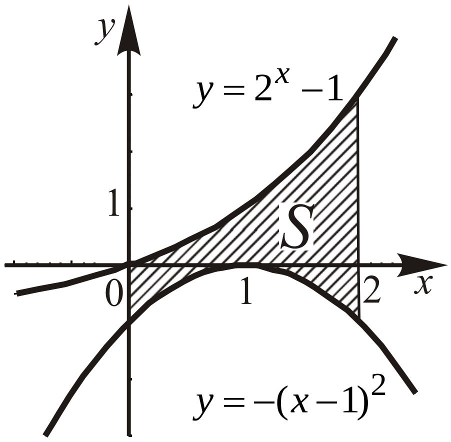


Рис. 15.

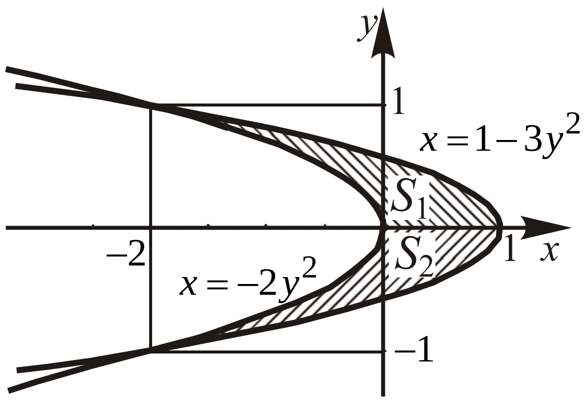


Рис. 16.

е) Решая систему уравнений, находим ординаты точек пересечения парабол (рис. 16)

$$\begin{cases} x = -2y^2, \\ x = 1-3y^2 \end{cases} \Rightarrow \ -2y^2 = 1-3y^2 \ \Rightarrow \ y^2 = 1 \ \Rightarrow \qquad\qquad y = \pm 1.$$

Полагая $x = x\,(y)$, применяем формулу (7), и учитывая, что в данном случае $S_1 = S_2$, получаем

$$S = 2\int_0^1 (1-3y^2+2y^2)dy = 2\int_0^1 (1-y^2)dy = 2\left(y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.2. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти внутри круга $x^2 + y^2 = 3a^2$ и ограниченной параболами $y^2 = 2a\,x$ и $x^2 = 2a\,y$ $(a > 0)$ (рис. 17).

Решение. Находим абсциссы точек пересечения парабол с окружностью:

$$\begin{cases} y^2 = 2ax, \\ x^2 + y^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \ x^2 + 2ax - 3a^2 = 0 \Rightarrow \ x_1 = a,\, x_2 = -3a$$

(второй корень нас не интересует);

$$\begin{cases} x^2 = 2ay, \\ x^2 + y^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \ y^2 + 2ay - 3a^2 = 0 \ \Rightarrow \ y_1 = a,\, y_2 = -3a$$

(второй корень нас не интересует). Подставляя первый корень в первое уравнение системы, получим $x^2 = 2a^2$, $x = \pm\sqrt{2}a$, $x = -\sqrt{2}a$ нам не нужен. По формуле (8), в которой

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2ax}, \quad 0 \le x \le a \\ \sqrt{3a^2 - x^2}, \, a \le x \le \sqrt{2}a, \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2a},$$

получим

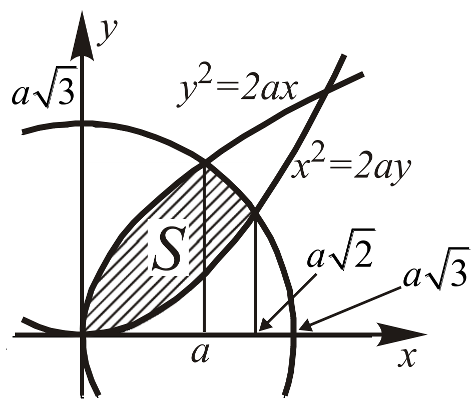


Рис. 17.

$$S=\int_0^a\sqrt{2ax}dx+\int_a^{a\sqrt2}\sqrt{3a^2-x^2}dx-\int_0^{a\sqrt2}\frac{x^2}{2a}dx=$$

$$=\sqrt{2a}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a+\left(\frac{x}{2}\sqrt{3a^2-x^2}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt3}\right)\Bigg|_a^{a\sqrt2}-\frac{1}{2a}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{a\sqrt2}$$

$$=\frac{2\sqrt2a^2}{3}+\frac{\sqrt2a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt2a^2}{2}-\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt3}-$$

$$-\frac{\sqrt2a^2}{3}=\frac{\sqrt2a^2}{3}+\frac{3a^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt3}\right).\blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.3. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=2\cos t$, $y=3\sin t$ (рис. 18).

Решение. Кривую можно построить, воспользовавшись таблицей (заполните ее до конца самостоятельно):

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	...	$7\pi/4$	2π
x	2	$\sqrt2$				
y	0	$\frac{3}{2}\sqrt2$				

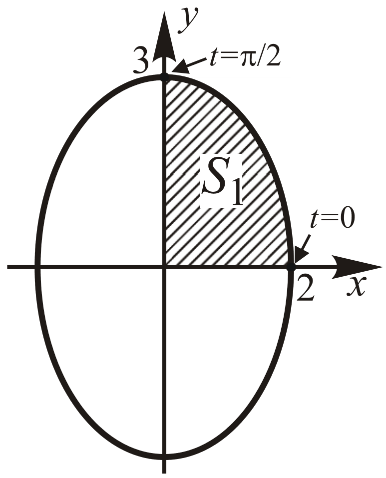


Рис. 18.

В силу симметрии относительно осей Ox и Oy вычислим площадь, расположенную в первом квадранте, и умножим ее на 4. Пределы интегрирования:

при $x=0$: $2\cos t=0 \quad \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$;

при $x=2$: $2\cos t=2 \quad \Rightarrow t=0$.

Итак, по формуле (9) получим:

$$S = 4S_1 = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} 3\sin t d 2\cos t = -24\int\limits_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= -24\int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -12\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = -12\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6\pi\,.\blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.4. Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Решение. Эта кривая изображена на рис. 19. Для его построения можно использовать таблицу (принцип выбора точек оставляем в стороне)

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	1	$\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	–3	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1
y	0	$\sqrt{2}-1$	2	$\sqrt{2}+1$	0	$-\sqrt{2}-1$	–2	$-\sqrt{2}+1$	0

Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox, искомая площадь $S = 2S_1$, где S_1 – площадь фигуры над осью Ox. Пределы интегрирования: точке $x = -3$ соответствует $t = \pi$; точке $x = 1$ соответствует $t = 0$. В результате по формуле (9) получим:

$$S = 2S_1 = 2\int\limits_{\pi}^{0} (2\sin t - \sin 2t)(-2\sin t + 2\sin 2t)dt =$$

$$= 2\int\limits_{\pi}^{0} (-4\sin^2 t + 4\sin 2t \sin t + 2\sin 2t \sin t - 2\sin^2 2t)dt =$$

$$= 2\int\limits_{\pi}^{0} (-4\frac{1-\cos 2t}{2} + 6\cdot\frac{1}{2}(\cos t - \cos 3t) - 2\frac{1-\cos 4t}{2})dt =$$

$$= 2\int\limits_{\pi}^{0} (-3 + 2\cos 2t + 3\cos t - 3\cos 3t + \cos 4t)dt =$$

$$= 2(-3t + \sin 2t + 3\sin t - \sin 3t + \frac{1}{4}\sin 4t)\Bigg|_{\pi}^{0} = -6t\Big|_{\pi}^{0} = 6\pi\,.\blacksquare$$

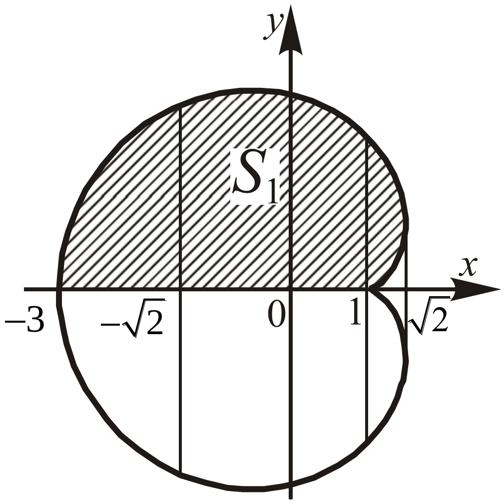


Рис. 19.

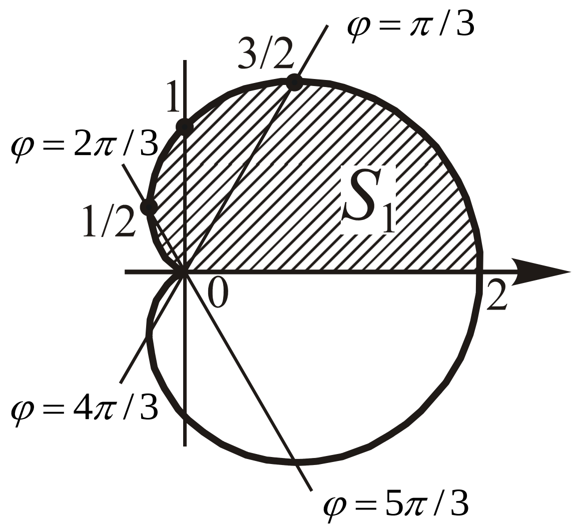


Рис. 20.

ПРИМЕР 2.4.5. Вычислить площадь, лежащую внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Решение. Для построения кривой в полярной системе координат составляем таблицу

φ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π
ρ	2	3/2	1	1/2	0	1/2	1	3/2	2

Результат построения кардиоиды изображен на рис. 20. Так как кардиоида симметрична относительно полярной оси, то ее площадь $S = 2S_1$, где S_1 – площадь, лежащая над полярной осью. Начальное положение радиуса-вектора, описывающего S_1, соответствует $\varphi_1 = 0$, конечное – $\varphi_2 = \pi$. По формуле (10):

$$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.6. Найти площадь, заключенную а) внутри первого витка (S_1 – правонаклонная штриховка на рис. 21); б) между первым и вторым витком (S_2 – левонаклонная штриховка на рис. 21) логарифмической спирали $\rho = e^{a\varphi}$.

Решение. График этой кривой изображен на рис. 21.

а) Используем формулу (10). Начальное положение радиуса-вектора $\varphi_1 = 0$, конечное $\varphi_2 = 2\pi$. Следовательно,

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{a\varphi})^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{2a\varphi} d\varphi = \frac{1}{4a} e^{2a\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4a}\left(e^{4a\pi} - 1\right).$$

б) Обратим внимание на тот факт, что если радиус-вектор начнет двигаться от положения $\varphi_2 = 2\pi$, до положения $\varphi_3 = 4\pi$, то он опишет площадь, выражаемую интегралом $S_3 = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} e^{2a\varphi} d\varphi$ и лежащую внутри второго витка, т.е. $S_1 + S_2$. Следовательно, искомая площадь есть

$$S_2 = S_3 - S_1 = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} e^{2a\varphi} d\varphi - \frac{1}{4a}\left(e^{4a\pi} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4a} e^{2a\varphi}\Big|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{1}{4a}\left(e^{4a\pi} - 1\right) = \frac{1}{4a}\left(e^{8a\pi} - 2e^{4a\pi} + 1\right) = \frac{(e^{4a\pi} - 1)^2}{4a}. \ \blacksquare$$

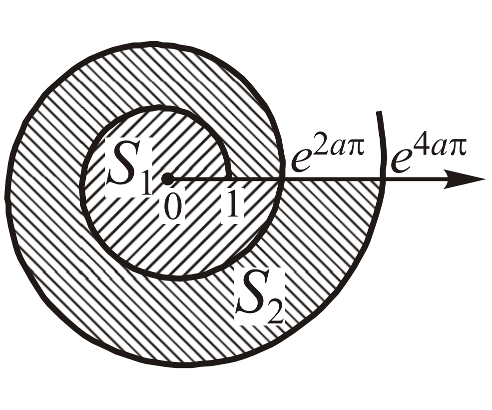


Рис. 21.

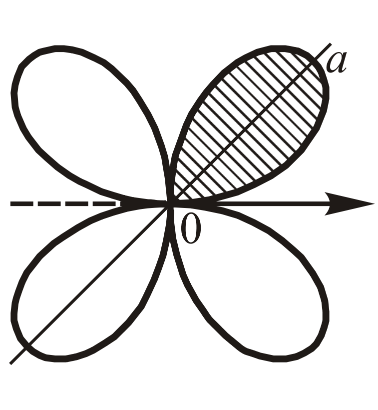


Рис. 22.

ПРИМЕР 2.4.7. Вычислить площадь, ограниченную замкнутой кривой

$$(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2.$$

Решение. Перейдем к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Уравнение кривой примет вид:

$$(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)^3=4a^2\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi;$$

$$(\rho^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1})^3=a^2\rho^4\sin^2 2\varphi;$$

$$\rho^2=a^2\sin^2 2\varphi;\quad \rho=0;$$

$$\rho=a\left|\sin 2\varphi\right|.$$

Из заданного уравнения кривой следует, что она симметрична относительно обеих осей координат, проходит через начало координат, образуя четыре лепестка, по одному в каждом квадранте (рис. 22). Проверьте построение по точкам! Таким образом, достаточно взять интеграл по формуле (10) с пределами интегрирования от 0 до π / 2 и результат умножить на 4:

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(a\sin 2\varphi)^2d\varphi=2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=a^2\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^2\pi}{2}.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№24. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $\begin{cases}y=\sin x,\\ y=\sin^2 x,\\ 0\le x\le\pi/2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y=x^3,\\ x+y=0,\\ y=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}y=\ln x,\\ x=\dfrac{1}{e},\\ y=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}y=-e^x,\\ y=e^{-x},\\ x=-1,\\ x=1;\end{cases}$

д) $\begin{cases} y = 4x^2, \\ y = \dfrac{x^2}{9}, \\ y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = y^2, \\ x = \dfrac{3}{4}y^2 + 1, \\ y \geq -1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ x = -\sqrt{y}, \\ y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$

№25. Найти площадь (кривые построить с помощью таблиц)

а) ограниченную одной аркой циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ и осью Ox;

б) ограниченную кривой $x = \cos^5 t,\ y = \sin^5 t$;

в) окружности $x = 12\cos t + 5\sin t,\ y = 5\cos t - 12\sin t.$

№26. Вычислить площадь:

а) кардиоиды $\rho = 1 - \cos \varphi$;

б) криволинейного треугольника, задаваемого условиями $\rho \geq 1$, $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi},\ \rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$;

в) области, задаваемой условиями (задачу решать в полярных координатах): $x^2 + y^2 - x \leq 0$ и $x^2 + y^2 - y \leq 0$;

г) ограниченную лепестком кривой $\rho = \sin 2\varphi$;

д) ограниченную замкнутой кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (перейти к полярным координатам).

II. *Вычисление объемов тел вращения*

Объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox и вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, осью абсцисс и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ (рис. 23a,b), выражаются соответственно формулами

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx, \tag{11}$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xy dx. \tag{12}$$

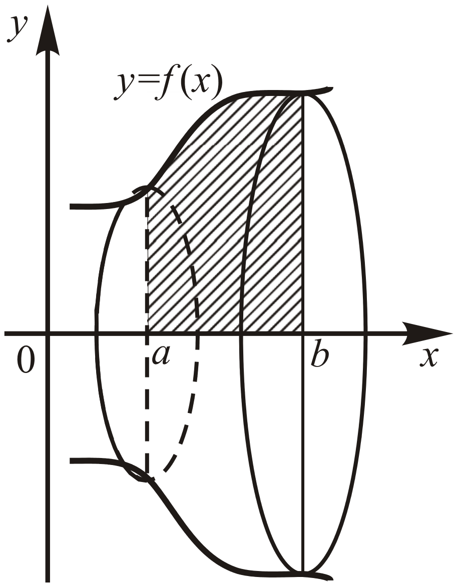


Рис. 23a.

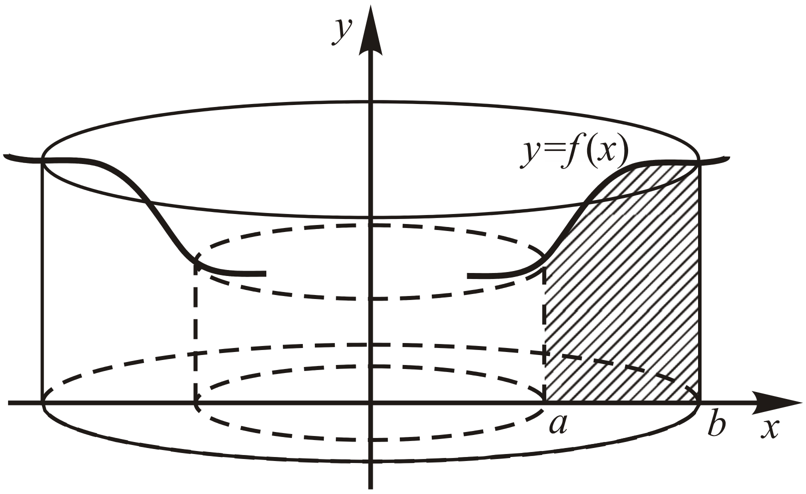


Рис. 23b.

Объемы тел, образованных вращением вокруг осей координат кривых $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $(0 \le y_1(x) \le y_2(x))$ и вертикалями $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, выражаются интегралами:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx, \tag{13}$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx. \tag{14}$$

Если кривая задана параметрически или в полярной системе координат, то в указанных интегралах надо сделать соответствующую замену переменных.

ПРИМЕР 2.4.8. Фигура, ограниченная линиями $y = \operatorname{tg} 2x$, $y = 0$, $x = \pi/6$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

Решение. Фигура, ограниченная заданными линиями, изображена на рис. 24. Искомый объем вычисляется по формуле (11):

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_0^{\pi/6} \mathrm{tg}^2 2x dx = \pi \int\limits_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1 \right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \mathrm{tg} 2x - x \right) \Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{2} \mathrm{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{6}. \blacksquare$$

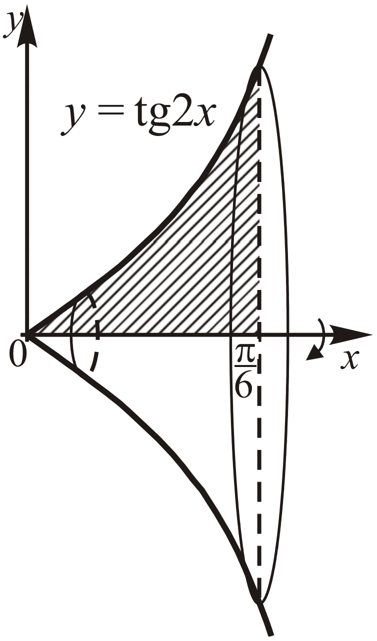


Рис. 24.

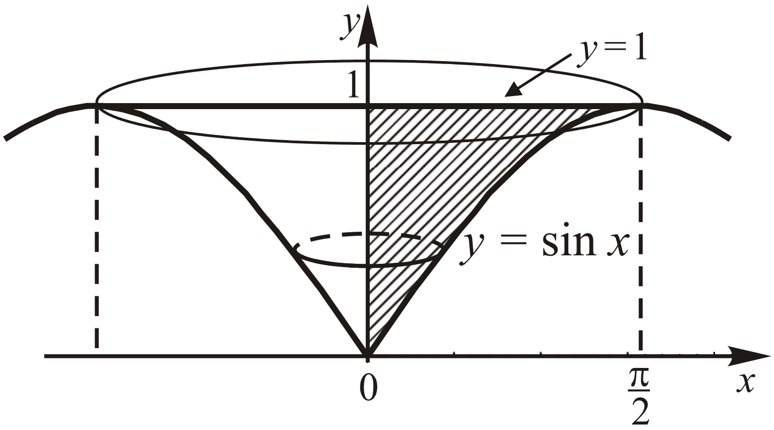


Рис. 25.

ПРИМЕР 2.4.9. Фигура, ограниченная дугой синусоиды $y = \sin x$, осью ординат и прямой $y = 1$, вращается вокруг оси Oy (рис. 25). Найти объем тела вращения.

Решение. Воспользуемся формулой (14). Искомый объем получается как разность двух объемов: цилиндра, образующегося при вращении отрезка прямой $y = 1$ при $0 \le x \le \pi/2$ вокруг оси Oy ($V_1 = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} x \cdot 1dx$) и куска синусоиды $y = \sin x$ при $0 \le x \le \pi/2$ вокруг той же оси ($V_2 = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} x \cdot \sin x dx$), т.е.

$$V_{Oy} = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} x \cdot 1dx - 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} x \cdot \sin x\, dx =$$

$$= 2\pi\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} x\, d\cos x\right) = 2\pi\left(\frac{\pi^2}{8} + x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, dx\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi^2}{8} - \sin x\,\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\pi\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right).$$

<u>Другой способ решения</u> основан на использовании формулы (11). Если в ней поменять ролями переменные x и y, она примет вид

$$V_{Oy} = \pi\int\limits_c^d x^2 dy\text{, где } x = x(y). \tag{15}$$

Тогда в нашем примере из уравнения $y = \sin x$ получим $x = \arcsin y$, $0 \le y \le 1$ и

$$V_{Oy} = \pi\int\limits_0^1 \arcsin^2 y\, dy.$$

Делаем подстановку $\arcsin y = t$, тогда $y = \sin t$, $dy = \cos t\, dt$. Пределы интегрирования: при $y = 0$ $t = \arcsin 0 = 0$, при $y = 1$ $t = \arcsin 1 = \pi/2$. Таким образом имеем:

$$V_{Oy} = \pi\int\limits_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt = \left\|\begin{matrix} u = t^2; & dv = \cos t dt \\ du = 2t dt; & v = \sin t \end{matrix}\right\| = \pi\left(t^2 \sin t\Big|_0^{\pi/2} -\right.$$

$$\left. -2\int\limits_0^{\pi/2} \underset{u}{t}\, \underbrace{\sin t dt}_{dv}\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} + 2\int\limits_0^{\pi/2} \underset{u}{t}\, d\underset{v}{\cos t}\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} + 2t\cos t\Big|_0^{\pi/2} -\right.$$

$$\left. -2\int\limits_0^{\pi/2} \cos t dt\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\sin t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right). \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 0{,}5\,x^2 + 1$ и прямой $3x - 4y + 6 = 0$ (рис. 26).

Решение. Находим абсциссы точек пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = 0{,}5x^2 + 1, \\ 3x - 4y + 6 = 0, \end{cases}$$

$$3x - 4(0{,}5x^2 + 1) + 6 = 0,$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0, \quad \begin{matrix} x_1 = -1/2, \\ x_2 = 2. \end{matrix}$$

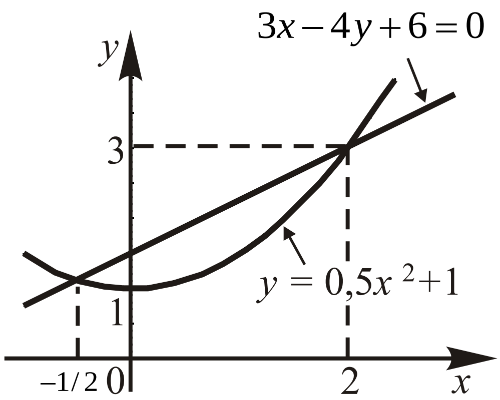


Рис. 26.

Так как $y_1 = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 \le \dfrac{3x+6}{4} = y_2$ при $-\dfrac{1}{2} \le x \le 2$, то по формуле (13) имеем:

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_{-1/2}^{2} \left(\left(\frac{3x+6}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right)^2 \right) dx =$$

$$= \pi \int\limits_{-1/2}^{2} \left(\frac{9}{16}(x+2)^2 - \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1 \right) \right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{3}{16}(x+2)^3 - \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - x \right) \Bigg|_{-1/2}^{2} = \frac{875}{192}\pi \,. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№27. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox и вокруг оси Oy фигуры, ограниченной

а) параболами $y = x^2$ и $8x = y^2$;

б) кубическими параболами $y = x^3$ и $x = y^3$ и прямой $x = 1/2$;

в) четырьмя линиями $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 0$, $x = 0$.

III. Вычисление длин дуг плоских кривых

Если кривая задана уравнением $y = y(x)$ и ее производная $y'(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой между точками A и B выражается интегралом

$$l_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{16}$$

где x_A и x_B – абсциссы точек A и B, $x_A < x_B$ (рис. 27).

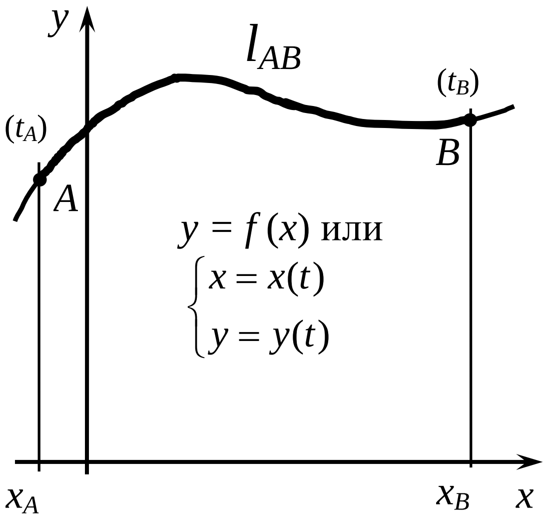


Рис. 27.

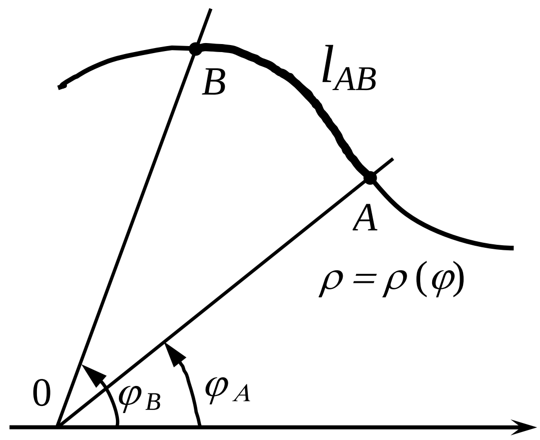


Рис. 28.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны, то длина дуги этой кривой между точками A и B выражается интегралом

$$l_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt, \tag{17}$$

где t_A и t_B – значения параметра, соответствующие точкам A и B, $t_A < t_B$ (т.е. по возрастанию параметра) (рис. 27).

Наконец, если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и функция ρ' непрерывна, то длина ее дуги между точками A и B выражается интегралом

$$l_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho^2 + \rho_{\varphi}'^2}\, d\varphi, \tag{18}$$

где φ_A и φ_B – значения полярного угла в точках A и B, $\varphi_A < \varphi_B$ (по возрастанию полярного угла) (рис. 28).

ПРИМЕР 2.4.11. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 4/3$ (рис. 29).

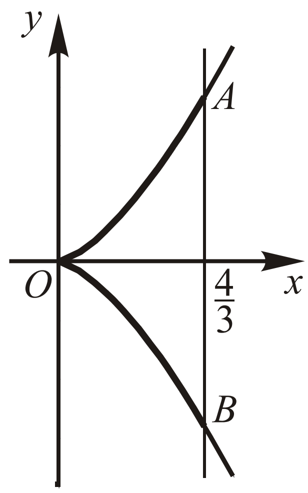


Рис. 29.

Решение. Из уравнения $y^2 = x^3$ находим $y = \pm x^{3/2}$, т.е. кривая симметрична относительно оси Ox и дуга состоит из двух кусков OA и OB одинаковой длины. Поэтому $l_{BOA} = l_{OA} + l_{OB} = 2l_{OA}$.

Находим производную $y' = (x^{3/2})' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$ (непрерывная функция).

Пользуясь формулой (16), вычисляем требуемую длину дуги:

$$l_{BOA} = 2\int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = 2 \cdot \frac{4}{9} \frac{\left(1 + 9x/4\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{4/3} = \frac{16}{27}(8-1) = \frac{112}{27}. \ ■$$

ПРИМЕР 2.4.12. Вычислить длину дуги кривой $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$, заключенной между точками с ординатами $y = 1$ и $y = 2$.

Решение. Здесь удобно за независимую переменную принять y, т.е. $x = x(y)$, тогда формула (16) примет вид:

$$l_{AB} = \int\limits_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + x_y'^2}\, dy.$$

Находим производную: $x_y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}$, тогда

$$\sqrt{1 + x_y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2} = \left|\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right| = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2y},$$

т.к. $y > 0$ (пределы интегрирования $y_A = 1$ и $y_B = 2$).

Окончательно имеем:

$$l_{AB} = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right) dy = \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\ln y\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - 0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.13. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

Решение. Будем применять формулу (17). Находим:

$$x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t,$$
$$y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

Тогда

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2} = \sqrt{a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = |at| = at,$$

т. к. $a > 0$, $t > 0$.

Искомая длина дуги l:

$$l = \int\limits_0^{2\pi} at\,dt = \frac{a}{2}t^2\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.14. Вычислить длину дуги астроиды $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$.

Решение. Астроида изображена на рис. 30. Постройте ее самостоятельно, продолжив заполнение таблицы:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	a	$a\left(\sqrt{2}/2\right)^3$	0						
y	0	$a\left(\sqrt{2}/2\right)^3$	a						

Фигура симметрична относительно осей Ox и Oy, поэтому вычислим длину дуги в первом квадранте ($0 \le t \le \pi/2$) и умножим ее на 4. Производные:

$$x'_t = -3a\cos^2 t\,\sin t,$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t\,\cos t.$$

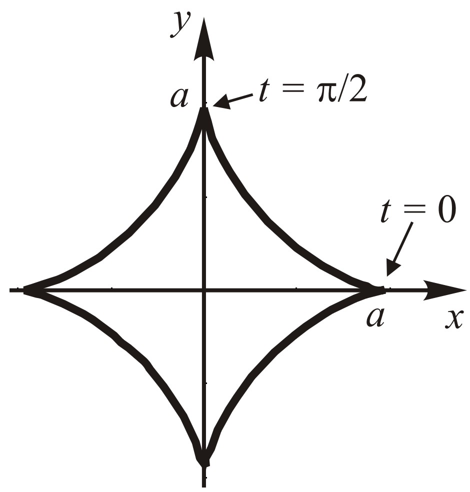


Рис. 30.

Далее $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} =$

$$= \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)} =$$

$$= 3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} =$$

$$= 3a\left|\sin t\cos t\right| = 3a\sin t\cos t$$

для $0 \le t \le \pi/2$.

Вычисляем длину дуги астроиды по формуле (17); пределы интегрирования $t_A = 0$, $t_B = \pi/2$:

$$l = 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt = 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\,d\sin t = 12a\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6a. \blacksquare$$

Замечание 12. Если бы мы не обратили внимания на указанную симметричность кривой (т.е. взяли бы пределами интегрирования числа 0 и 2π)

и при вычислении подынтегрального выражения забыли бы поставить модуль, то получили бы неверный результат:

$$l=\int_0^{2\pi} 3a\sin t\cos t\,dt=\frac{3}{2}a\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}=0.$$

Правильно было бы так:

$$\int_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\,dt=\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin t(-\cos t)dt+$$
$$+\int_{\pi}^{3\pi/2}(-\sin t)(-\cos t)\,dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}(-\sin t)\cos t\,dt.$$

ПРИМЕР 2.4.15. Найти длину дуги кривой $x=\frac{1}{6}t^6,\quad y=2-\frac{1}{4}t^4$ между ее точками пересечения с осями координат.

Решение. Найдем значения t, соответствующие требуемым точкам пересечения. С осью Ox: $y=0$, $2-\frac{1}{4}t^4=0$, $t^4=8$, $t=\pm\sqrt[4]{8}$. С осью Oy: $x=0$, $\frac{1}{6}t^6=0$, $t=0$.

Находим производные: $x'_t=t^5;\quad y'_t=-t^3$, тогда

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{t^{10}+t^6}=|t|^3\sqrt{t^4+1}.$$

Т.к. при $t=\sqrt[4]{8}$ и $t=-\sqrt[4]{8}$ на плоскости xOy получается одна и та же точка с абсциссой $x=\frac{1}{6}\left(\pm\sqrt[4]{8}\right)^6=\frac{1}{6}8^{\frac{3}{2}}=\frac{8\sqrt{8}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{8}$ и ординатой $y=0$, то возьмем $t=\sqrt[4]{8}$. Вычислим длину дуги:

$$l=\int_0^{\sqrt[4]{8}}|t|^3\sqrt{t^4+1}\,dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}}(t^4+1)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(t^4+1)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{13}{3}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.16. Найти длину второго витка спирали Архимеда $\rho = a\,\varphi$ ($a > 0$).

Решение. График этой кривой для $a = 1$ представлен на рис. 31. Проверьте правильность построения графика, дополнив нижеприведенную таблицу и учитывая, что $\pi \approx 3$.

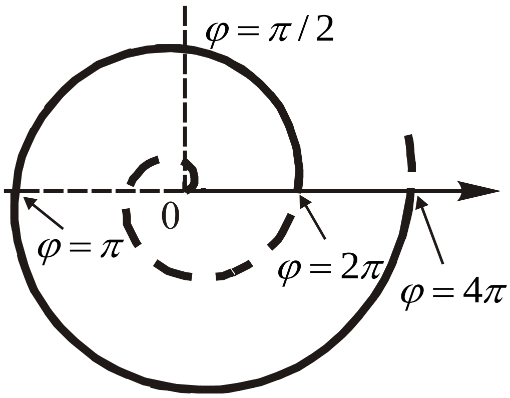


Рис. 31.

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	...	2π	...	4π
ρ	0	$a\,\pi/4$							

Второй виток начинается при $\varphi = 2\pi$ и заканчивается при $\varphi = 4\pi$; $\rho'_\varphi = a$. По формуле (18) имеем:

$$l = \int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi =$$

$$= a\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\varphi^2+1)\right)\Bigg|_{2\pi}^{4\pi} =$$

$$= a\left(2\pi\sqrt{16\pi^2+1} - \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{16\pi^2+1}{4\pi^2+1}\right). \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.17. Найти длину части кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$, лежащей вне окружности $\rho = 1$ (рис. 32).

Решение. Найдем полярные углы, при которых пересекаются кардиоида и окружность: $\begin{cases} \rho = 1 - \cos\varphi, \\ \rho = 1, \end{cases}$

$1 - \cos\varphi = 1$; $\cos\varphi = 0$;

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

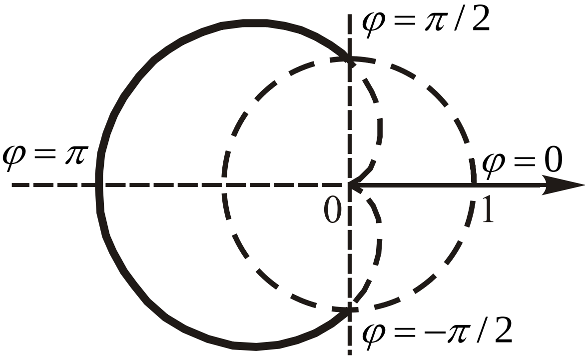


Рис. 32.

Кривая симметрична относительно полярной оси, поэтому вычисляем длину дуги для $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ и удваиваем результат. Имеем $\rho'_\varphi = \sin\varphi$;

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}} =$$

$$= \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = 2\sin\frac{\varphi}{2} \text{ при } \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$$

Искомая длина дуги:

$$l = 2\int_{\pi/2}^{\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.18.* Вычислить длину дуги кривой $\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ от $\rho = 2$ до $\rho = 4$.

Решение. В силу того, что кривая задана уравнением $\varphi = \varphi(\rho)$, естественно считать ρ независимой переменной. Выведем формулу для длины дуги в этом случае.

Дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi}\,d\varphi = \sqrt{\rho^2(d\varphi)^2 + (\rho'_\varphi\,d\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{\rho^2(d\varphi)^2 + (d\rho)^2} = \sqrt{\rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + 1}\;d\rho.$$

Длина дуги $$l = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{\rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + 1}\;d\rho.$$

Из уравнения $\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ находим производную $\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$. Тогда

$$dl = \sqrt{\rho^2 \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + 1}\; d\rho = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\rho^2 - 2 + \frac{1}{\rho^2} + 4\right)}\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2}\; d\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) d\rho .$$

Окончательно получим:

$$l = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) d\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\rho^2 + \ln\rho\right)\Bigg|_2^4 = \frac{1}{2}\left(8 + \ln 4 - 2 - \ln 2\right) = 3 + \frac{1}{2}\ln 2 . \ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№28. Найти длину дуги:

а) части кривой $y = \ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x = 0$ и $x = \pi/4$;

б) части кривой $y = 0{,}5x^2 - 1$, отсеченной осью Ox;

в) части кривой $y = \ln\dfrac{1}{\cos x}$, между точками $x = 0$ и $x = \pi/3$.

№29. Найти длину дуги:

а) одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$;

б) кривой (кардиоиды) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$

в) замкнутой кривой $x = 4\sqrt{2}\sin t, \quad y = \sin 2t$.

№30. Найти длину дуги:

а) части логарифмической спирали $\rho = e^{2\varphi}$, заключенной внутри окружности $\rho = e^{2\pi/3}$ $(\varphi \ge 0)$;

б) части гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$ от $\varphi_1 = 3/4$ до $\varphi_2 = 4/3$;

в) части кривой $\rho = a\sin^3(\varphi/3)$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

2.5.* Дополнительные сведения о несобственных интегралах

Этот параграф не является обязательным и предназначен для желающих более глубоко ознакомиться с исследованием несобственных интегралов. Определения и утверждения, приведенные в 2.3, будем считать известными.

Переформулируем признак сравнения **2º** в более компактной форме для интегралов с неограниченными интервалами интегрирования. В формулировке будет использован результат примера 2.3.1 и понятие «О-большое».

Напомним, что бесконечно малые (или бесконечно большие) функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются функциями ***одного порядка при x→a*** (записывается: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$, символ «O» читается как «О-большое»), если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A = const,\quad A \neq 0,\quad A \neq \infty$. При $A = 1$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***.

Утверждение 1. Практические признаки сравнения.

Если в интеграле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ функция $f(x)$ определена и интегрируема на любом конечном промежутке $a \le x \le b < +\infty$ и $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty$, то при $p > 1$ данный интеграл сходится, при $p \le 1$ – расходится.

Если в интеграле $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом промежутке $a + \varepsilon \le x \le b$ и $f(x) = O\left(\dfrac{1}{(x-a)^p}\right)$ при $x \to a + 0$, то при $p < 1$ данный интеграл сходится, при $p \ge 1$ – расходится.

ПРИМЕР 2.5.1. Исследовать на сходимость интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^m + x^n}$.

Решение. Рассмотрим сначала случай $m = n$. Интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^m}$ можно разбить на сумму двух интегралов: $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^m}$ и $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^m}$. Если $m \geq 1$ расходится интеграл I_1, если $m \leq 1$ – расходится интеграл I_2 по признакам сравнения (Утверждение 1), следовательно, исходный интеграл расходится при любом значении m.

Пусть теперь $m \neq n$. Поскольку они произвольны, будем считать $m > n$; тогда при $x \to +\infty$ $\frac{1}{x^m + x^n} = O\left(\frac{1}{x^m}\right)$, а при $x \to +0$ $\frac{1}{x^m + x^n} = O\left(\frac{1}{x^n}\right)$. В соответствии с признаками сравнения (Утверждение 1) интеграл будет сходиться, если $m > 1$ и $n < 1$.

Таким образом, получаем, что интеграл сходится, если $\min(m,n) < 1$, $\max(m,n) > 1$. ■

В некоторых случаях оказывается удобным

Признак Дирихле.

Рассматривается несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx. \tag{19}$$

Если:

1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)$ при $x \geq a$;

2) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geq a$;

3) функция $g(x)$ монотонно убывает при $x \geq a$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

тогда интеграл (19) сходится.

Довольно часто возникает необходимость исследовать на сходимость интегралы вида:

$$I_1=\int\limits_a^{+\infty} g(x)\sin kx\,dx; \qquad I_2=\int\limits_a^{+\infty} g(x)\cos kx\,dx.$$

Если $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонно стремится к нулю при $x\to+\infty$, то, поскольку первообразные от $\sin kx$ и $\cos kx$ ограничены при любом x, интегралы I_1 и I_2 сходятся по признаку Дирихле.

ПРИМЕР 2.5.2. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx,\quad p>0$.

Решение. Применим признак Дирихле. Функция $f(x)=\sin x$ имеет при любых x ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$. Функция $g(x)=\frac{1}{x^p}$ $(p>0)$ непрерывна вместе со своей производной, монотонно убывает и стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Все условия признака Дирихле выполнены, следовательно, интеграл сходится. ■

ПРИМЕР 2.5.3. Исследовать на сходимость интеграл Френеля $I=\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$.

Решение. Сделаем замену переменной в интеграле: $x^2=t$; $dx=dt/2\sqrt{t}$ $(0\le x<+\infty)$. Получим интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$, сходимость которого доказана в примере 2.5.2 (p = 1/2). Следовательно, интеграл Френеля сходится. ■

Замечание 1. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то стремление подынтегральной функции к нулю при $x\to+\infty$ не является обязательным. Иллюстрацией этого факта является рассмотренный в примере 2.5.3 интеграл Френеля. Он сам сходится, а функция $y=\sin x^2$ не имеет предельного значения при $x\to+\infty$.

Обсудим подробно вопрос

О сходимости интеграла вида $I_* = \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^p}$, $(a \le c \le b)$

Понятно, что признак сравнения легко дает ответ на поставленный вопрос. (Для этого интеграл разбивается на сумму двух интегралов: $I_1 = \int\limits_a^c \frac{dx}{(x-c)^p}$ и $I_2 = \int\limits_c^b \frac{dx}{(x-c)^p}$; каждый из них при $p<1$ сходится, при $p \ge 1$ – расходится).

Далее будет показано, что площадь, ограниченная графиком подынтегральной функции, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс, конечна при $p<1$, бесконечна при $p\ge 1$ и имеет некоторую особенность при нечетных p, которая объясняет необходимость и удобство введения понятия главного значения несобственного интеграла в смысле Коши, о котором будет сказано ниже.

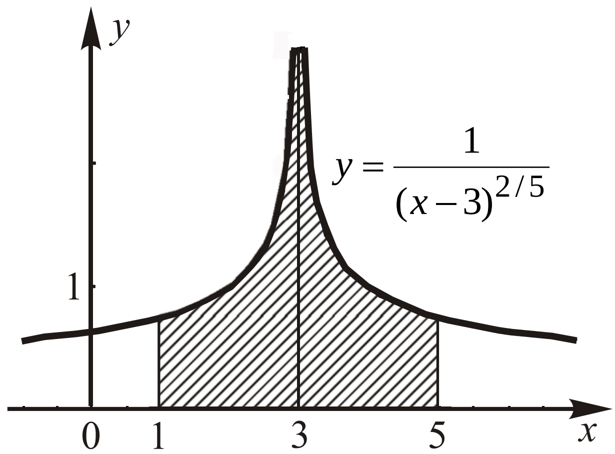


Рис. 33.

На рис. 33 приведена геометрическая иллюстрация интеграла $\int\limits_1^5 \frac{dx}{(x-3)^{2/5}}$. Точка неограниченного возрастания подынтегральной функции

$c = 3$ принадлежит интервалу интегрирования $[1, 5]$; $p = 2/5 < 1$, значит, интеграл сходится, т.е. фигура ограниченная графиком функции $(x-3)^{-2/5}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 5$, имеет конечную площадь. Заметим, что первообразная рассматриваемой подынтегральной функции имеет вид $\frac{5}{3}(x-3)^{3/5}$ и является функцией непрерывной на всем интервале интегрирования (и вообще, при любых x). Поэтому можно применить формулу Ньютона-Лейбница и найти указанную площадь:

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-3)^{2/5}} = \frac{5}{3}(x-3)^{3/5}\Big|_1^5 = \frac{5}{3}\cdot 2\cdot 2^{3/5} = \frac{10}{3}\cdot 2^{3/5}.$$

Для функций вида $\frac{1}{(x-c)^p}$, где $p \geq 1$, формула Ньютона-Лейбница неприменима, когда точка c лежит внутри интервала интегрирования, т.к их первообразные неограниченно возрастают при $x \to c$. Интегралы от таких функций расходятся, фигура между графиком функции и осью Ox конечной площади не имеет.

Теперь посмотрим, что получится, если взять нечетное $p \geq 1$, например, $p = 1$. График функции $\frac{1}{x-3}$ показан на рис. 34. Как уже упоминалось, несобственный интеграл от такой функции, вычисляемый по отрезку, содержащему точку разрыва второго рода, расходится. Но, если посмотреть на фигуру, ограниченную графиком функции, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = 5$, то видно, что она состоит из двух одинаковых симметричных частей, площади которых равны и выражаются интегралами: $-\int_1^3 \frac{dx}{x-3}$, $\int_3^5 \frac{dx}{x-3}$. Поэтому

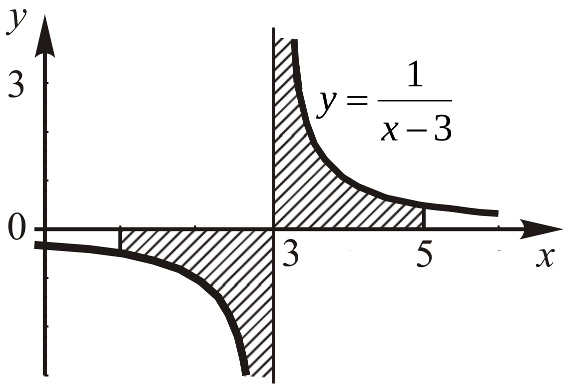


Рис. 34.

получается $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x-3} = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x-3} + \int\limits_3^5 \frac{dx}{x-3} = 0$, что противоречит расходимости рассматриваемого интеграла. Если даже взять интервал интегрирования, не симметричный относительно точки разрыва функции но содержащий ее, то две части фигуры будут иметь площади отличающиеся друг от друга на конечную величину. Сумма интегралов, хоть и не будет равняться нулю, все равно останется конечной.

Объяснение выявленного противоречия может быть найдено в определении несобственного интеграла. Проведем исследование сходимости интеграла $I_* = \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$ по определению (формула (5) параграфа 2.3).

$$I_* = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \lim_{\eta \to +0} \int\limits_{c+\eta}^{b} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln|x-c| \, \Big|_a^{c-\varepsilon} +$$

$$+ \lim_{\eta \to +0} \ln|x-c| \, \Big|_{c+\eta}^{b} = \lim_{\varepsilon \to +0} \big(\ln|-\varepsilon| - \ln|a-c|\big) +$$

$$+ \lim_{\eta \to +0} \big(\ln|b-c| - \ln|\eta|\big) = -\infty - \ln|a-c| + \ln|b-c| + \infty;$$

в последнем выражении содержится неопределенность вида $\infty - \infty$. Для того чтобы ее раскрыть, нужны сведения о том, как именно стремятся к нулю ε и η. А их в определении несобственного интеграла не заложено. Подчеркивается лишь то, что они ведут себя независимо друг от друга. Именно поэтому получается, что интеграл I_* расходится при $p = 1$.

Аналогичная неопределенность имеется и при $p > 1$:

$$I_* = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} (x-c)^{-p} dx + \lim_{\eta \to +0} \int\limits_{c+\eta}^{b} (x-c)^{-p} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(x-c)^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\eta \to +0} \frac{(x-c)^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_{c+\eta}^{b} =$$

$$=\frac{1}{p-1}\left(-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(x-c)^{p-1}}\Bigg|_a^{c-\varepsilon}-\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{(x-c)^{p-1}}\Bigg|_{c+\eta}^{b}\right)=$$

$$=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(a-c)^{p-1}}-\frac{1}{(-\varepsilon)^{p-1}}-\frac{1}{(b-c)^{p-1}}+\frac{1}{\eta^{p-1}}\right).$$

Т.к. $\varepsilon\to+0$ и $\eta\to+0$, то при нечетном $p>1$ показатели степени $p-1>0$ и четные, следовательно, $\frac{1}{(-\varepsilon)^{p-1}}\to+\infty$, $\frac{1}{\eta^{p-1}}\to+\infty$; имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Заметим, что при четном $p>1$ $\frac{1}{(-\varepsilon)^{p-1}}\to-\infty$, $\frac{1}{\eta^{p-1}}\to+\infty$, неопределенности нет; интеграл равен бесконечности, что, кстати, не противоречит бесконечности площади фигуры под графиком функции, состоящей в данном случае из двух бесконечно протяженных кусков.

Главное значение несобственного интеграла

Неопределенности, о которых шла речь, раскрываются, только при наличии информации о взаимном поведении ε и η. Эта информация содержится в понятии главного значения несобственного интеграла. Оно обозначается символом v.p. (***valeur principale*** –главное значение).

Определение. Если функция $f(x)$ такова, что при любом $\varepsilon>0$ существуют собственные интегралы $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ и $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ $(a<c<b)$, то под ***главным значением в смысле Коши*** **(v. p.)** понимается число

$$\text{v.p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Аналогично

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Заметим, что для интегралов $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$, понятие главного значения не вводится.

ПРИМЕР 2.5.4. Найти

а) $\text{v.p.}\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x-3}$; б) $\text{v.p.}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$; в) $\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^3}$ г) $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$.

Решение. а) По определению главного значения несобственного интеграла

$$\text{v.p.}\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x-3}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{1}^{3-\varepsilon}\frac{dx}{x-3}+\int\limits_{3+\varepsilon}^{5}\frac{dx}{x-3}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x-3|\Big|_{1}^{3-\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+\ln|x-3|\Big|_{3+\varepsilon}^{5}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|-\varepsilon|-\ln 2+\ln 2-\ln|\varepsilon|\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=0,$$

здесь было использовано логарифмическое тождество $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$.

Отметим, что полученный результат не противоречит ни геометрическому смыслу исследованного интеграла, ни его расходимости по определению. Сходимость несобственного интеграла по определению и в смысле главного значения – разные понятия.

б) Подынтегральная функция имеет точки неограниченного изменения: $x = 1$ и $x = -1$; первая из них принадлежит интервалу интегрирования. Поэтому данный интеграл относится к смешанному типу, и его следует разбить на два для дальнейшего исследования: $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\int\limits_{0}^{k}\frac{dx}{x^2-1}+\int\limits_{k}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$, где k – произвольное число, большее $1+\varepsilon$. Для второго из интегралов-слагаемых понятия главного значения не существует; его вычисляем просто по определению.

Имеем

$$\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{1+\varepsilon}^{k}\frac{dx}{x^2-1}\right)+\lim_{b\to+\infty}\int_k^b\frac{dx}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{k}\right)+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_k^b=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{-\varepsilon}{2-\varepsilon}\right|-\underset{0}{\ln 1}+\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|-\ln\left|\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln 1=0+0=0.$$

Заметим, что отсутствие обычной сходимости интеграла $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ устанавливается с помощью признака сравнения, т.к. $\frac{1}{x^2-1}=O\left(\frac{1}{x-1}\right)$ при $x\to 1$.

в) По определению главного значения несобственного интеграла

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^3}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^3}+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x^3}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{\varepsilon}^{2}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{2(-\varepsilon)^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)=\frac{3}{8}.$$

г) По определению главного значения несобственного интеграла

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A}\sin x\,dx=$$

$$=-\lim_{A\to+\infty}(\cos A-\cos(-A))=-\lim_{A\to+\infty}0=0.$$

Обратите внимание: обычной сходимости у этого несобственного интеграла нет, и даже сама подынтегральная функция не имеет предела при $x\to+\infty$. ■

ПРИМЕР 2.5.5. Найти v.p. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x}$.

Решение. Обычная сходимость этого интеграла уже исследовалась в примере 2.3.16в) и было установлено, что он расходится.

Подынтегральная функция не ограничена в окрестностях двух точек: $x=0$ и $x=2$, поэтому разбиваем интеграл на три части и по определению главного значения несобственного интеграла получаем:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x} = \text{v.p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x} + \text{v.p.} \int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-2x} + \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-2x} + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \int\limits_{\varepsilon}^{2-\mu} \frac{dx}{x^2-2x} + \lim_{\mu\to+0} \int\limits_{2+\mu}^{3} \frac{dx}{x^2-2x} +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{dx}{x^2-2x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_{\varepsilon}^{2-\mu} +$$

$$+ \lim_{\mu\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_{2+\mu}^{3} + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_{3}^{b} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\varepsilon-2}{-\varepsilon}\right| - \frac{1}{2}\ln 3 + \lim_{\mu\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\mu}{2-\mu}\right| - \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \lim_{\mu\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mu}{2+\mu}\right| + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-2}{b}\right| - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-2}\right| + \lim_{\mu\to+0} \frac{1}{2}\ln\frac{2+\mu}{2-\mu} + \frac{1}{2}\ln 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}.$$

В качестве точек разбиения интервала интегрирования были выбраны $x=1$ и $x=3$, но они могут быть любыми из интервалов $(0+\varepsilon;\ 2-\mu)$, $(2+\mu;\ +\infty)$. ■

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Глава 1.

Для краткости произвольная постоянная C везде опущена.

2. Например, а) $\frac{5}{2}x^2+7$; б) $\frac{1}{2}\arcsin x-5$.

3. а) $\frac{x-2}{2}$; б) $\frac{5^{\operatorname{tg}x}}{\ln 5}$; в) $\sin(6-x)$; г) e^{x^2-3}; д) $\arcsin\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{3}}$; е) $-\operatorname{ctg}(\sin x)$;

ж) $\frac{7\sqrt[7]{\arcsin^8 x}}{8}$; з) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}$; и) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{5^x+\sqrt{3}}{5^x-\sqrt{3}}\right|$; к) $\frac{(2+3x)^{-99}}{-99}$.

4. а) $\frac{a}{4}x^4+x^5-\cos x$; б) $\frac{54}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{54}{5}x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}$; в) $-2\frac{1}{\sqrt{x}}+9\ln|x|+\frac{3^x}{\ln 3}$;

г) $\frac{x^2}{2}+4\operatorname{arctg}x$; д) $-\operatorname{ctg}x-x$; е) $4\operatorname{tg}x+4\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+x$; ж) $x-\cos x$;

з) $4\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{9x^9}$; и) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$; к) $2(e^x-\sqrt{x})$.

5. а) $\frac{3(x+2)^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{3(x+2)^{\frac{4}{3}}}{2}$; б) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^{\frac{10}{3}}x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^{\frac{5}{3}}x$.

6. а) $\frac{d(x^{101})}{101}$; $\frac{1}{101}d(x+1)^{101}$; $-\frac{1}{99}d(x^{-99})$; $\frac{100}{99}d(x^{\frac{99}{100}})$; $-\frac{d(100x-1)^{-99}}{9900}$;

б) $-d(\cos x)$; $\frac{1}{3}d(\sin 3x)$; $-2d(\cos(\frac{x}{2}-3))$; $-d(\sin(5-x))$;

в) $-d(e^{-x})$; $\frac{d(e^{3x+4})}{3}$; $-3d(e^{1-\frac{x}{3}})$; $\frac{d(7^x)}{\ln 7}$; $-\frac{3\,d(7^{-\frac{4x}{3}})}{4\ln 7}$; $\frac{5}{2\ln 7}d(7^{\frac{2x-3}{5}})$;

г) $-d(\operatorname{ctg} x)$; $-\frac{3}{8}d\left(\operatorname{ctg}\frac{8x}{3}\right)$; $\frac{1}{2}d(\operatorname{ctg}(5-2x))$; д) $d(e^{e^x})$.

7. а) $\frac{(3+2x^5)^{20}}{200}$; б) $\frac{(3x^4+1)^{2/3}}{8}$; в) $\sqrt{3x^2+4}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+4}\right|$.

8. а) $-\frac{1}{3}\ln|1-3\sin x|$; б) $\frac{8}{3}\sqrt{1-3\cos\frac{x}{4}}$; в) $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{\cos 5x}{\sqrt{3}}$.

9. а) $\frac{1}{9}e^{3x^3}$; б) $-\frac{1}{3\ln 2}2^{\frac{3}{x}}$; в) $e^{-\frac{1}{x}}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x}$.

10. а) $-\frac{1}{14\ln^{14}x}$; б) $\frac{1}{2}\ln|2\ln 2x+5|$; в) $\frac{x^{10}}{10}-\frac{\ln^2 x}{2}$; г) $\ln|\ln\ln(x+3)|$.

11. а) $\frac{1}{2}\ln|3-2\operatorname{ctg}x|$; б) $-\frac{11}{2}\operatorname{ctg}2x+\frac{2}{9}(1-3\operatorname{ctg}2x)^{\frac{3}{2}}$.

12. а) $-2\frac{5^{-\sqrt{x}}}{\ln 5}$; б) $\frac{2}{3}\cos(2-3\sqrt{x-1})$; в) $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3x}}{2}$.

13. а) $\sin(\operatorname{arctg}x)$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3\operatorname{arcctg}x)$; в) $2\arcsin x-\frac{1}{3}\arcsin^3 x$.

14. а) $\frac{1}{3}\ln\left|3e^x-1\right|$; б) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^x+\sqrt{3}}{e^x-\sqrt{3}}\right|$; в) $-\frac{4}{3}\sin\left(2-3e^{\frac{x}{4}}\right)$.

15. а) $e^{\frac{3x}{2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}\right)$; б) $3^{-x}[(x-x^2)\ln^{-1}3+(1-2x)\ln^{-2}3-2\cdot\ln^{-3}3]$.

16. а) $4x\sin\frac{x}{4}+16\cos\frac{x}{4}$; б) $\frac{1}{125}\left((-27+25x+25x^2)\cos 5x-5(1+2x)\sin 5x\right)$;

в) $\frac{1}{8}(\cos 2x+2x\sin 2x+2x^2)$.

17. а) $\frac{1}{4}\left((2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)$; б) $x\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$;

в) $\frac{1}{2}\left((x^2+9)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-3x\right)$.

18. а) $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-1)$; б) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)$;

в) $2\sqrt{x}\lg(x+1)-\dfrac{4}{\ln 10}(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})$; г) $\dfrac{x^2}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(1+x)$.

19. а) $\dfrac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)$; б) $\dfrac{3}{82}e^{3x}\left(9\cos\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{3}\right)$

20. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

21. а) $\dfrac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\dfrac{10x+1}{\sqrt{79}}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\dfrac{10e^x+1}{\sqrt{79}}$.

22. а) $\dfrac{1}{7}\ln\left|\dfrac{x}{x-7}\right|$; б) $\dfrac{1}{14}\ln\left|\dfrac{\cos 2x-7}{\cos 2x}\right|$.

23. а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\dfrac{1}{6}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}}\right|$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{x}+\dfrac{1}{6}+\sqrt{x+\dfrac{1}{3}\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}}\right|$.

24. а) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{3x^2+4x}-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\ln\left|x+\dfrac{2}{3}+\sqrt{x^2+\dfrac{4}{3}x}\right|$;

б) $-\left(\dfrac{e^{-x}}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}-\dfrac{3}{8}\ln\left|e^{-x}+\dfrac{1}{2}+\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}\right|$.

25. а) $\dfrac{7}{4}\ln\left|x^2-\dfrac{x}{2}+5\right|+\dfrac{3}{2\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-1}{\sqrt{79}}$;

б) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^2x-\dfrac{\operatorname{tg}x}{2}+5\right|-\dfrac{7}{2\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{79}}$.

26. а) $\sqrt{x^2-4x+8}+2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right|$;

б) $\sqrt{e^{2x}+e^x-8}-\dfrac{3}{2}\ln\left|e^x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x-8}\right|$.

27. а) $\left(3+x-\dfrac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2-6x}+9\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x}\right|$;

б) $\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{4^x}{3}-\dfrac{7\cdot 2^x}{12}+\dfrac{1}{8}\right)\sqrt{2^x-4^x}+\dfrac{1}{16\ln 2}\arcsin(1-2^{x+1})$.

28. а) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+10}$;

б) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x-3}+\dfrac{E}{(x-3)^2}+\dfrac{F}{x+3}+\dfrac{G}{(x+3)^2}+\dfrac{Hx+I}{x^2+3x+9}$;

в) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{D}{(x+2)^2}+\dfrac{E}{x-2}+\dfrac{F}{(x-2)^2}+\dfrac{G}{(x-2)^3}+\dfrac{H}{(x-2)^4}+$

$$+\frac{I}{(x-2)^5}+\frac{Kx+L}{x^2+4}+\frac{Mx+N}{x^2+2}+\frac{Px+R}{(x^2+2)^2}.$$

29. а) $\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-4\ln|x-2|+\dfrac{5}{2}\ln|x-3|$; б) $\ln|x-1|-\ln|x-2|-2/(x-2)$;

в) $-\dfrac{1}{3}\ln|x+1|+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|$; г) $\ln|x|-\ln|x-1|-1/(x-1)$;

д) $x-\dfrac{4}{x}-9\operatorname{arctg}x$; е) $-\dfrac{1}{16x}-\dfrac{3}{64}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{32(x^2+4)}$;

ж) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{4}\ln|x-1|+\dfrac{1}{4}\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

з) $\dfrac{2}{7}\ln|\sin x-2|+\dfrac{4}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{7}\ln\left|\sin^2 x+\sin x+1\right|$;

и) $\dfrac{9}{26}\ln\left|2x^2-3\right|-\dfrac{7}{26}\operatorname{arctg}x^2-\dfrac{9}{52}\ln\left|x^4+1\right|$; к) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-1}\right|$;

л) $-\dfrac{5}{4}\ln|\ln x-1|-\dfrac{3}{4}\ln|\ln x+1|+\dfrac{3}{2(\ln x-1)}$.

30. а) $\dfrac{1}{4}\cos 2x-\dfrac{1}{8}\cos 4x$; б) $\dfrac{6}{13}\sin\dfrac{13}{12}x-\dfrac{6}{19}\sin\dfrac{19}{12}x$;

в) $\dfrac{1}{22}\sin\dfrac{11}{2}x+\dfrac{1}{18}\sin\dfrac{9}{2}x+\dfrac{1}{6}\sin\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$.

31. а) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x$; б) $-\frac{1}{36}\cos^{12}3x+\frac{1}{21}\cos^{14}3x-\frac{1}{48}\cos^{16}3x$;

в) $\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\sin\frac{4x}{3}+\frac{3}{64}\sin\frac{8x}{3}$; г) $4\sin\frac{x}{4}-\frac{8}{3}\sin^3\frac{x}{4}+\frac{4}{5}\sin^5\frac{x}{4}$;

д) $\frac{1}{2^{10}}\left(12x-2\sin 2x-4\sin 4x+\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 8x-\frac{1}{5}\sin 10x\right)$; е) $\frac{1}{4}\cos^4(7-x)$;

ж) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin(4x-10)$; з) $\frac{1}{101}\cos^{101}\frac{1}{x}$; и) $\frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{12}\sin(6\arcsin x)$;

к) $\frac{\ln x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\ln x)$.

32. а) $\frac{2}{7}\operatorname{tg}7x+\frac{1}{21}\operatorname{tg}^3 7x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x$; б) $-\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$;

в) $\frac{1}{20}\left(\operatorname{tg}^4 5x+6\operatorname{tg}^2 5x+12\ln|\operatorname{tg}5x|-2\operatorname{ctg}^2 5x\right)$; г) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\cos x}$;

д) $\frac{2}{\cos\frac{x}{2}}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\cos\frac{x}{2}+1}\right|$.

33. а) $\frac{5}{4}\operatorname{tg}^2\frac{2x}{5}+\frac{5}{2}\ln\left|\cos\frac{2x}{5}\right|$; б) $x+a\operatorname{ctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{a}$;

в) $-\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6}+\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$.

34. а) $\frac{1}{5\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(\sqrt{7}\operatorname{tg}5x)$; б) $-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}}\right|$; в) $\frac{1}{5\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|$;

г) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\operatorname{tg}x+1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|$; д) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)-\sin x$; е) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)$;

ж) $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}\right)-x$; з) $-\frac{3}{4}\ln\left|1-4\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|$; и) $-\frac{1}{4}\ln|2+\cos 2x|$;

к) $\frac{1}{5}x-\frac{4}{5\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{11}}\right)-\frac{1}{5}\ln\left|1+2\cos^2 x+\sin x\cos x\right|$.

35. а) $2\sqrt{x+9}+3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|$; б) $6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+\frac{6}{\sqrt[6]{x}+1}$;

в) $-\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}+x+2\right|+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right)$;

г) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\frac{5}{2}\ln\left|1+2\sqrt[4]{x}\right|$; д) $6\sqrt[6]{\ln x}-6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{\ln x}\right)$;

е) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x}\right)$; ж) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|-\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$;

з) $\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x$; и) $\frac{5+e^x}{5\sqrt{5-e^{2x}}}$;

к) $\frac{1}{8}\left(x\sqrt{9-x^2}(2x^2-9)+81\arcsin\frac{x}{3}\right)$; л) $\frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$; м) $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$.

Глава 2.

1. ln 2. 2. а) 44; б) 0; в) 12,5 π. 3. а) 3/2; б) π / 6; в) 1;

г) $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$; д) 0; е) $\frac{1}{60}(16-7\sqrt{2})$; ж) $\frac{1}{32}(3\pi-8)$. 4. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 5. $100\sqrt{2}$.

6. а) $e-2$; б) $\pi-2$; в) $-1/e$; г) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})$.

8. а) $\ln 9+\frac{3}{\sqrt{13}}\ln\left(\frac{1}{18}(31-7\sqrt{13})\right)$; б) $1-\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) $\pi/4$.

9. а) 0; б) 1; в) 0.

11. $3<I_1<5$; $\frac{2}{9}<I_2<\frac{2}{7}$; $\frac{\pi}{2}<I_3<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

12. I_2 больше.

14. $\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}1 \approx 1{,}22$.

15. а) 1/3; б) 10/3; в) $(\cos\varphi)/2$.

16. а) $2/\ln 2$; б) 1/8; в) $\pi/2$; г) расходится; д) расходится; е) расходится.

18. а)Сходится; б) расходится; в) сходится; г) расходится; д) расходится.

19. а) Сходится абсолютно; б) расходится; в) сходится.

20. а) Расходится; б) $-\frac{2185}{374}$; в) $\frac{64}{3}$; г) $\frac{9}{2}a^{2/3}$; д) при $p \ge 1$ расходится, при $p < 1$ $\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}$; е) расходится; ж) $2 + \pi$.

21. а) Сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится; ж) сходится.

22. а) расходится; б) расходится; в) сходится.

23. а) $1 - \pi/4$; б) 5/4; в) $\frac{e^3-4}{e}$; г) $2(e-e^{-1})$; д) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$; е) 9/4; ж) 7/3.

24. $1 < n < 2$.

25. а) 3π; б) $15\pi/128$; в) 169π.

26. а) $3\pi/2$; б) $1 - \pi/4$; в) 1) $\pi/8 - 1/4$, 2) $\pi/8 + 1/4$; г) $\pi/8$; д) $\sqrt{2}\pi$.

27. а) $V_{Ox} = 48\pi/5$, $V_{Oy} = 24\pi/5$; б) $V_{Ox} = \pi\left(\frac{3}{10\cdot\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{896}\right)$, $V_{Oy} = \pi\left(\frac{3\sqrt[3]{4}}{28} - \frac{1}{80}\right)$; в) $V_{Ox} = 2\pi$, $V_{Oy} = \pi(e^2 - 1)/2$.

28. а) $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$; б) $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; в) $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

29. а) $8a$; б) $16a$; в) 8π.

30. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{2\pi/3} - 1\right)$; б) $\frac{5}{12} - \ln\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ РЕЙТИНГОВЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Предлагаются примерные варианты тестов, контрольных и домашних работ по разделам интегрального исчисления, изложенным в пособии. Все они были любезно предоставлены лекторами потоков разных факультетов. Баллы, которыми оценивается каждая рейтинговая работа, могут быть различными на разных потоках (они определяются лекторами потоков).

Факультет геологии и геофизики нефти и газа

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (15-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$
2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$
3. $\int x \ln x\, dx$
4. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$
5. $\int \frac{(x+3)dx}{x^2\sqrt{2x+3}}$
6. $\int \frac{1-x^4}{x(x^2+2x-3)}\,dx$

Вариант №2

1. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x(x^2-3x+2)}$
2. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
3. $\int \frac{3x\,dx}{x^2-x+5}$
4. $\int \arcsin 3x\, dx$
5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$
6. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

Вариант №3

1. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$
2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$
3. $\int \ln(x^2+2)\,dx$
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\operatorname{ctg} x)}$
5. $\int \frac{(2-x)}{(x-4)(x^2+1)}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$

Контрольная работа или домашнее задание
«**Определенный интеграл**» (5-15 баллов)

Вариант №1

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty x\, e^{-2x^2}\, dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x, \quad y = x - 2$.

4. Фигура, ограниченная линиями $y = \ln x, \quad y = 1, \quad y = 0, \quad x = 0$, вращается вокруг оси OX. Найти объем тела вращения.

Вариант №2

1. Вычислить: $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$.

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$\rho = 3(1+\sin\varphi) \quad \left(-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0\right).$$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{3}, \quad x = 1.$

4. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Вариант №3

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = p\cos t, \\ y = q\sin t. \end{cases}$

3. Кривая задана уравнением $y^2 = 4x^3$, вычислить длину ее дуги между началом координат и точкой (1; 2).

4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 3x}$.

Факультет разработки нефтяных и газовых месторождений

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (15-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int \frac{x + \operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx$
2. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
3. $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4x + 9}$
4. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$
5. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
6. $\int \frac{3x + 5}{x^2(x^2 + 4)} dx$
7. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 5\sin^2 x}$

Вариант №2

1. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{3 - e^{2x}}}$
2. $\int \sqrt[3]{x^5} \ln x\,dx$
3. $\int \frac{6x + 13}{(x - 5)^2(x + 3)} dx$
4. $\int \sin^3 2x \cos^3 2x\,dx$
5. $\int \frac{5x - 1}{\sqrt[3]{2 - 4x} - 7} dx$
6. $\int \operatorname{tg}^3 5x\,dx$
7. $\int \frac{dx}{\sin x - 3}$

Вариант№3

1. $\int \frac{x^3 - x}{\sqrt{4 - x^4}} dx$
2. $\int \frac{(x + \cos 4x)dx}{\sin^2 4x}$
3. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x(x^3 + 27)} dx$
4. $\int \frac{\cos x\,dx}{2 + 3\cos x}$
5. $\int (\frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} + \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}})dx$
6. $\int \sin^4 3x \cos^3 3x\,dx$
7. $\int \frac{(1 + x)\,dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

Тест «**Определенный интеграл**» (5-10 баллов)

Вариант №1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad x = 8$.

2. Вычислить длину дуги первой арки циклоиды: $\begin{cases} x = 17(t - \sin t), \\ y = 17(1 - \cos t). \end{cases}$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX полуволны синусоиды $y = \sin x, \quad 2\pi \le x \le 3\pi$.

Вариант №2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0.$$

2. Вычислить длину дуги части кривой: $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \le x \le 1/2$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x, \quad x = 4$.

Домашнее задание (5 баллов)

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x = \pi/6, \quad x = \pi/3, \quad y = 0.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 4\cos 4\varphi$.

3. Найти длину дуги линии $x = t - \sin t$, $y = 1 - c$ между точками её пересечения с осью абсцисс.

4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной петлёй $x = 1 - t^2, \quad y = 2(t - t^3)$.

5. Вычислить или исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; \qquad \text{б) } \int_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^2 + 3x + 2}.$$

Тест «**Несобственный интеграл**» (5-10 баллов)

Исследовать интегралы на сходимость:

Вариант №1

1. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\,dx$

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+\sin^2 x}$

3. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sin x}\,dx$

Вариант №2

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$

2. $\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^3+5}$

3. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

Факультет проектирования, сооружения и эксплуатации систем трубопроводного транспорта

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (10-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$

3. $\int x\ln x\,dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2}$

6. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$

Вариант №2

1. $\int \frac{1-\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x}}$

3. $\int (2x+1)\,e^{-x}\,dx$

4. $\int \sin^4 x\,dx$

5. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

6. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-1}$

Контрольная работа «**Определенный интеграл**» (10-15 баллов)

Вариант №1

1. Вычислить: $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой: $\rho = 2\cos\varphi$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1,\quad x = 0,\quad x = 1.$

Вариант №2

1. Вычислить: $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы: а) $\int\limits_0^\infty x\,e^{-2x}\,dx$; б) $\int\limits_0^\pi \ln x\,dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x^2 + y^2 = 16,\quad x^2 = 12(y-1).$$

Факультет инженерной механики

Тест «**Простейшие приемы интегрирования**» (5-10 баллов)

1. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$

2. $\int \frac{\sin 3x\,dx}{5+4\cos^2 3x}$

3. $\int \frac{\ln(3x)}{x}\,dx$

4. $\int \frac{x}{x+4}\,dx$

5. $\int \frac{(x+2)}{2x^2+4x+6}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+6}}$

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (15-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$

2. $\int \frac{x+2}{(x-2)(x^2-4x+8)}\,dx$

3. $\int \arcsin x\,dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}}$

5. $\int \frac{\sqrt{e^{3x}}}{\sqrt{2+e^{3x}}}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-1}$

Вариант №2

1. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$

2. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

3. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

4. $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$

5. $\int \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}\,dx$

6. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$

Самостоятельная работа «**Определенный интеграл**» (15-20 баллов)

1. Найти среднее значение функции $y=\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$.

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_6^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4-16}$ или доказать его расходимость.

3. Найти площадь, ограниченную линиями, уравнения которых:

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad x=0,\quad x=\pi/4.$$

4. Найти площадь, ограниченную линией $\rho=3(1+\cos\varphi)$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линией $y=\sin^2 x$ на отрезке от $x=0$ до $x=\pi$.

Факультет химической технологии и экологии

Тест «**Простейшие приемы интегрирования**» (5-10 баллов)

1. $\int x\, 5^{-x^2}\, dx$
2. $\int \frac{dx}{x \ln x}$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$
4. $\int \sqrt{x+3}\, dx$
5. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\, dx$

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (15-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}\, 2x}$
2. $\int x \ln x\, dx$
3. $\int \frac{dx}{x^2-6x}$
4. $\int \sin^3 \frac{5x}{3}\, dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

Вариант №2

1. $\int \frac{dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$
2. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$
3. $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt[3]{x-1}}$
4. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 3x}$
5. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{tg}\, x}$

Домашняя работа «**Определенный интеграл**» (10-15 баллов)

Вариант №1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 12, \quad x + y = -8$.

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 11\cos^3 t, \\ y = 11\sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{12}.$$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 2x, \quad x^2 = y$.

4. Исследовать сходимость интегралов: а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; б) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+1}$.

Вариант №2

1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2, \quad y = 3 - 2x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho^2 = a^3 \cos 2\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ на отрезке $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Факультет автоматики и вычислительной техники

Тест «**Простейшие приемы интегрирования**» (5-10 баллов)

1. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$

2. $\int \frac{\arccos(x/2)\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int e^{2x^2 + \ln x} dx$

4. $\int \cos\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

5. $\int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(1+\ln x)}$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log_2 x}}{x} dx$

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (15-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$
2. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$
3. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$
4. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$

Вариант №2

1. $\int \frac{(1-3x)\,dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$
2. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$
3. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
6. $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$

Контрольная работа «**Определенный интеграл**» (10-15 баллов)

Вариант №1

1. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2} \quad 1 \le x \le 2.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin 3\varphi$.

3. Вычислить объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2,$$

вокруг оси OX.

4. Вычислить интеграл или установить его расходимость: $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$

5. Исследовать несобственный интеграл на сходимость: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x\,dx$.

Вариант №2

1. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx$.

2. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2x+1}{\sqrt{x^5}+4}\,dx.$$

3. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = \sin\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$.

Факультет экономики и управления

Тест «**Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала**» (5-10 баллов)

Вариант №1

1. $\int \sqrt{1+4\sin x}\,\cos x\,dx$
2. $\int \frac{dx}{x(2\ln^2 x - 5)}$
3. $\int e^{2\cos 3x}\sin 3x\,dx$
4. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}\,dx$

Вариант №2

1. $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$
2. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$
3. $\int \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
4. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$

Контрольная работа «**Неопределенный интеграл**» (15-20 баллов)

Вариант №1

1. $\int \frac{\sqrt{\ln x + 6}\, dx}{x}$
2. $\int (x+9)\sin x\, dx$
3. $\int \frac{x\, dx}{(x^2+4)(x-2)}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{10x - x^2}}$
5. $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\, dx$
6. $\int \frac{dx}{3\sin x + 10\cos x}$
7. $\int \frac{7-5x}{\sqrt{x^2+6}}\, dx$

Вариант №2

1. $\int \sqrt{\frac{e^{5x}}{3-e^{5x}}}\, dx$
2. $\int \frac{dx}{20\cos^2 x - 2\sin^2 x - 3\sin 2x}$
3. $\int \frac{x+9}{x^3+9x}\, dx$
4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x} - 2x + \sqrt[6]{x^5}}$
6. $\int \cos^{101}\frac{x}{2}\sin^3\frac{x}{2}\, dx$
7. $\int x\cos(3x^2+5)\, dx$

Контрольная или домашняя работа «**Определенный интеграл**» (5-10 баллов)

Вариант №1

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2x + 3, \quad y = 3x - 1.$$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8$.

4. Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

$$\text{а) } \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3 - 3x^2}; \qquad \text{б) } \int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Вариант №2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой: $\rho = 4\cos 3\varphi$.

2. Найти длину дуги линии: $y = \arcsin e^{-x}, \quad x \in [0; 1]$.

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линией: $\begin{cases} x = 6\cos^4 t, \\ y = 8\sin^4 t. \end{cases}$

4. Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

$$\text{а) } \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{ctg} x\, dx; \quad \text{б) } \int_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1 + 5x^4}}.$$